

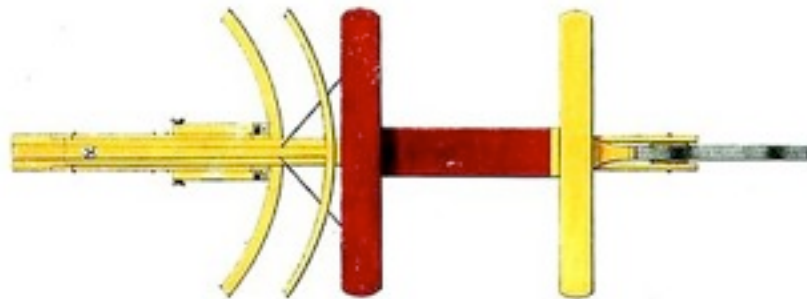
Ringvorlesung “Physik im Alltag”, 4.12. 2012

Physik des Radfahrens



von Robi Banerjee, Hamburger Sternwarte

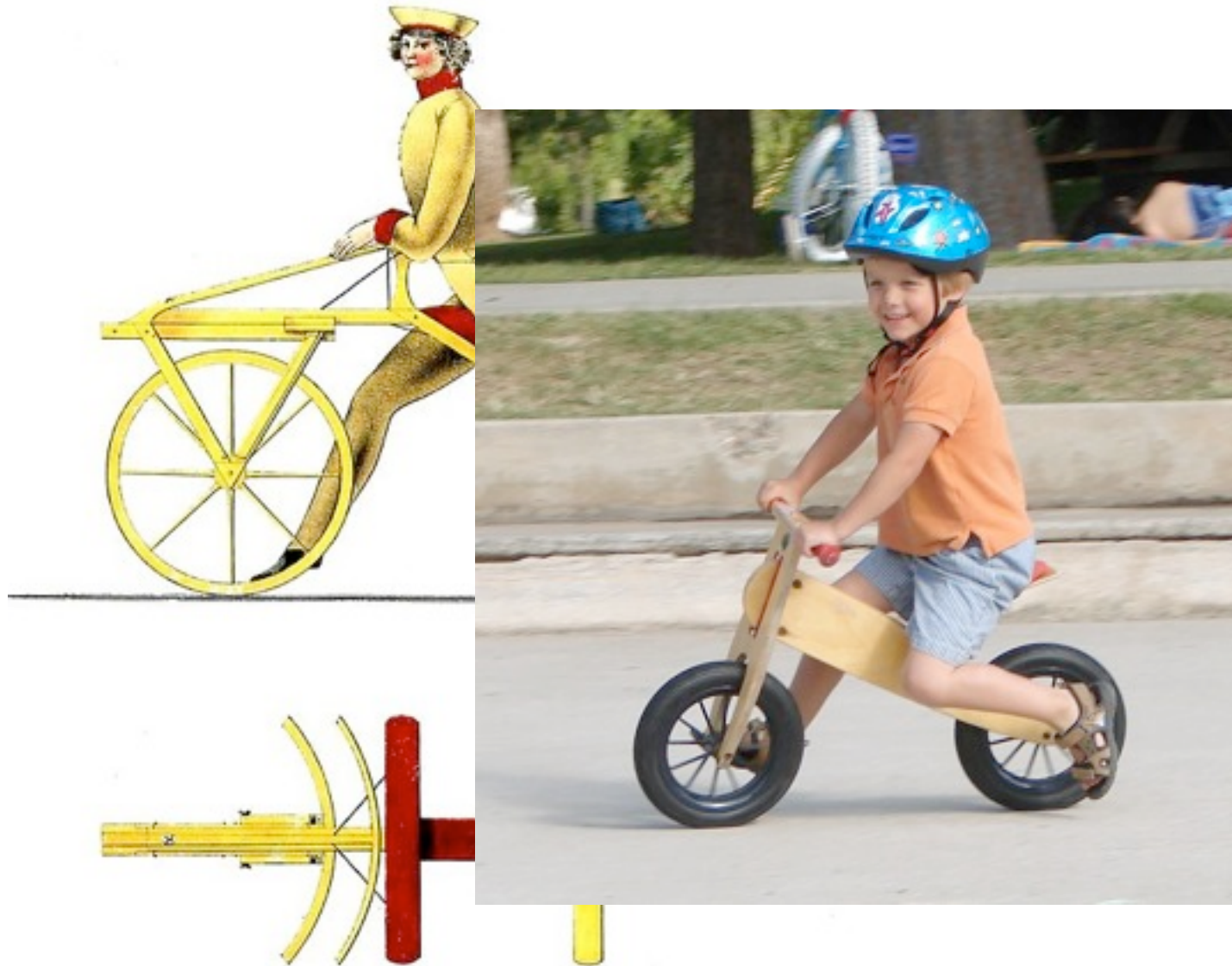
Geschichtliches



1817 PATENTED
Freiherrn Carl von Drais.
1817 August 26. 1817. Karlsruhe 40.

1817: Laufrad von Freih. von Drais / Karlsruhe

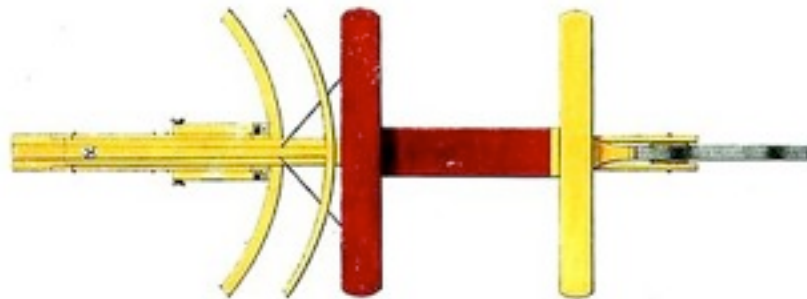
Geschichtliches



*1817 Erfindung des Laufrades
Freiherrn Carl von Drais.
Am 1. April 1817 in Karlsruhe.*

1817: Laufrad von Freih. von Drais / Karlsruhe

Geschichtliches



1817 PATENTED
Freiherrn Carl von Drais.
1817 August 26. 1817. Karlsruhe 40.

1817: Laufrad von Freih. von Drais / Karlsruhe

Geschichtliches



*Das Laufrad war
Freiherrn Carl von Drais.
Am 12. April 1817 in Karlsruhe 1817*

1817: Laufrad von Freih. von Drais / Karlsruhe



1870: Hochrad von Starley & Hillmann

Geschichtliches



Ende 19.Jhd. Kurbelveloziped



1885: "Rover Safety Cycle" von Starley

Geschichtliches



Ende 1970er Jahre:
Hercules' Cavallo

Geschichtliches



Stabilität beim Fahrradfahren

Theoretische und experimentelle Untersuchungen:

- F.J.W Whipple, *The stability of the motion of a bicycle*, 1899
→ **30** Seiten Mathematik!
- Timoshenko & Young, *Advanced Dynamics*, 1948
- F. Klein & A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*, 1965
- D.E.H. Jones, *The stability of the bicycle*, 1970
- J. Lowell & H.D. McKell, *The stability of bicycles*, 1982
- H.J. Schlichting, *Zur Gleichgewichtsproblematik beim Fahrradfahren*, 1984
- W. Suhr & H.J. Schlichting, *Gleichgewicht auf zwei Rädern*, 2007
- ...

Stabilität beim Fahrradfahren

Wie einfach bzw. schwierig ist das Problem?

Dynamics.

6. Consider the back wheel only and use axes H, M, B . Let the reaction of the ground be merely the force F, F', F'' . In making this assumption the couples due to rolling and spinning friction are neglected. These will be considered later. The reaction of the back-frame on the back wheel consists of a force $(-Q_1, -Q_2, -Q_3)$ through O , and a couple $(-L_1, -L_2, 0)$. Here we assume that no driving couple is applied to the wheel.

Let m be the mass of the wheel, B, B, B_2 its moments of inertia. The velocity of O is

$$-\Omega a \sin \eta, \Omega a \cos \eta, a(\theta_1 \sin \eta - \theta_2 \cos \eta).$$

Resolving the forces on the back wheel, and applying d'Alembert's principle, we find

$$\left. \begin{aligned} F_1 - Q_1 - mg \cos \theta &= \\ m \left[-\frac{d}{dt}(\Omega a \sin \eta) - \theta_2(\Omega a \cos \eta) + \theta_1 a(\theta_1 \sin \eta - \theta_2 \cos \eta) \right] \\ F_2 - Q_2 - mg \sin \chi &= \\ m \left[\frac{d}{dt}(\Omega a \cos \eta) - \theta_1 a(\theta_1 \sin \eta - \theta_2 \cos \eta) - \theta_2 \Omega a \sin \eta \right] \\ F_3 - Q_3 - mg \sin \psi &= \\ m \left[a \frac{d}{dt}(\theta_1 \sin \eta - \theta_2 \cos \eta) + (\theta_2 \sin \eta + \theta_1 \cos \eta) a \Omega \right] \end{aligned} \right\} \text{III.}$$

The moments of momentum of the wheel about O are $B\theta_1, B\theta_2, B_2\Omega$. Take moments about O

$$\left. \begin{aligned} -L_1 - F_1 a \sin \eta &= B\dot{\theta}_1 - (B\theta_2 - B_2\Omega)\theta_1 \\ -L_2 + F_2 a \cos \eta &= B\dot{\theta}_2 + (B\theta_1 - B_2\Omega)\theta_2 \\ -a(F_1 \cos \eta - F_2 \sin \eta) &= B_2\dot{\Omega} \end{aligned} \right\} \text{.....IV.}$$

7. Now consider the motion of the frame. Using the same axes assume as constants of the rigid body formed by frame and rider:—Mass M . Moments and products of inertia about g , $A_1, A_2, A_3, A_{11}, A_{22}, A_{33}$. Coordinates relative to O of g the centre of mass, c_1, c_2, c_3 . Let the reaction of the front-frame on the back-frame consist of a force P_1, P_2, P_3 and a couple C_1, C_2, C_3 . The reaction of the back wheel on the frame is the force F_1, F_2, F_3 , and the couple $L_1, L_2, 0$.

The velocity of g is

$$(-\Omega a \sin \eta - \theta_2 c_2 + \theta_1 c_1), (\Omega a \cos \eta - \theta_1 c_2 + \theta_2 c_1), \\ (a \sin \eta + c_2)\theta_1 - (a \cos \eta + c_1)\theta_2.$$

The equations obtained by resolving parallel to the axes H, M, B , are

$$\left. \begin{aligned} Q_1 + P_1 - Mg \cos \theta &= M \left[\frac{d}{dt}(-\Omega a \sin \eta - \theta_2 c_2 + \theta_1 c_1) \right. \\ &\quad \left. - \theta_2(\Omega a \cos \eta - \theta_1 c_2 + \theta_2 c_1) + \theta_1 \{(a \sin \eta + c_2)\theta_1 - (a \cos \eta + c_1)\theta_2\} \right] \\ Q_2 + P_2 - Mg \sin \chi &= M \left[\frac{d}{dt}(\Omega a \cos \eta - \theta_1 c_2 + \theta_2 c_1) \right. \\ &\quad \left. - \theta_1 \{(a \sin \eta + c_2)\theta_1 - (a \cos \eta + c_1)\theta_2\} + \theta_2(-\Omega a \sin \eta - \theta_2 c_2 + \theta_1 c_1) \right] \\ Q_3 + P_3 - Mg \sin \psi &= M \left[\frac{d}{dt}\{(a \sin \eta + c_2)\theta_1 - (a \cos \eta + c_1)\theta_2\} \right. \\ &\quad \left. + (\theta_2 \sin \eta + \theta_1 \cos \eta)\Omega a - \{(\theta_1^2 + \theta_2^2)c_3 - \theta_2(c_2\theta_2 + c_1\theta_1)\} \right] \end{aligned} \right\} \text{V.}$$

The equations found by taking moments about g are

$$\left. \begin{aligned} L_1 + C_1 + (Q_2 + P_2)c_3 - (Q_3 + P_3)c_2 + P_1 p &= \frac{D}{Dt}[A_1\theta_1 - A_{12}\theta_2 - A_{13}\theta_3] \\ L_2 + C_2 + (Q_3 + P_3)c_1 - (Q_1 + P_1)c_3 &= \frac{D}{Dt}[A_2\theta_2 - A_{23}\theta_3 - A_{21}\theta_1] \\ C_3 + (Q_1 + P_1)c_2 - (Q_2 + P_2)c_1 - P_2 p &= \frac{D}{Dt}[A_3\theta_3 - A_{31}\theta_1 - A_{32}\theta_2] \end{aligned} \right\} \text{...VI,}$$

where the operator $\frac{D}{Dt}$, acting on the x component of a vector xyz , gives $\dot{x} - \theta_2 y + \theta_1 z$.

8. From the twelve equations, III. to VI., $F_1, F_2, F_3, Q_1, Q_2, Q_3, L_1, L_2$, must be eliminated. The four resulting equations will

give the wrench, which must be exerted by the front-frame on the back-frame to produce the motion.

The first of these equations is that which would be obtained by taking moments about an axis in the direction II through T . The values of the moments of inertia about axes $H_1M_1B_1$ through T are

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= A_1 + B + ma^2 \sin^2 \eta + M \cdot [(a \sin \eta + c_1)^2 + c_2^2], \\ \Gamma_2 &= A_2 + B + ma^2 \cos^2 \eta + M \cdot [(a \cos \eta + c_1)^2 + c_2^2], \\ \Gamma_3 &= A_3 + B_3 + ma^2 + M \cdot [(a \sin \eta + c_1)^2 + (a \cos \eta + c_1)^2], \\ \Gamma_{11} &= A_{11} + M \cdot c_2 (a \cos \eta + c_1), \\ \Gamma_{21} &= A_{21} + M \cdot c_2 (a \sin \eta + c_1), \\ \Gamma_{12} &= A_{12} + ma^2 \sin \eta \cos \eta + M(a \cos \eta + c_1)(a \sin \eta + c_1).\end{aligned}$$

Mass of back frame and wheel = $M + m = W$; and if G , the C. G. of frame and wheel have coordinates β, γ, δ when the axes are $H_1M_1B_1$ through T ,

$$\begin{aligned}W\beta &= a(M + m) \cos \eta + c_1 M, \\ W\gamma &= a(M + m) \sin \eta + c_1 M, \\ W\delta &= c_2 M.\end{aligned}$$

N.B.— Γ, β, γ , etc. are all variables.

The equation is obtained by multiplying VI. (1) by 1, IV. (1) by 1, III. (3) by $a \sin \eta$, V. (2) by $-c_2$, VI. (3) by $(c_1 + a \sin \eta)$, and adding

$$\left. \begin{aligned}C_1 + (p + a \sin \eta) P_1 - [\gamma \sin \psi - \delta \sin \chi] g W \\ = \frac{D}{Dt} [\Gamma_1 \theta_1 - \Gamma_{11} \theta_1 - \Gamma_{12} \theta_2] - \dot{\eta} [a \cos \eta (\gamma_1 \theta_1 - \beta \theta_2) W] \\ + (\Omega - \theta_2) [B_2 \theta_2 + (\theta_2 \sin \eta + \theta_1 \cos \eta) a \gamma W + \theta_2 \sin \eta a \delta W] \\ + \frac{d}{dt} [(\Omega - \theta_2) (-W a \cos \eta)]\end{aligned} \right\} \text{VII.}$$

The second equation could be obtained by taking moments about an axis in the direction M_1 through T .

