

# Einheiten

SI Einheiten (Basis: u.a. kg, m, sec, A, ...)

Maxwell-Gleichungen:

$$\textcircled{1} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\frac{1}{m} [E] = \frac{1}{[\epsilon_0]} [P] \Rightarrow [E] = \frac{m}{[\epsilon_0]} [P] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

$$[B] = \frac{S}{m} [E] = \frac{Ns}{Cm} = \frac{N}{Am} \equiv T \text{ (Tesla)}$$

$$[P] = \frac{C}{m^3}$$

$$[j] = [\epsilon_0 E] \frac{1}{\text{sec}} = \frac{m}{S} \frac{C}{m^3} = \frac{C}{m^2 S} = \frac{A}{m^2}$$

Gauß - cgs System

Basis: c (Zentimeter), g (Gramm), s (Sek.)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$c = 2.998 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$$

$$[\epsilon] = \frac{cm}{s} \frac{1}{c} [B] \Rightarrow [\epsilon] = [B]$$

$$[B] = G = \text{Gauß}$$

$$[B^2] = \frac{\text{erg}}{cm^3} = \text{Energiedichte}$$

$$[e] = \frac{G}{cm} = \frac{esu}{cm^3}$$

$$[j] = \frac{G}{s} = \frac{esu}{cm^2 s} = \frac{\text{stat A}}{cm^2}$$

Basis : c - g - s (G)

abgeleitete Einheiten:

$$1 \text{ erg} = 1 \text{ g} \left( \frac{\text{cm}}{\text{s}} \right)^2 = 10^{-7} \text{ kg} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 10^{-7} \text{ J}$$

$$1 \text{ dyn} = 1 \text{ g} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 10^{-5} \text{ N}$$

$$1 \text{ esu} = \sqrt{1 \text{ dyn cm}} = 1 \left( \text{g} \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \right)^{1/2}$$

$$= 10 \left( \frac{\text{C}}{\text{cm s}^{-1}} \right)^{-1} \text{ C} \approx 3.336 \times 10^{-10} \text{ C}$$

$$1 \text{ statA} = 1 \text{ esu/s} = 3.336 \times 10^{-10} \text{ A}$$

$$1 \text{ statV} = 1 \text{ dyn cm esu}^{-1} \approx 300 \text{ V}$$

# Vektoranalysis

1) Partielle Ableitungen

betrachte

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

z.B.  $\phi(\vec{x}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho(\vec{x})$ ,  $T(\vec{x})$  Dichte, Temperatur

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nach  $x_1$  partiell differenzierbar

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \rightarrow \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots)}{\Delta x_1}$$

existiert

partielle Ableitung:

Ableitung nach einer Variablen ( $x_1$ )  
 + andere Variablen konstant  
 ( $x_2 = \text{konst.}$ ,  $x_3 = \text{konst.}$ , ...)

⇒ Änderung der Funktion  $f$  in  
 Richtung  $x_1$

$$\textcircled{1} \quad f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} = c_x x + c_y y + c_z z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = c_x \quad (\vec{c} = \text{konst.})$$

$$\textcircled{2} \quad \phi(\vec{x}) = -\frac{1}{r} = \phi(r); \quad r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad 008$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}_{1/r} 2x \\ &= \frac{x}{r^3} \end{aligned}$$

Schreibweisen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \partial_x \phi; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \partial_i \phi$$

$$x_i = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

Höhere partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left( \dots \left( \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \right)$$

z.B.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Wenn  $f$   $n$ -mal stetig differenzierbar:

$\Rightarrow$  Reihenfolge spielt keine Rolle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$7.3. f(x, y) = x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2) = \frac{\partial}{\partial y} (2x) = 2x$$

Schreibweise:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_x \partial_y f \quad ; \quad \partial_x^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

# Totale Differential

analog zu 1D Taylor Entwicklung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i f}{dx^i} (\Delta x)^i$$

$$\approx f(x) + f'(x) \Delta x + \dots$$

$\Rightarrow$  lineare Näherung

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$$

$\Rightarrow$  Differential der Funktion  $f$

$$df \equiv f' dx$$

für  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots)$$

$$\approx f(x_1, x_2, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots$$

$\Rightarrow$  totale Differential

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

kompakte Darstellung

$$df = \partial_i f dx_i$$

# Der Gradient

Richtungsableitung eines skalaren Feldes

$$\phi, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Physik: Potentiale "verursachen" Kräfte  $\vec{F}$

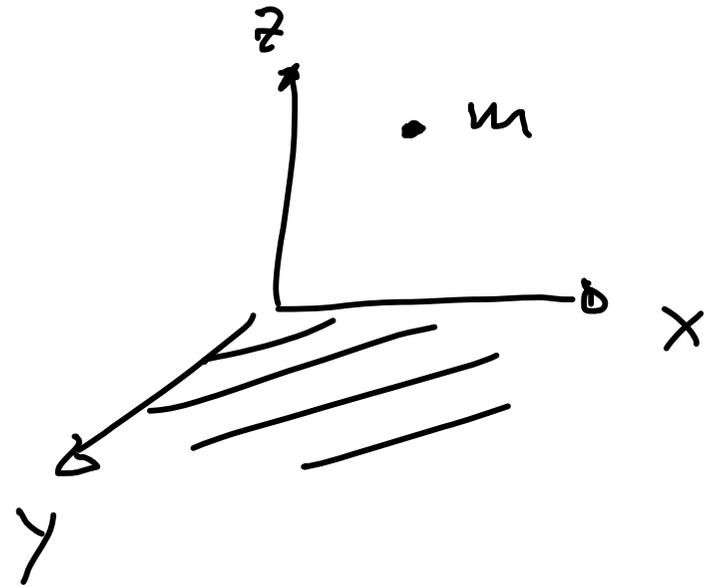
$\vec{F}$ : vektorielle Größe: erzeugt durch  $\phi$

z. B. Gravitationspotential nahe Erdoberfläche

$$\phi(\vec{x}) = gz$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -m \partial_z \phi \vec{e}_