It is found by multiplying VI. (2) and IV. (2) by 1, III. (3) by $-a \cos \eta$, V. (3) by $-(\cos \eta + c_1)$, V. (1) by c_2 , and adding

$$\left. \begin{aligned}C_2 - a \cos \eta P_2 + g (\beta \sin \psi - \delta \cos \theta) W \\ = \frac{D}{Dt} [\Gamma_2 \theta_2 - \Gamma_{21} \theta_1 - \Gamma_{22} \theta_2] - \dot{\eta} [a \sin \eta (\gamma_1 \theta_1 - \beta \theta_2) W] \\ + (\Omega - \theta_2) [-B_2 \theta_1 - (\theta_2 \sin \eta + \theta_1 \cos \eta) a \beta W - \theta_2 \cos \eta a \delta W] \\ - \delta \frac{d}{dt} [(\Omega - \theta_2) W a \sin \eta]\end{aligned} \right\} \text{VIII.}$$

The third equation could be obtained by taking moments about an axis in the direction B_2 through O , of the force on the frame.

The following expressions, for the moments of inertia of the frame about O , are required

$$\begin{aligned}E_1 &= A_1 + M(c_2^2 + c_1^2), & E_{22} &= A_{22} + M c_2 c_1, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.}\end{aligned}$$

To obtain the equation multiply VI. (3) by 1, V. (1) by $(-c_2)$, V. (2) by c_1 , and add

$$\left. \begin{aligned}C_3 - p P_1 + M g (c_2 \cos \theta - c_1 \sin \chi) = \frac{D}{Dt} [E_3 \theta_3 - E_{21} \theta_1 - E_{22} \theta_2] \\ + M a \left[\frac{d}{dt} \{ \Omega (c_2 \sin \eta + c_1 \cos \eta) \} + \theta_2 \Omega (c_2 \cos \eta - c_1 \sin \eta) \right]\end{aligned} \right\} \text{IX.}$$

Finally, multiply IV. (3) by $\frac{1}{a}$, III. (2) and V. (2) by $\cos \eta$, III. (1) and V. (1) by $-\sin \eta$, and add

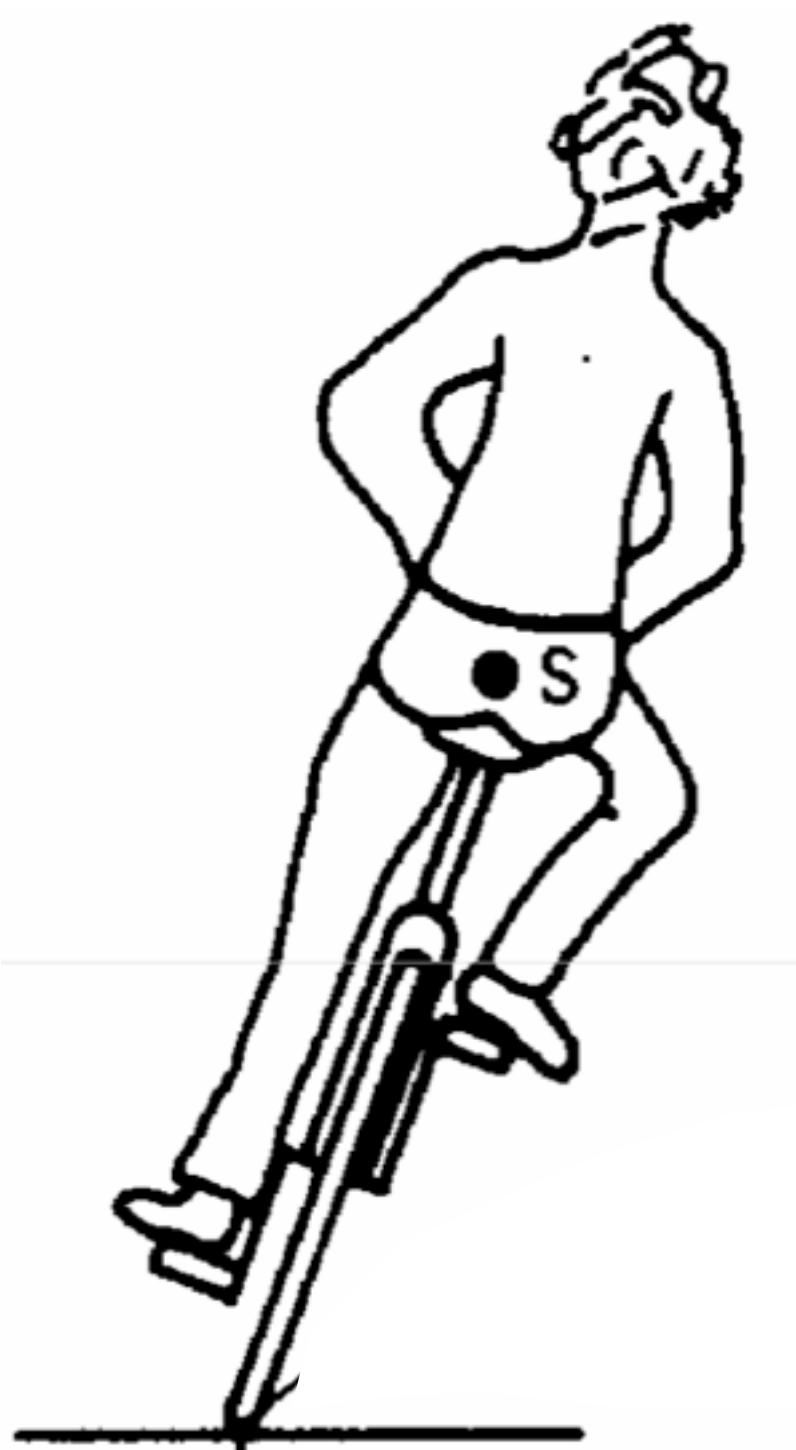
$$\left. \begin{aligned}P_2 \cos \eta - P_1 \sin \eta = \frac{B_2}{a} \dot{\Omega} \\ + W a [\dot{\Omega} - (\theta_1^2 - \theta_2^2) \cos \eta \sin \eta + \theta_1 \theta_2 \cos 2\eta] \\ + M \left[\frac{d}{dt} \{ -(\theta_1 \cos \eta + \theta_2 \sin \eta) c_2 + \theta_2 (c_1 \cos \eta + c_2 \sin \eta) \} \right. \\ \left. - (\theta_1 \cos \eta + \theta_2 \sin \eta) (-\theta_2 c_1 + \theta_1 c_2) \right. \\ \left. + (\theta_2 + \dot{\eta}) \{ -\theta_2 (c_2 \cos \eta - c_1 \sin \eta) + (\theta_2 \cos \eta - \theta_1 \sin \eta) c_2 \} \right]\end{aligned} \right\} \text{X.}$$

9. The action of the front-frame on the back-frame, and the reaction of the back-frame on the front-frame, together form a system of forces in equilibrium.

und weitere 30 Seiten !

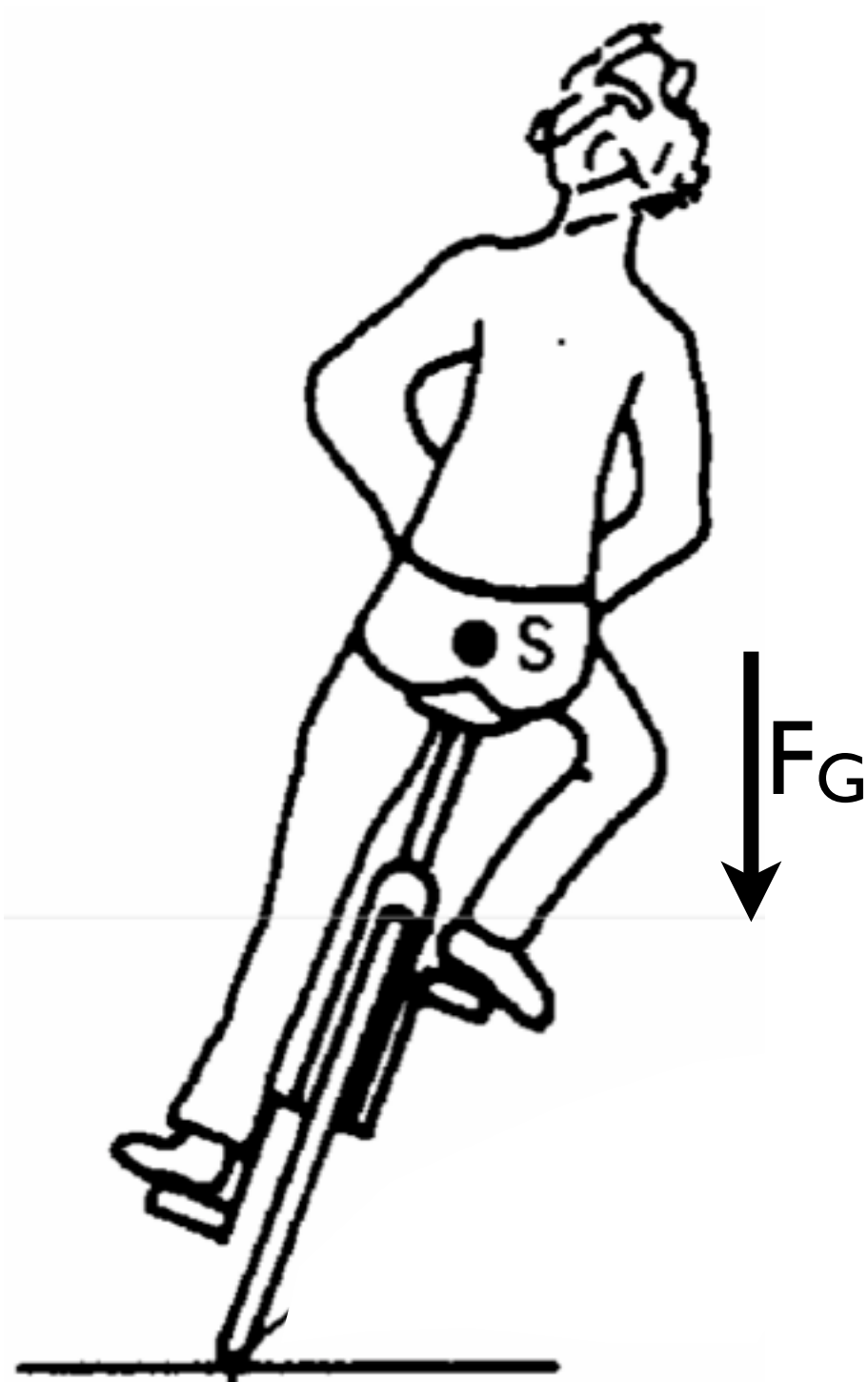
Stabilität beim Fahrradfahren

I. Ohne Fahr-Bewegung



Stabilität beim Fahrradfahren

I. Ohne Fahr-Bewegung



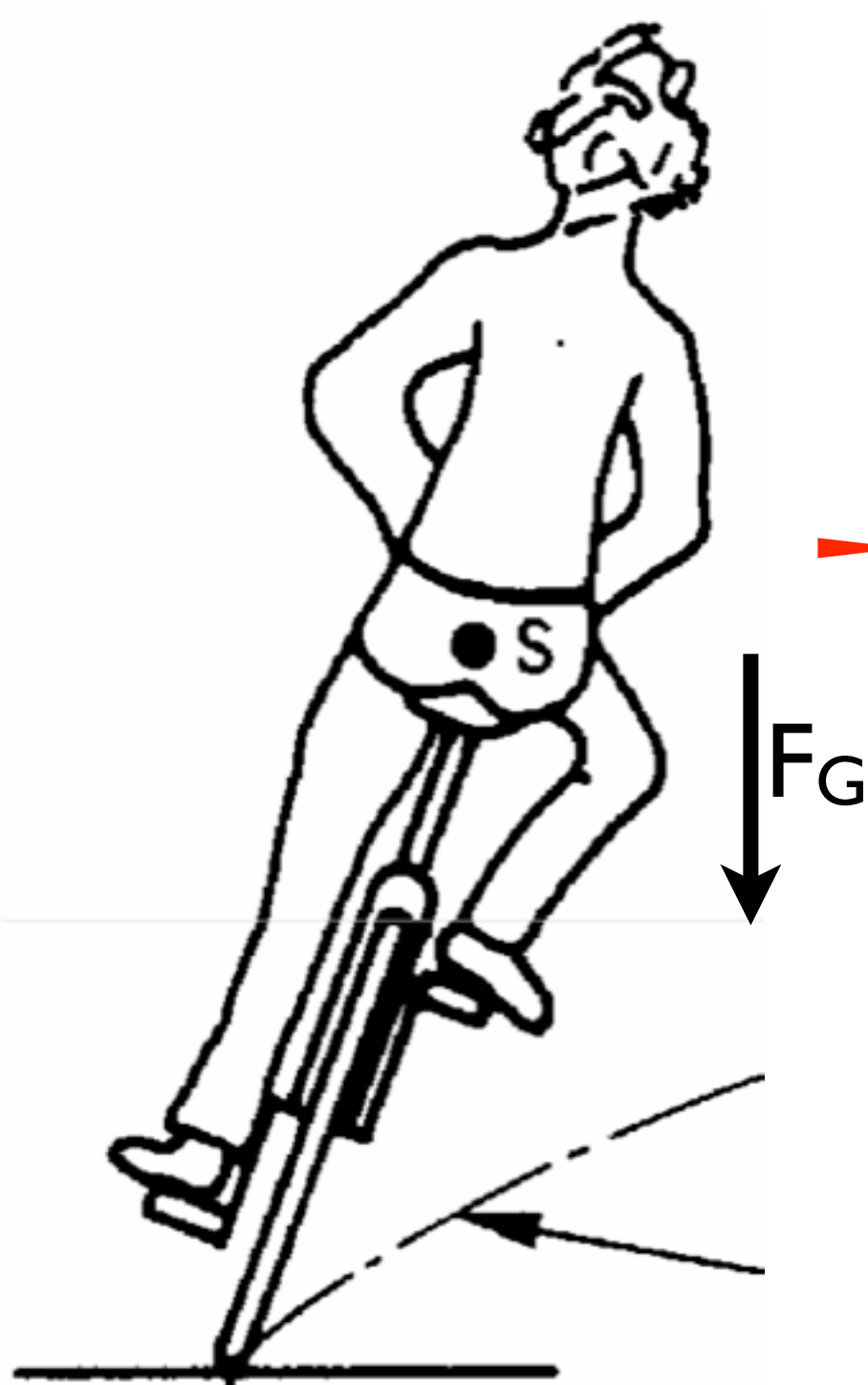
Stabilität beim Fahrradfahren

I. Ohne Fahr-Bewegung



Stabilität beim Fahrradfahren

I. Ohne Fahr-Bewegung

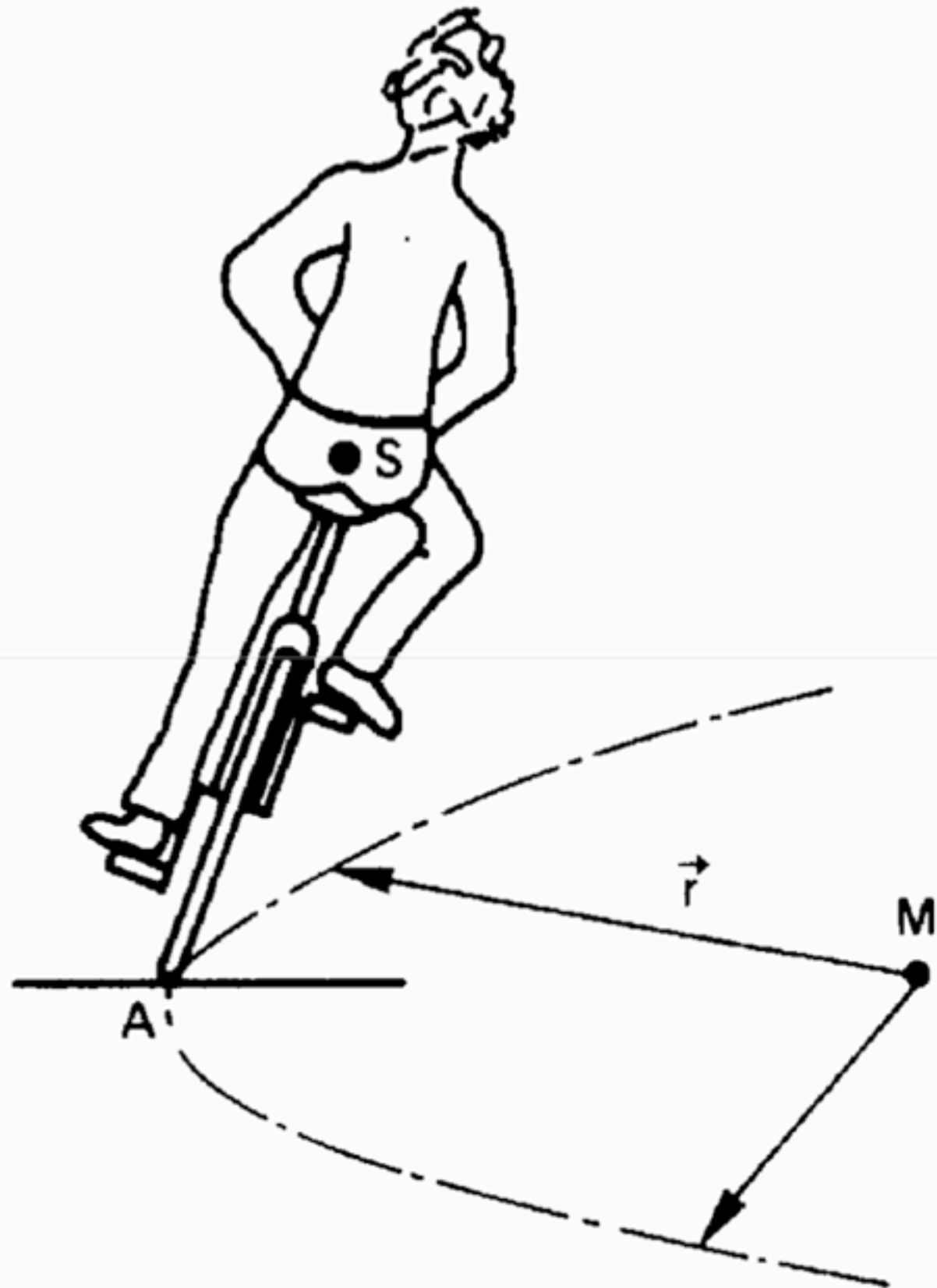
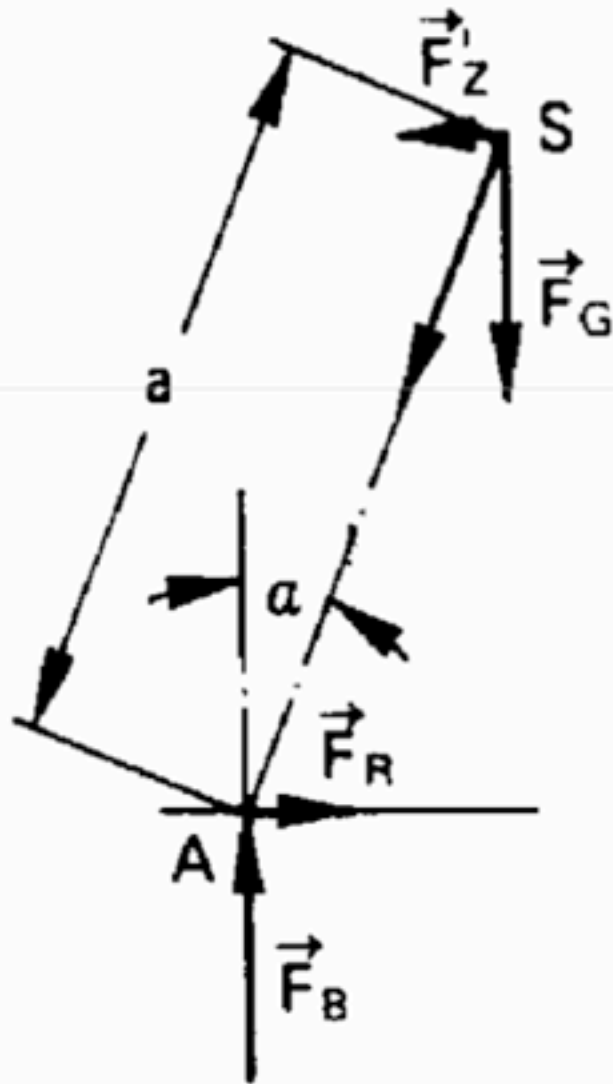


→ ohne zu fahren ist das Rad instabil !

Stabilität beim Fahrradfahren

2. Kreisfahren

F_Z : Zentrifugalkraft



Stabilität beim Fahrradfahren

2. Kreisfahren

Gleichgewichtslage durch
verschwindendes
Gesamtdrehmoment:

$$\vec{D} = \vec{D}_Z + \vec{D}_G \stackrel{!}{=} 0$$

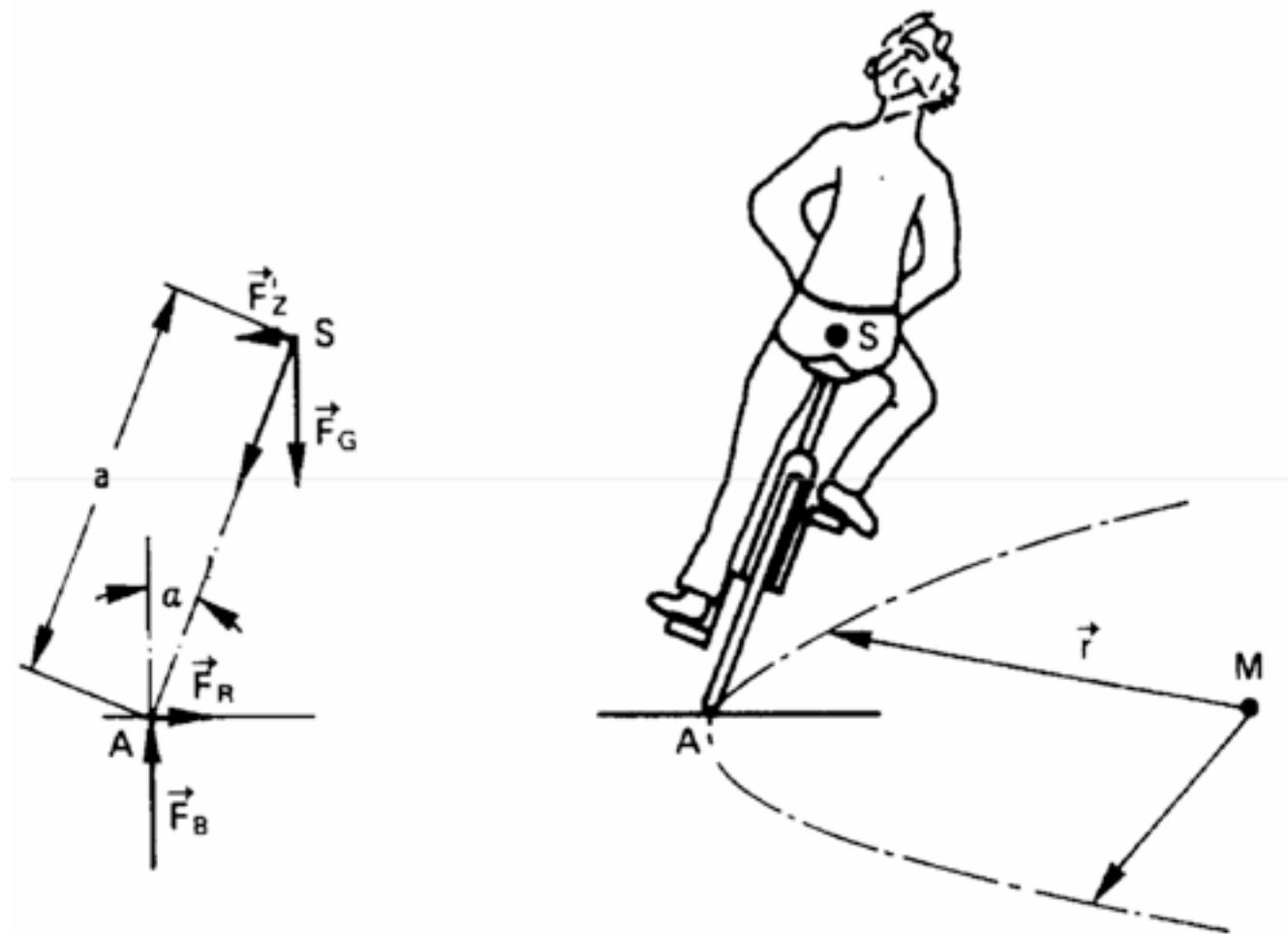
für kleine Winkel α gilt:

$$\frac{v^2}{r} = \alpha \cdot g$$

v : Geschwindigkeit

r : Bahnradius

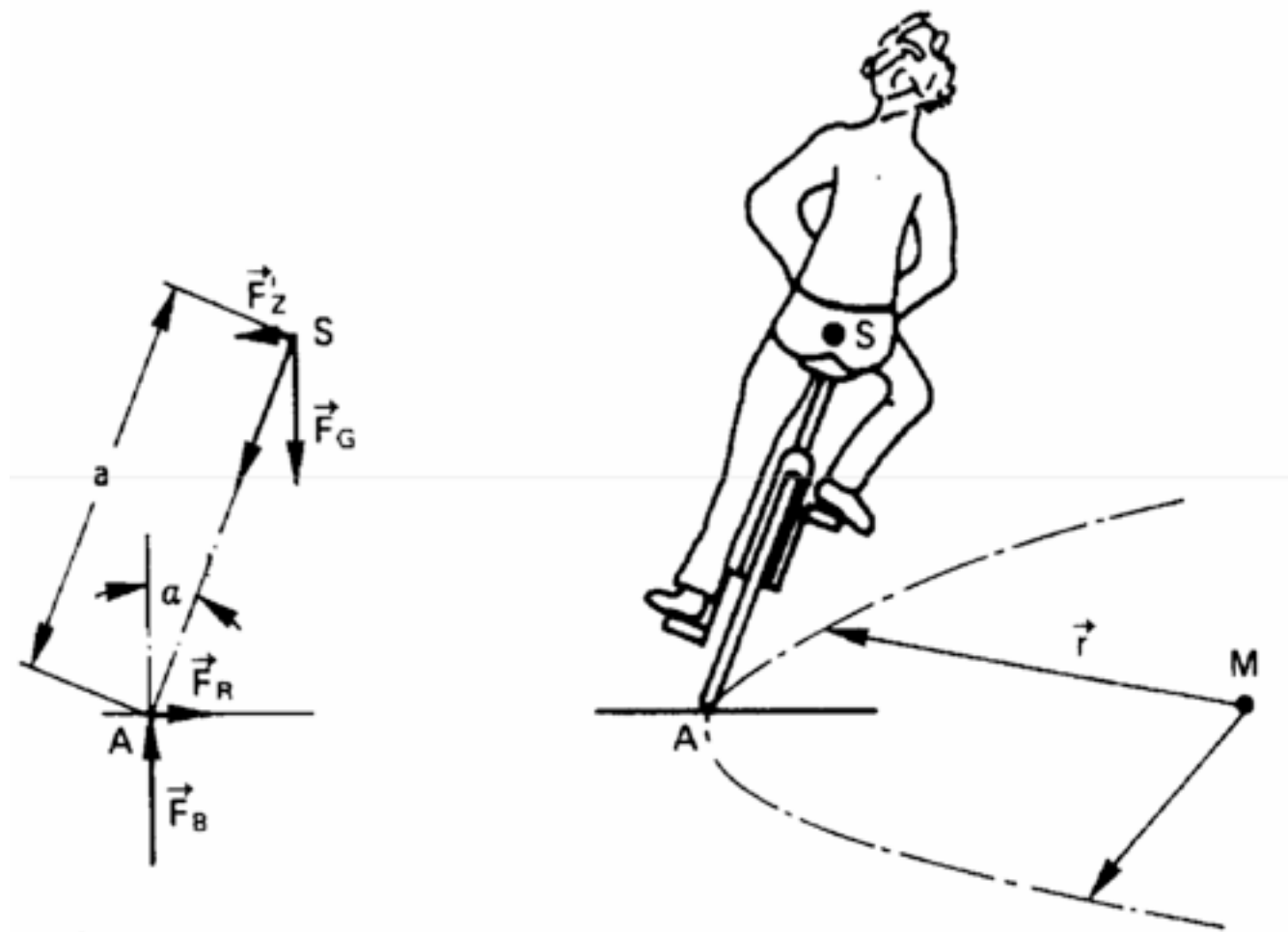
$g = 9.8 \text{ m/s}^2$



$$D_Z = m \cdot a \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \cos \alpha$$
$$D_G = m \cdot a \cdot g \cdot \sin \alpha$$

Stabilität beim Fahrradfahren

2. Kreisfahren



→ dynamisches
Gleichgewicht
leicht möglich:

$$v = 15 \text{ km/h}$$

$$(\alpha = 10^\circ, r = 10 \text{ m})$$

Stabilität beim Fahrradfahren

Kreisel-Effekt ?

Stabilität beim Fahrradfahren

Kreisel-Effekt ?

Drehimpulserhaltung + Kreisfahrt

→ resultierendes Drehmoment:

$$D_K = \frac{m_{\text{Rad}}}{r} v^2 R_{\text{Rad}}$$

→ Vergleich mit D_Z :
$$\frac{D_K}{D_Z} = \frac{m_{\text{Rad}}}{m} \frac{R_{\text{Rad}}}{a} \approx 0.01$$

(für $m_{\text{Rad}} = 2 \text{ kg}$, $m = 80 \text{ kg}$, $R_{\text{Rad}} = 35 \text{ cm}$, $a = 1 \text{ m}$)

Stabilität beim Fahrradfahren

Kreisel-Effekt ?

Drehimpulserhaltung + Kreisfahrt

→ resultierendes Drehmoment:

$$D_K = \frac{m_{\text{Rad}}}{r} v^2 R_{\text{Rad}}$$

→ Vergleich mit D_Z :
$$\frac{D_K}{D_Z} = \frac{m_{\text{Rad}}}{m} \frac{R_{\text{Rad}}}{a} \approx 0.01$$

(für $m_{\text{Rad}} = 2 \text{ kg}$, $m = 80 \text{ kg}$, $R_{\text{Rad}} = 35 \text{ cm}$, $a = 1 \text{ m}$)

→ Kreiselwirkung: 100-mal kleiner !

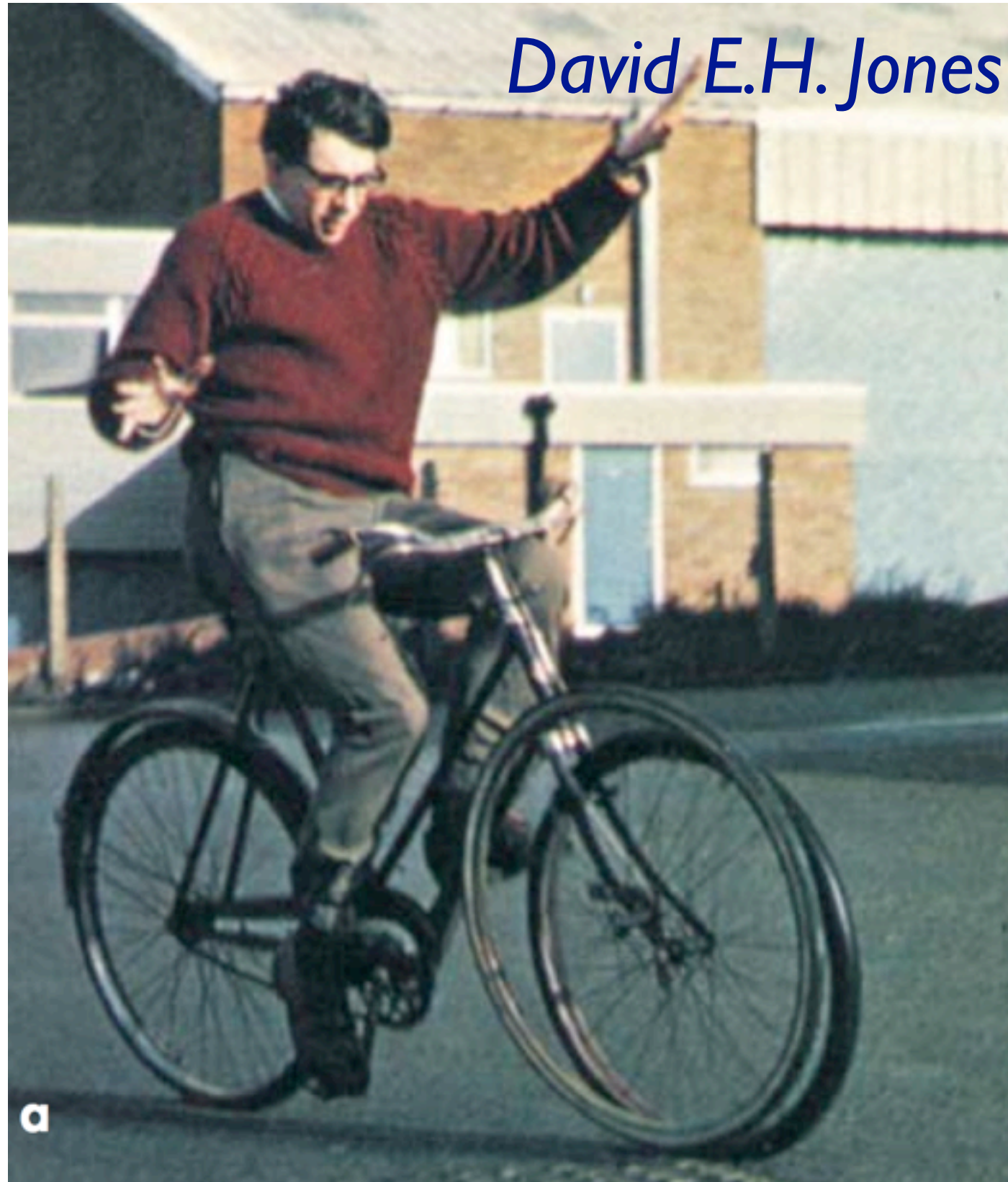
Stabilität beim Fahrradfahren

Experimente: “Unfahrbare Fahrräder” (URBs) von

- URB I:

Test der Kreiselwirkung

David E.H. Jones



Stabilität beim Fahrradfahren

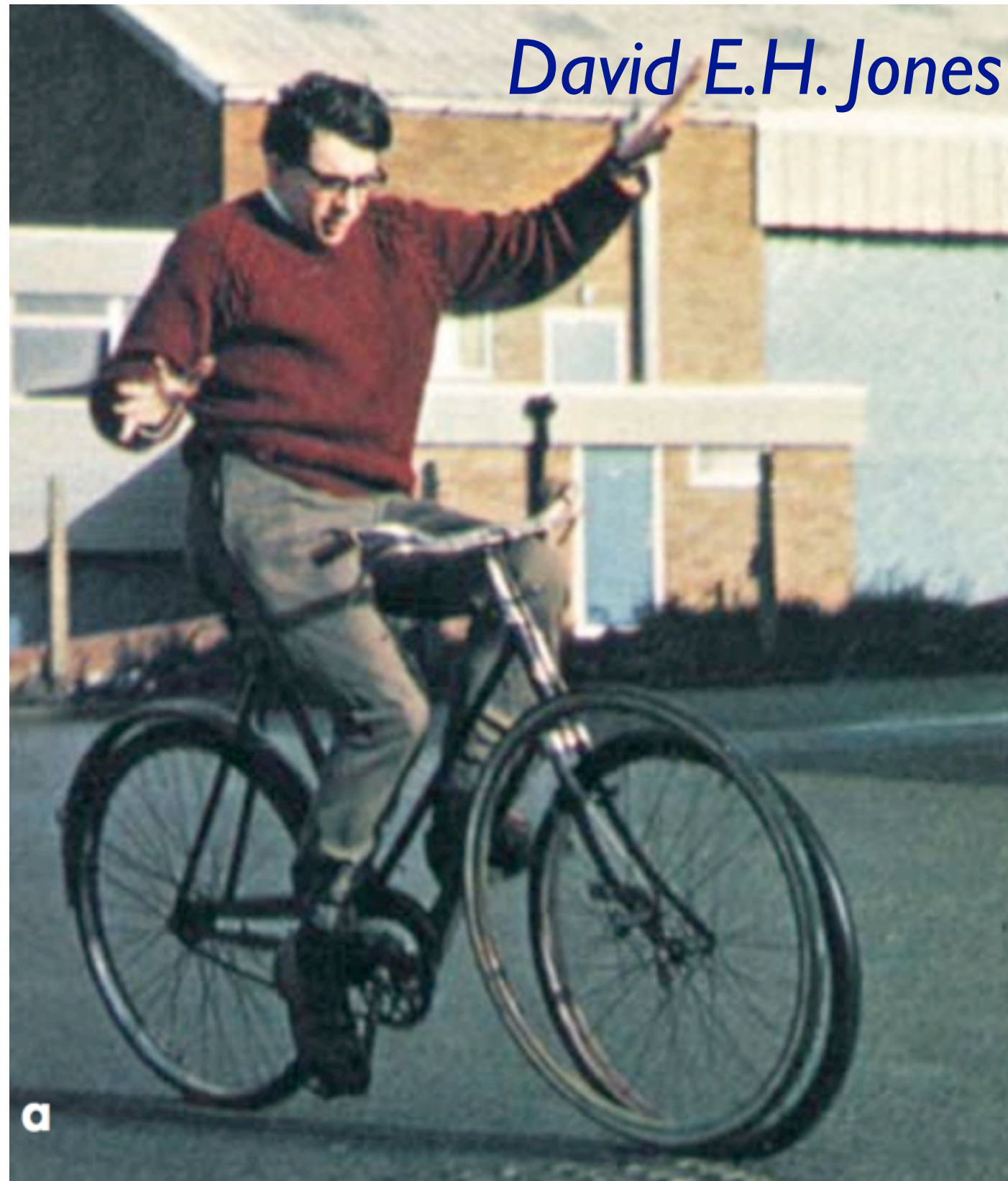
Experimente: “Unfahrbare Fahrräder” (URBs) von

- URB I:

Test der Kreiselwirkung

→ keine Auswirkung auf
Stabilität (mit Fahrer)

David E.H. Jones



Stabilität beim Fahrradfahren

aber: Kreiselwirkung wirkt selbststabilisierend

bei Lenkereinschlag

- erzwungene Präzessionsbewegung
- Rad neigt sich in den Fall
- Kurvenradius wird verkleinert
- dynamisches Gleichgewicht stellt sich ein

Stabilität beim Fahrradfahren

Kreiselwirkung wichtig beim Reifenspiel

$$\rightarrow D_K/D_Z = 1 !$$



Stabilität beim Fahrradfahren

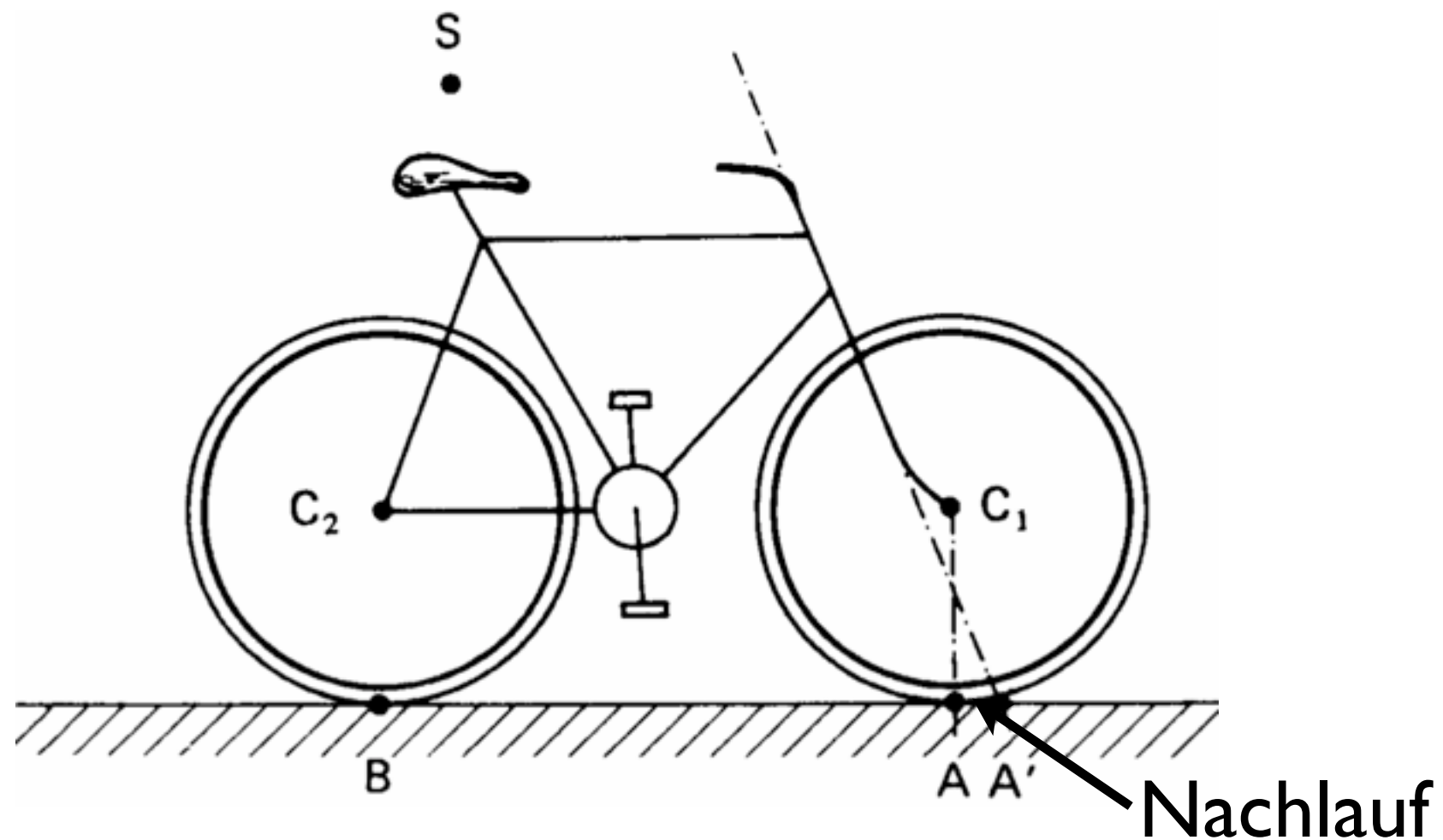
→ *Selbstjustierung* des Vorderrades durch

Nachlauf

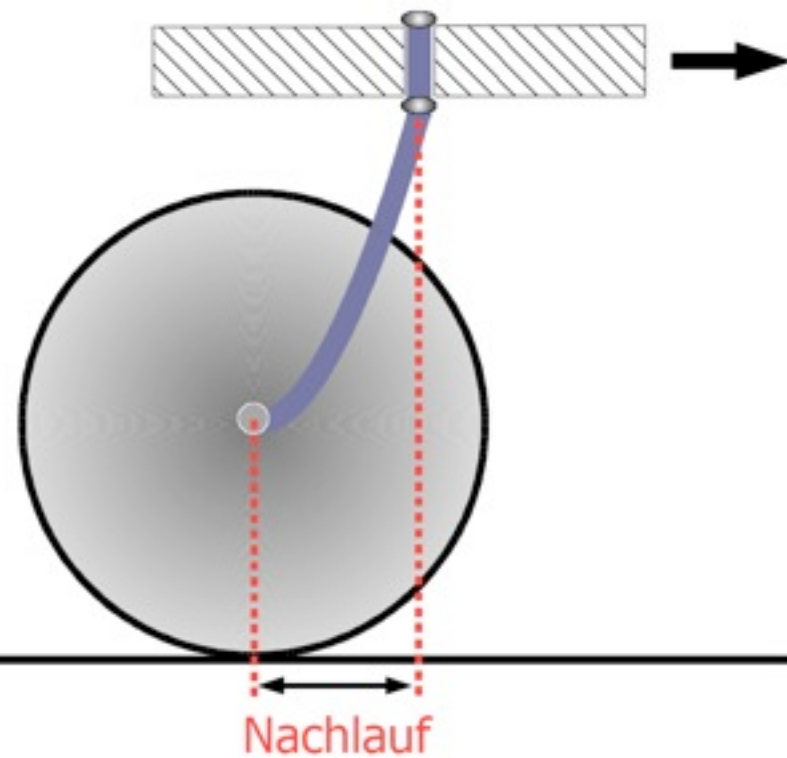
Stabilität beim Fahrradfahren

→ *Selbstjustierung* des Vorderrades durch

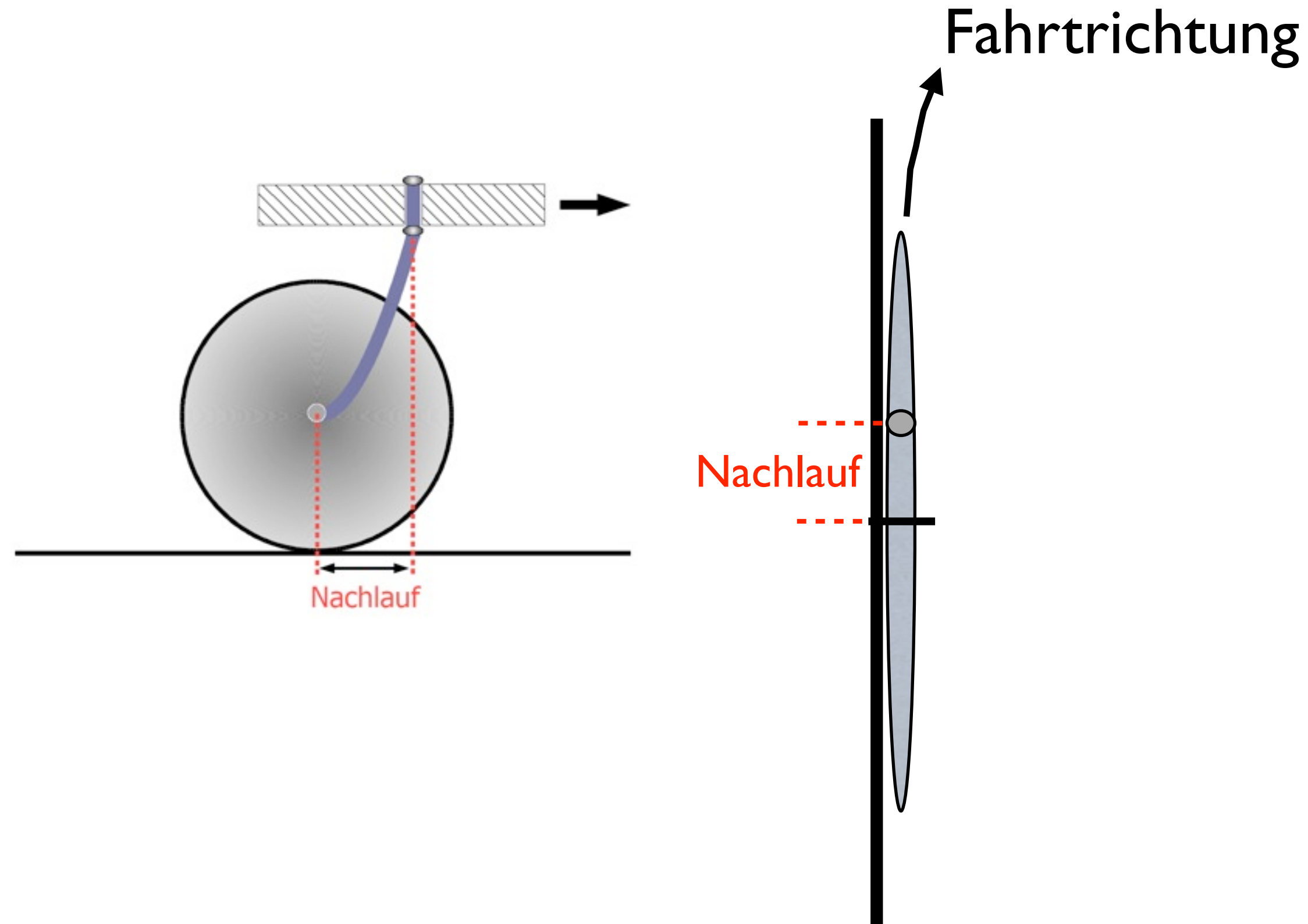
Nachlauf



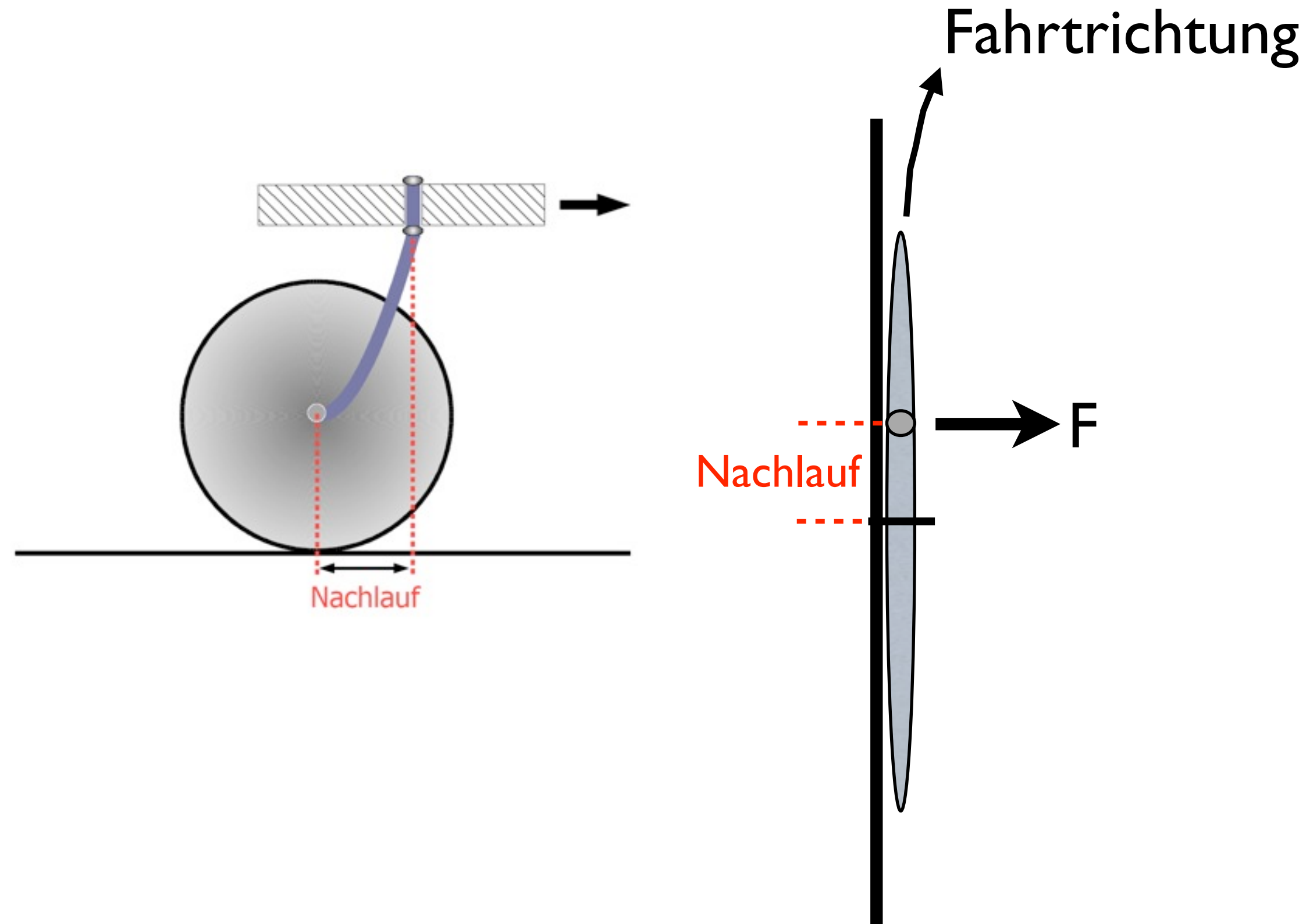
Stabilität beim Fahrradfahren



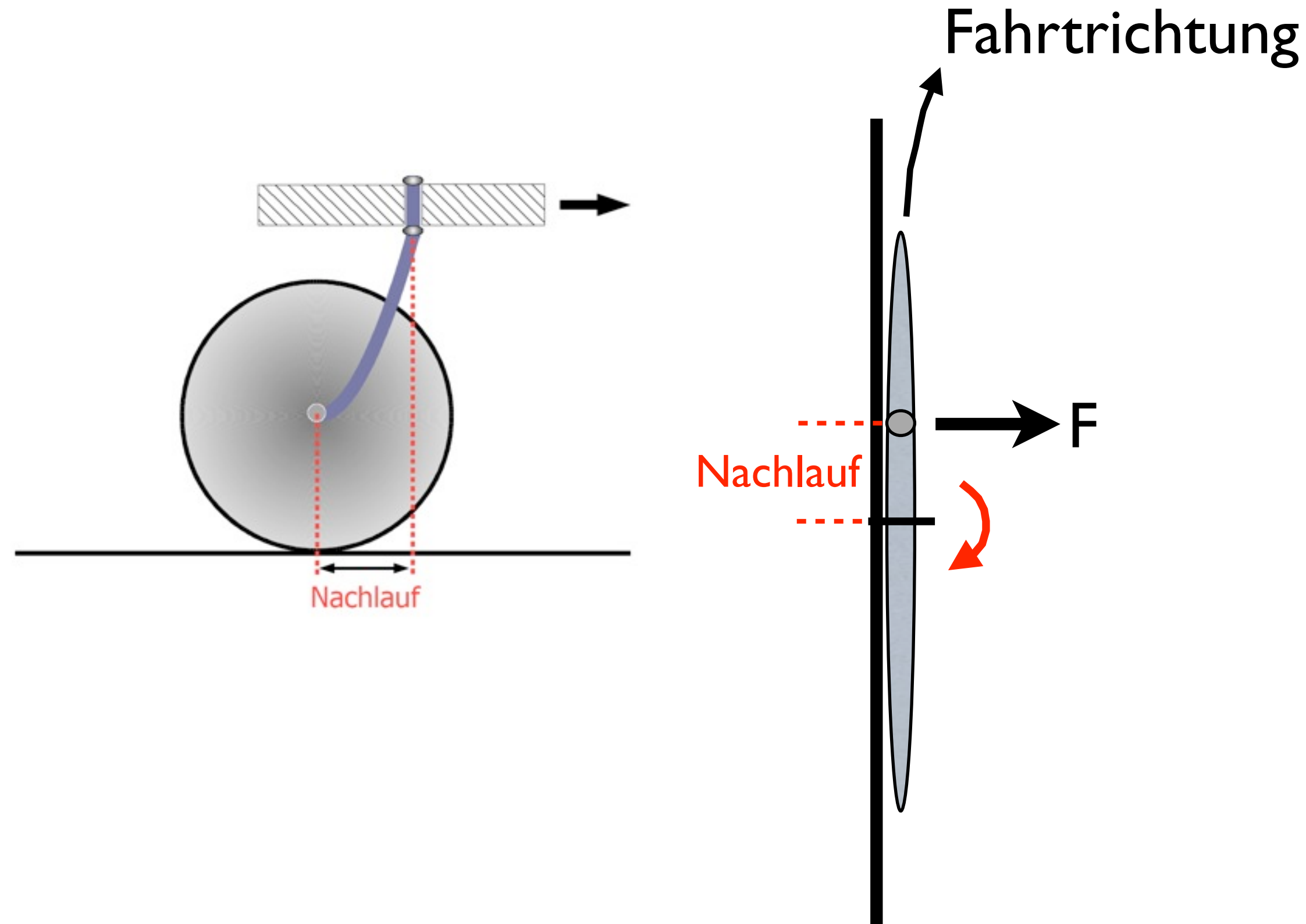
Stabilität beim Fahrradfahren



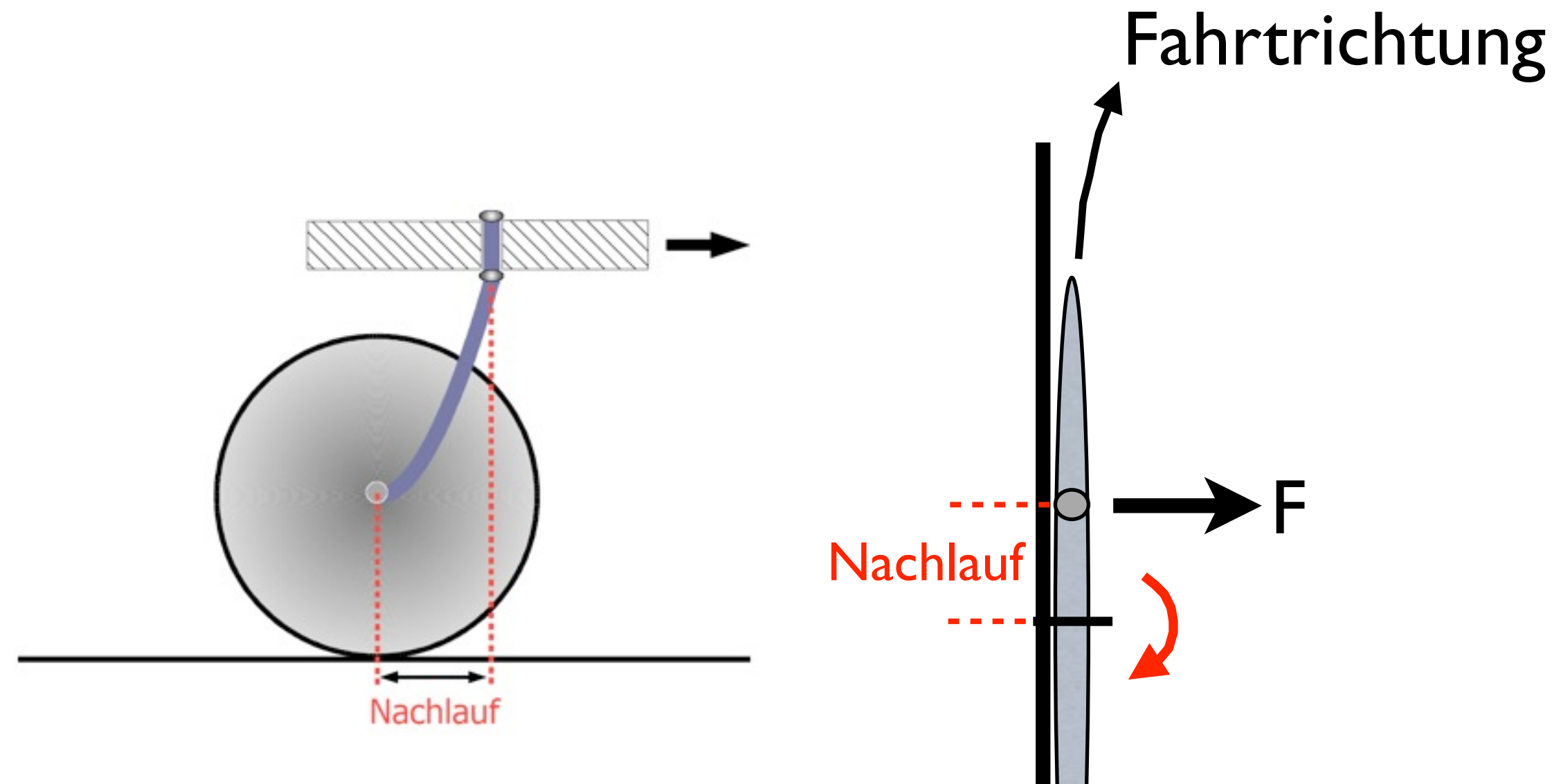
Stabilität beim Fahrradfahren



Stabilität beim Fahrradfahren



Stabilität beim Fahrradfahren



- ➔ Bahnradius wird kleiner
- ➔ Zentrifugalkraft wird größer
- ➔ **Selbststabilisierung**

Stabilität beim Fahrradfahren

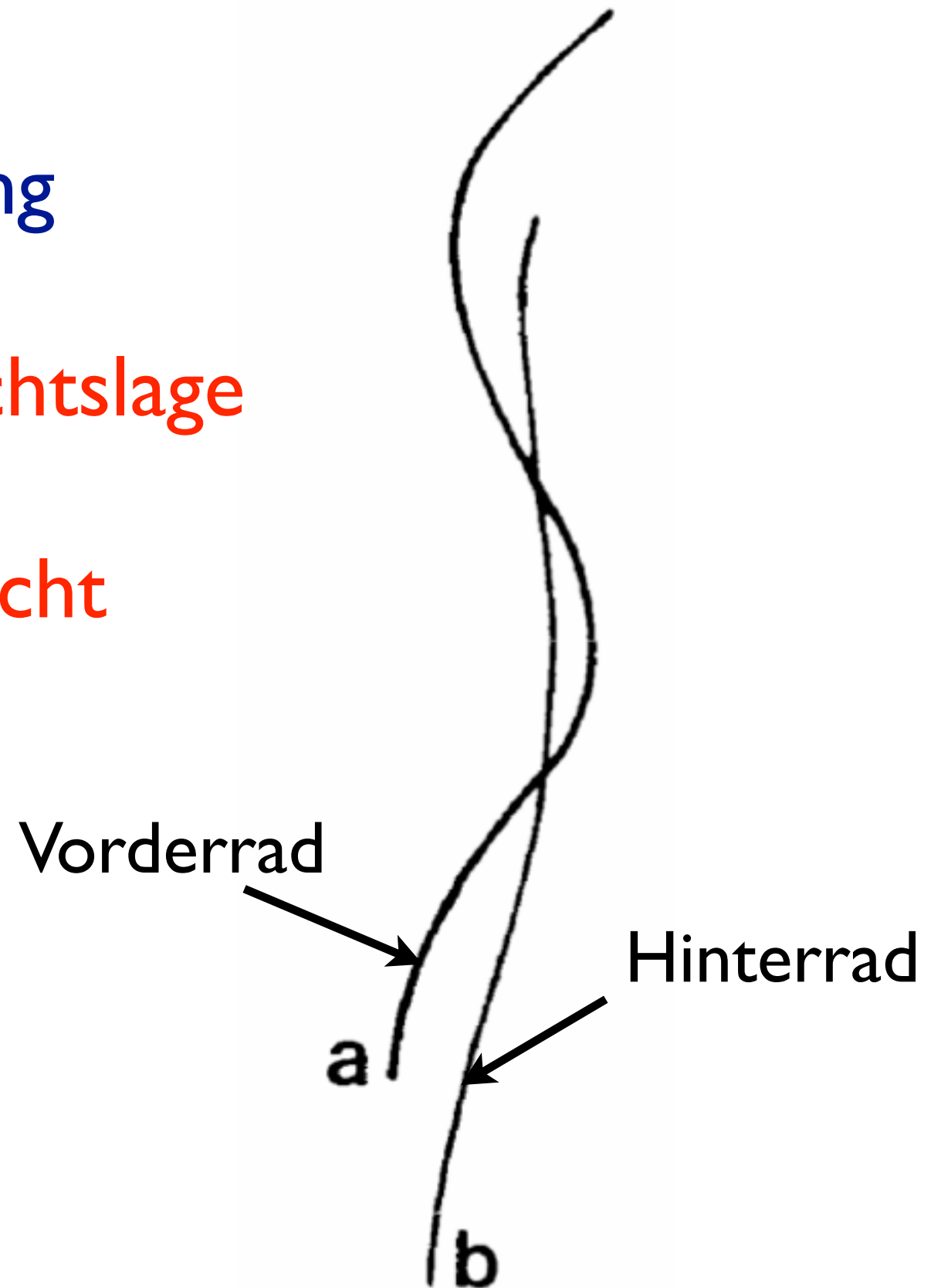


Andy Ruina et al., Cornell Universität

Stabilität beim Fahrradfahren

Resultierende Fahrbewegung

- Pendeln um Gleichgewichtslage
- dynamisches Gleichgewicht



Stabilität beim Fahrradfahren

→ Gegenteil:
fixierter Lenker

Stabilität beim Fahrradfahren

→ Gegenteil:
fixierter Lenker



Stabilität beim Fahrradfahren

→ Gegenteil:
fixierter Lenker



Stabilität beim Fahrradfahren

Demonstration: Selbststabilisierung

Stabilität beim Fahrradfahren



Demonstration: Selbststabilisierung

Stabilität beim Fahrradfahren

- URB III:
mit größerem Nachlauf



Stabilität beim Fahrradfahren

- URB III:
mit größerem Nachlauf
- sehr stabil aber schwierig zu steuern

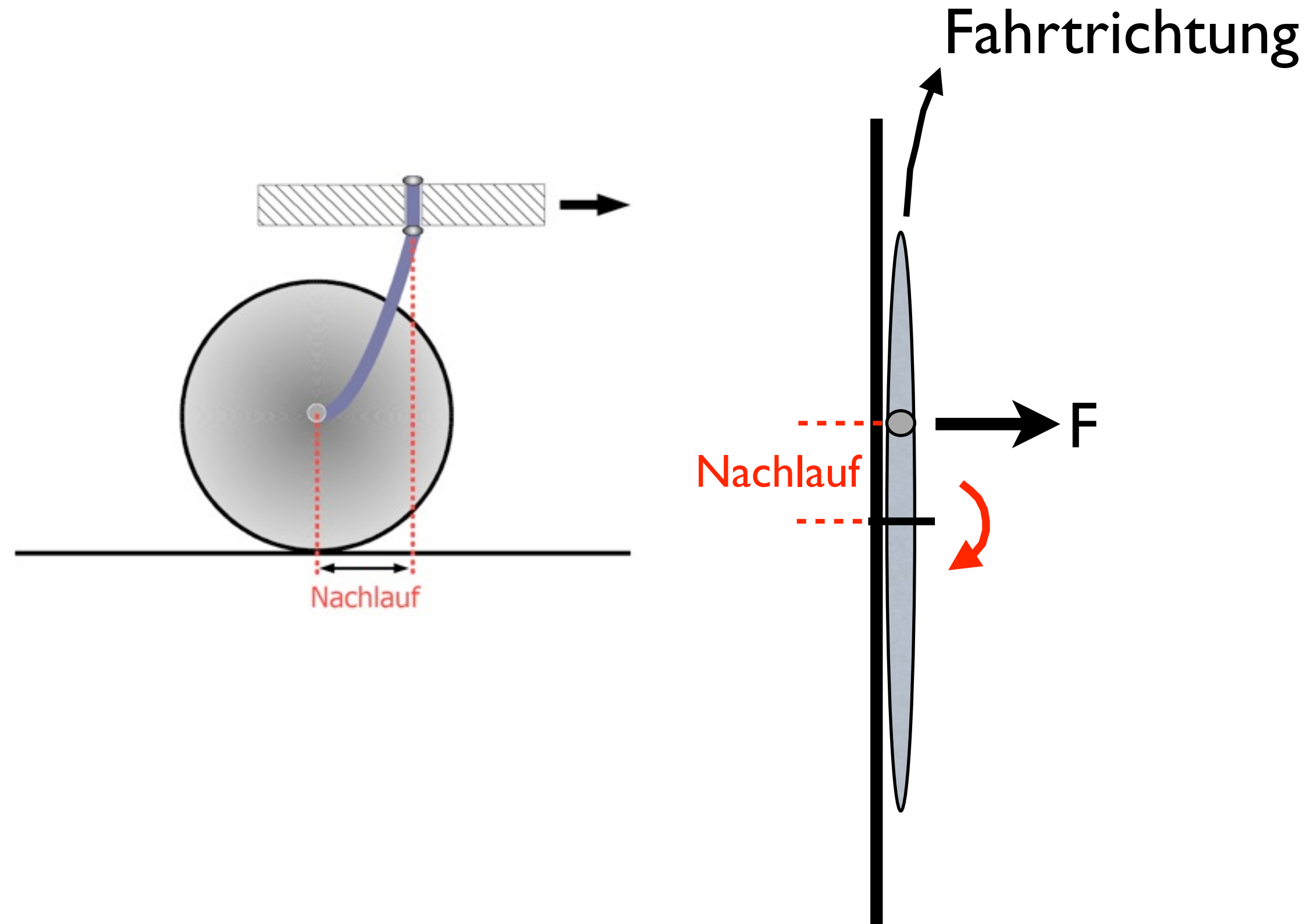


Stabilität beim Fahrradfahren

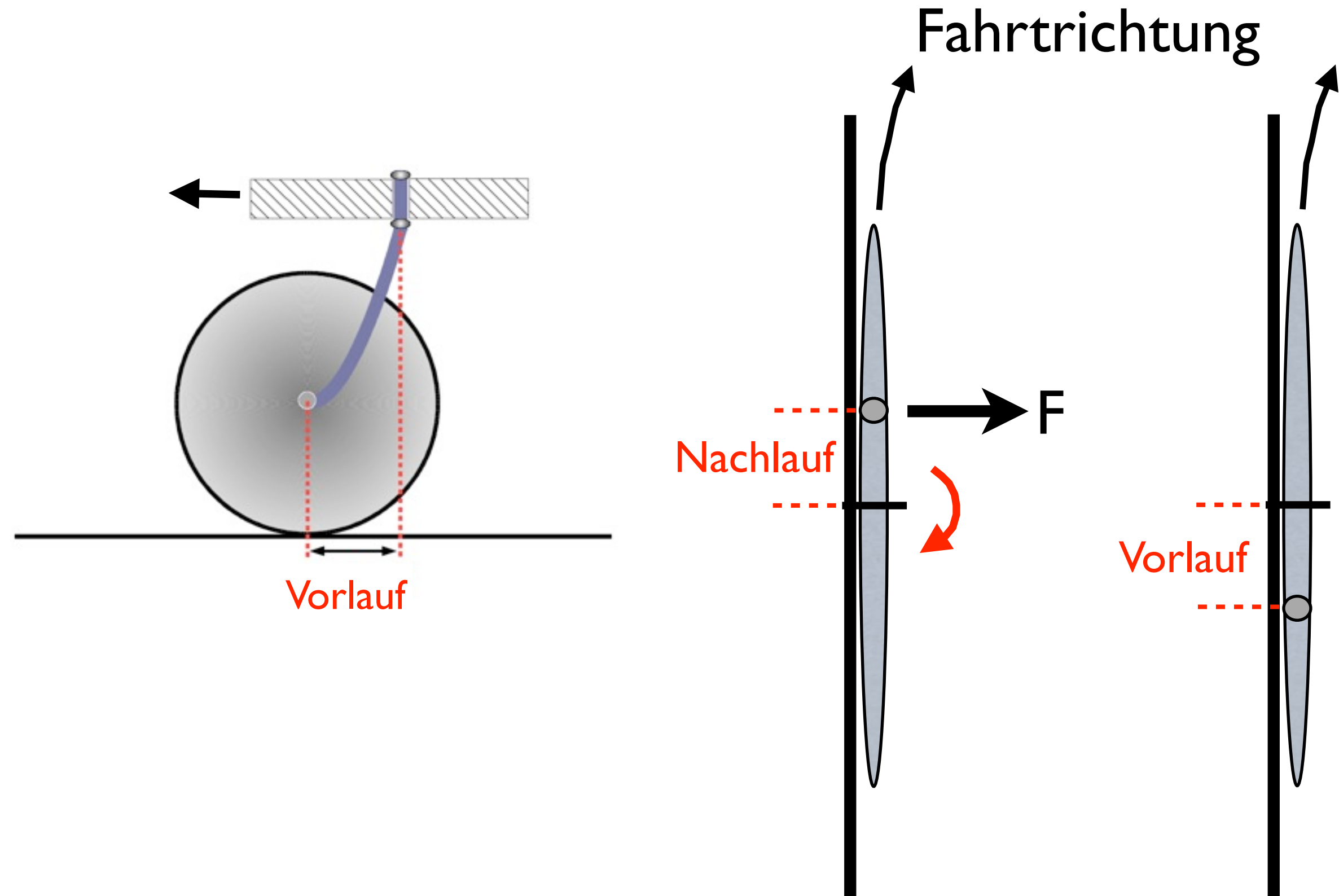
- URB IV:
mit **Vorlauf**



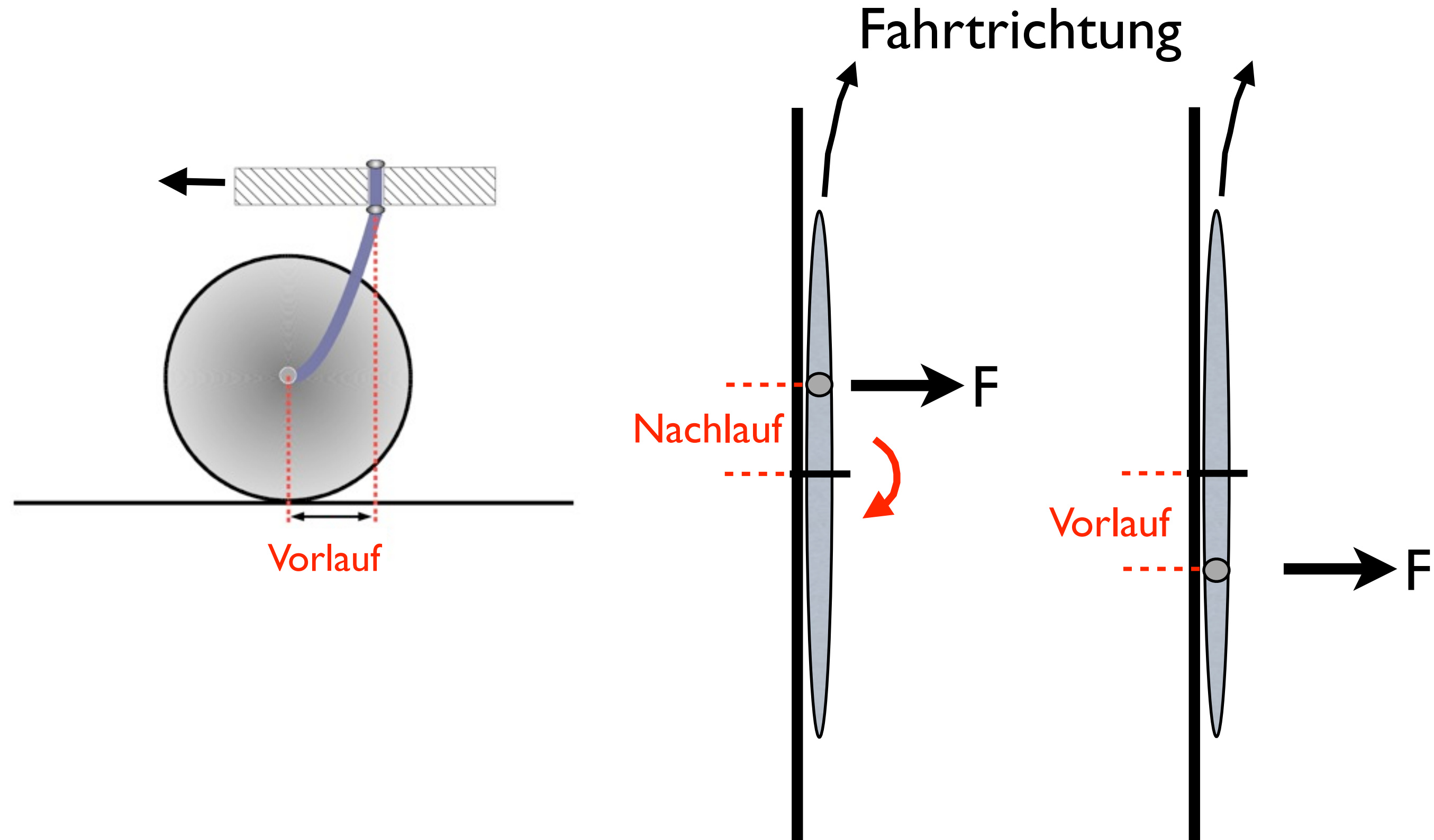
Stabilität beim Fahrradfahren



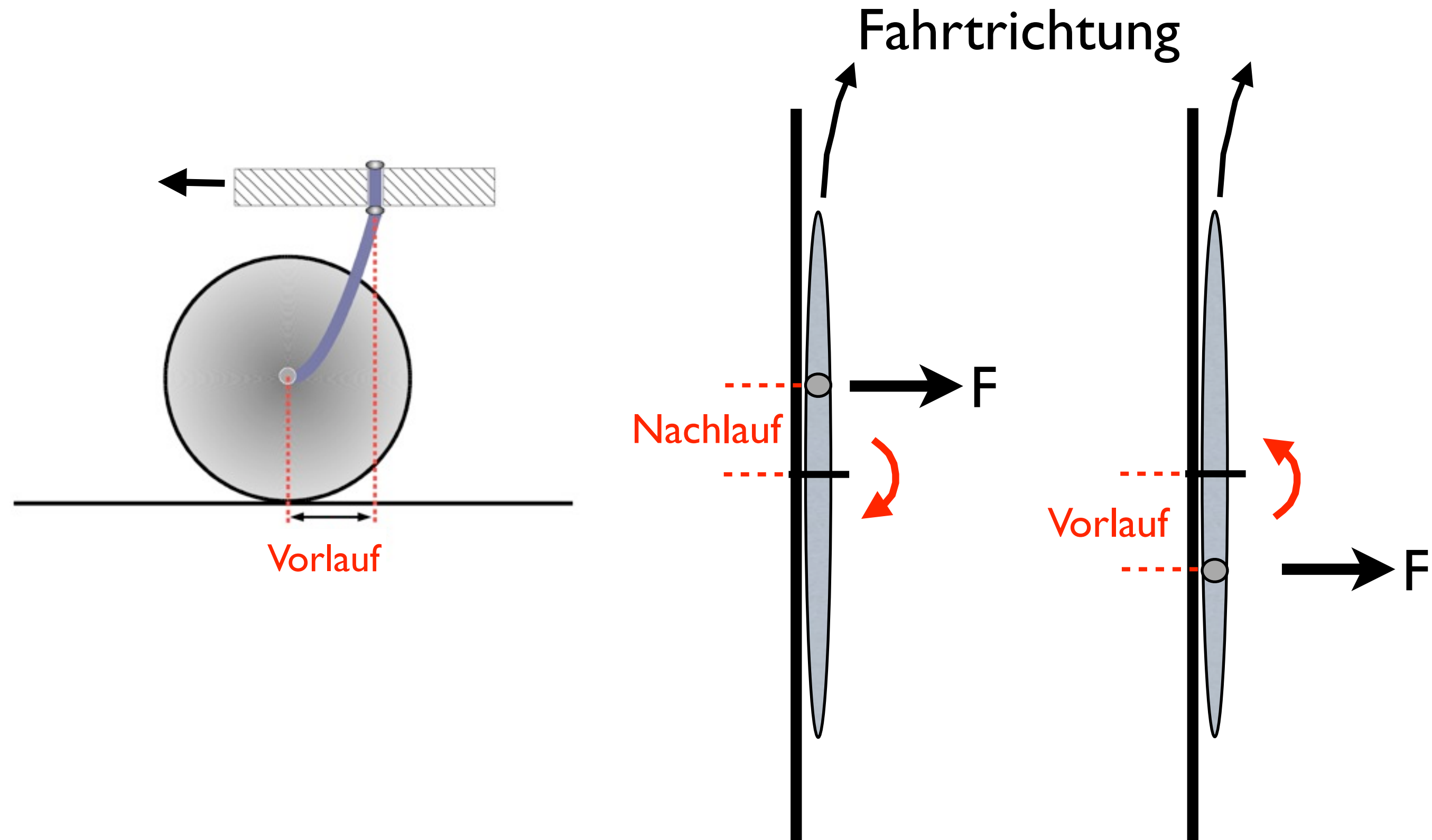
Stabilität beim Fahrradfahren



Stabilität beim Fahrradfahren



Stabilität beim Fahrradfahren



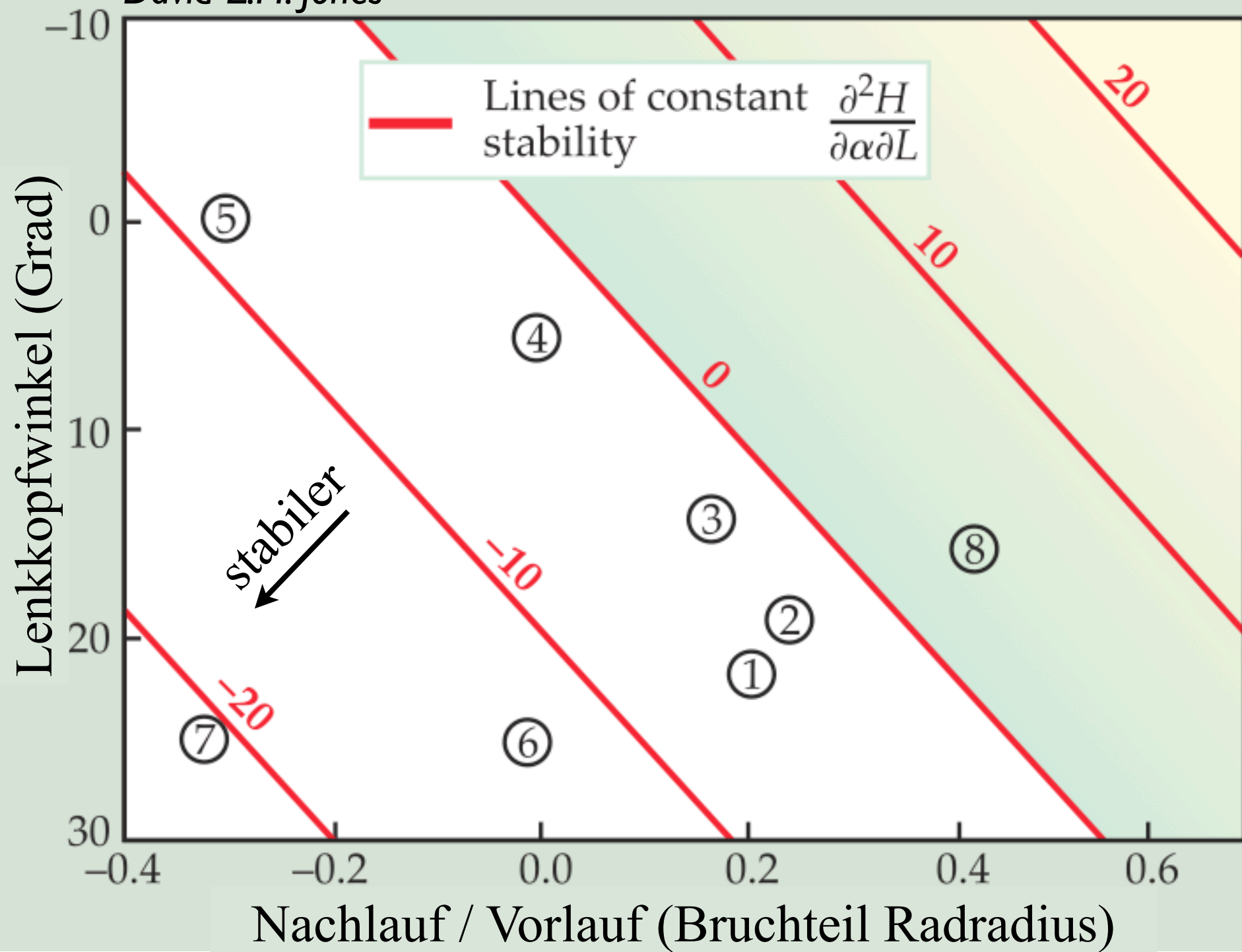
Stabilität beim Fahrradfahren

- URB IV:
mit **Vorlauf**
- sehr instabil /
fast nicht zu fahren



Stabilität beim Fahrradfahren

David E.H. Jones



Stabilitätsanalyse mit Schwerpunktversatz H

Stabilität beim Fahrradfahren

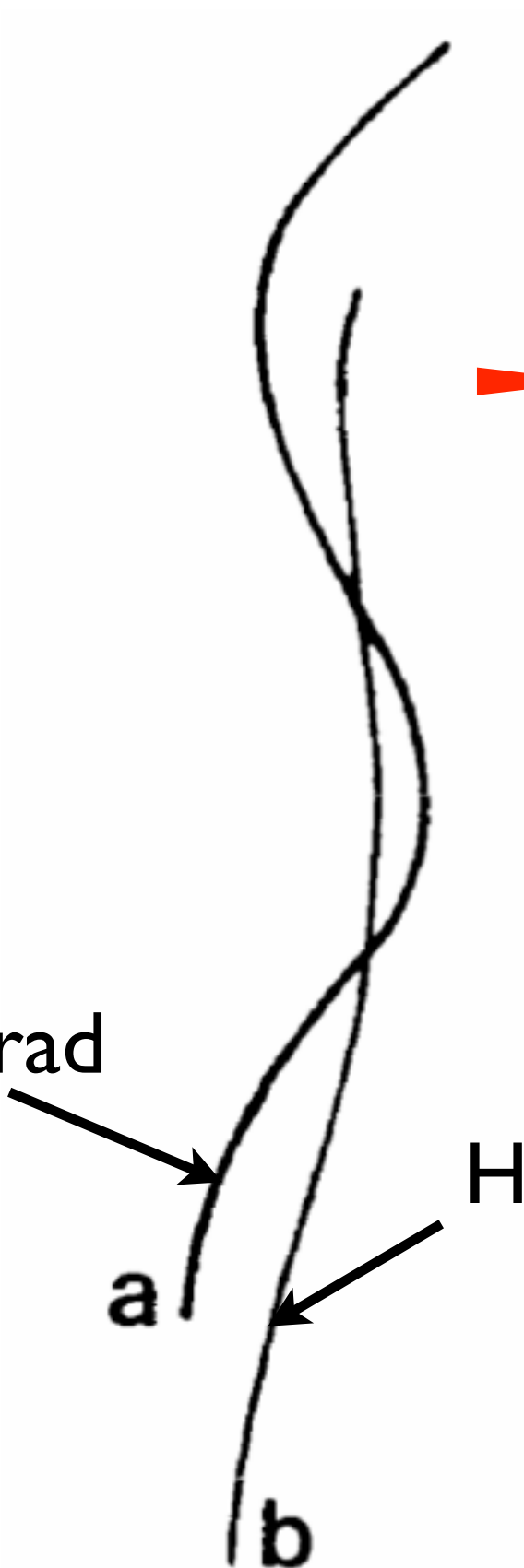
→ einfache
Physikalische Gesetze
helfen beim Fahrradfahren

Vorderrad

a

Hinterrad

b

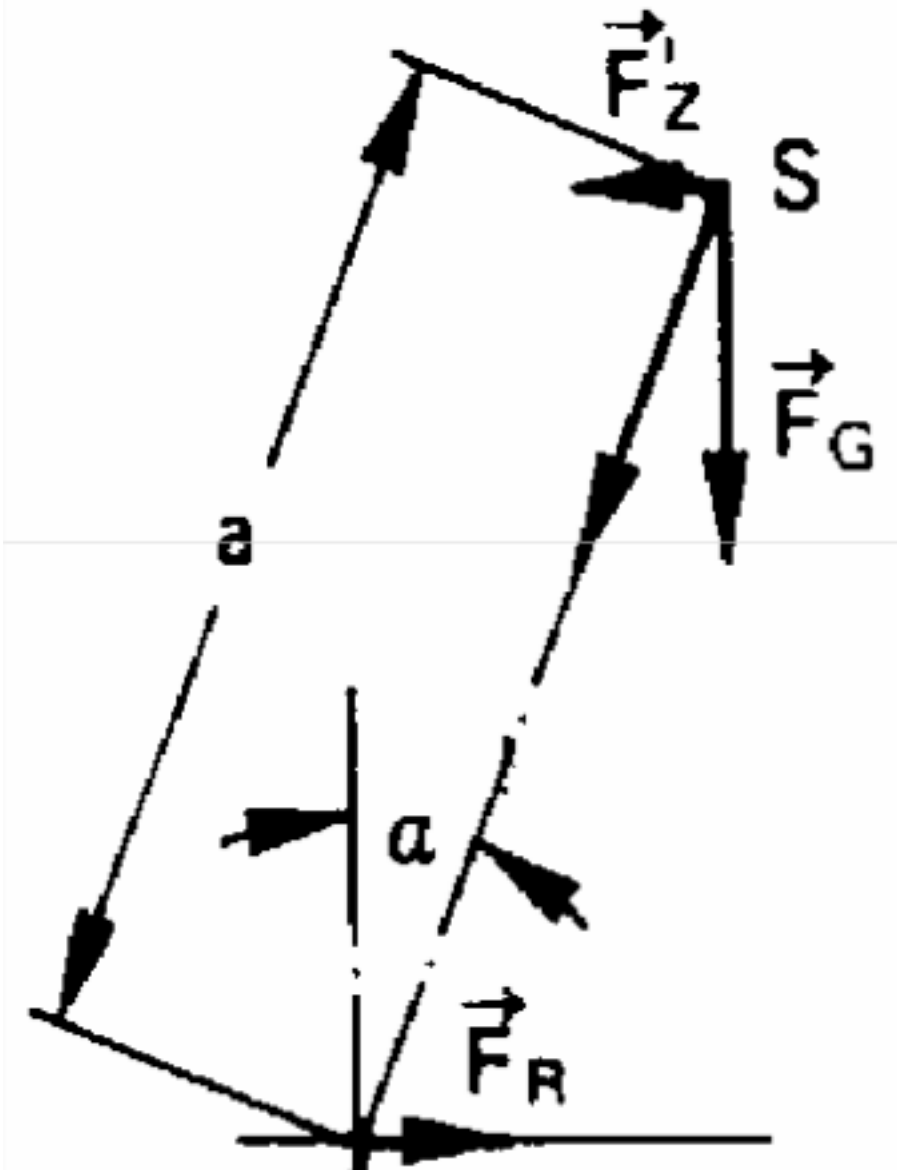






dämmlich!

Reibung



Reibung F_R verhindert Wegrutschen des Rads:

$$F_{R,\max} = \mu \cdot F_G$$

→ Reibungskoeffizient μ bestimmt Neigungswinkel α

$$\rightarrow \alpha_{\max} = \arctan(\mu)$$

Reibung

einige
Reibungskoeffizienten μ

Material	μ
Beton, Asphalt (trocken)	0,8 - 0,9
Beton, Asphalt (naß)	0,4 - 0,7
Rollsplit	0,6 - 0,7
Loser Sand	0,3 - 0,4
Eis	0,1 - 0,2

- optimale Straßenverhältnisse:

$$\mu = 0,9 \rightarrow \alpha_{\max} = 42^\circ$$

$$v = 25 \text{ km/h} \rightarrow r_{\min} = 7 \text{ m}$$

- Sand:

$$\mu = 0,3 \rightarrow \alpha_{\max} = 17^\circ$$

$$v = 25 \text{ km/h} \rightarrow r_{\min} = 17 \text{ m}$$

Reibung

einige
Reibungskoeffizienten μ

Material	μ
Beton, Asphalt (trocken)	0,8 - 0,9
Beton, Asphalt (naß)	0,4 - 0,7
Rollsplit	0,6 - 0,7
Loser Sand	0,3 - 0,4
Eis	0,1 - 0,2

- optimale Straßenverhältnisse:

$$\mu = 0,9 \rightarrow \alpha_{\max} = 42^\circ$$

$$v = 25 \text{ km/h} \rightarrow r_{\min} = 7 \text{ m}$$

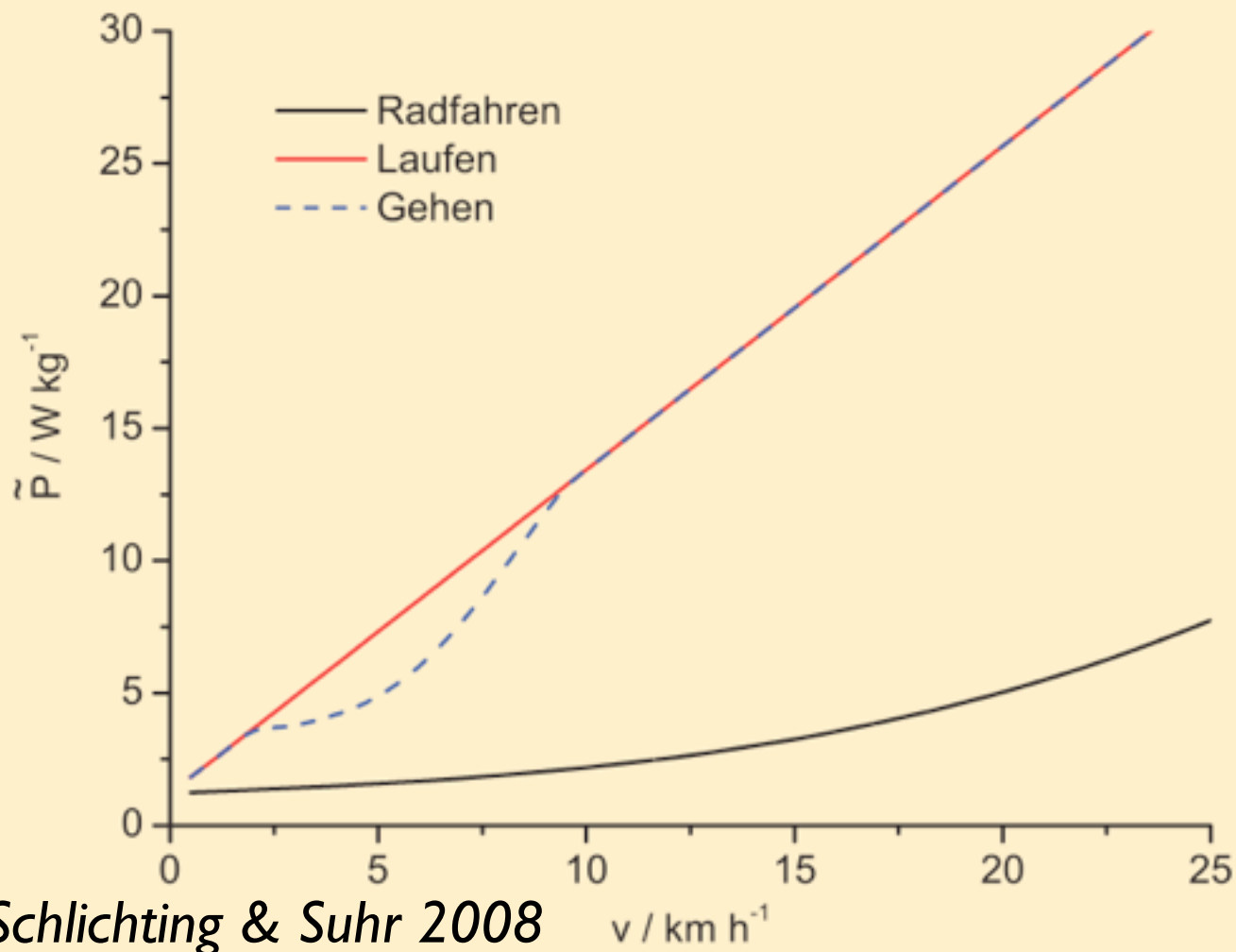
- Sand:

$$\mu = 0,3 \rightarrow \alpha_{\max} = 17^\circ$$

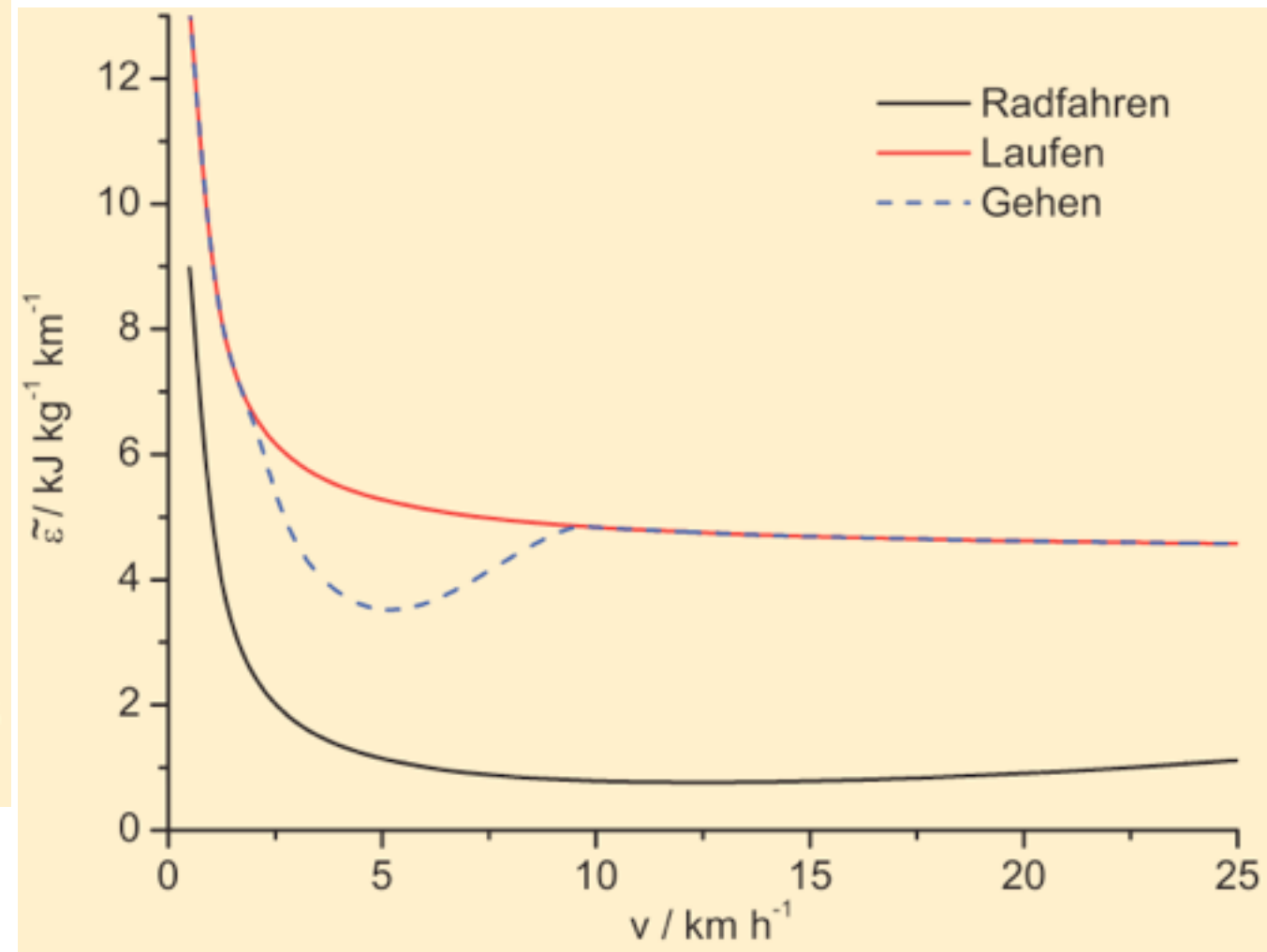
$$v = 25 \text{ km/h} \rightarrow r_{\min} = 17 \text{ m}$$

→ Reibungskoeffizient μ bestimmt Kurvenradius $r_{\min}$

Energetik



spezifischer Leistungsbedarf



spezifische Energiekosten

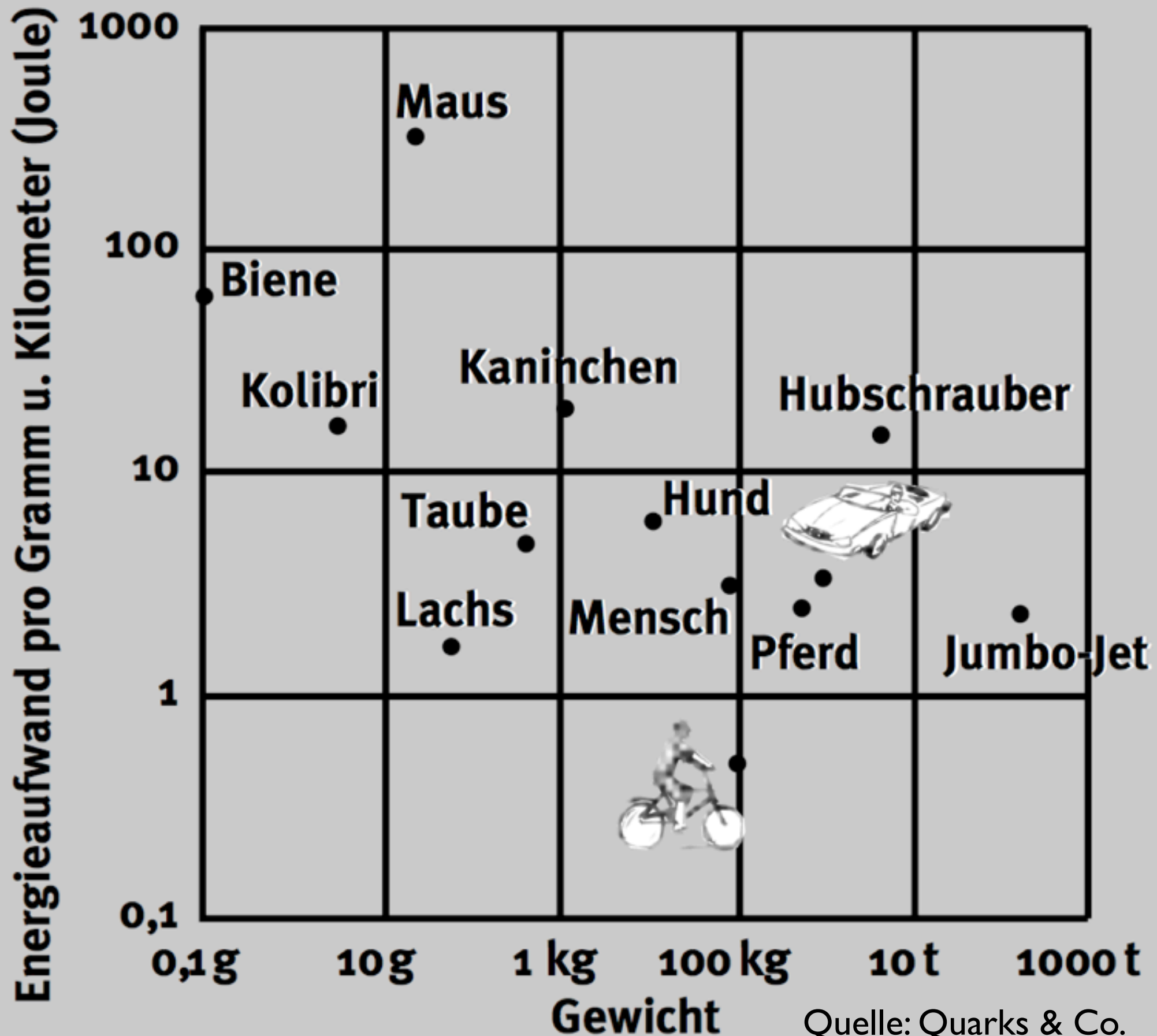
Energetik



auch mit Lasten:
sehr niedrige
Energiekosten !



Energieverbrauch bei der Fortbewegung



Fazit

Fahren Sie Rad!

- ➔ Sie schonen die Umwelt
- ➔ Sie bleiben fit

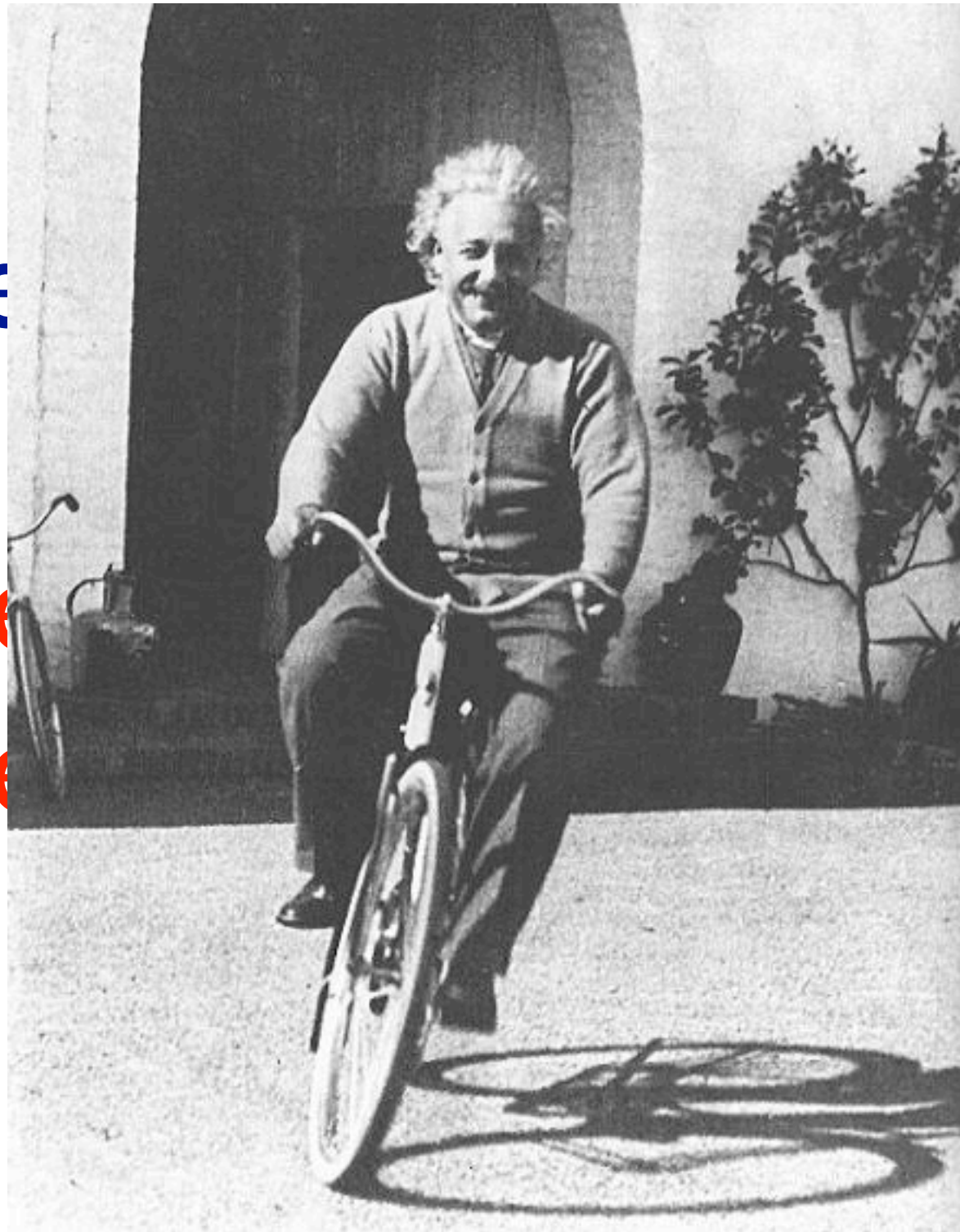
Fazit

Fahre

→ Sie

→ Sie

nwelt



→ Sie haben Spaß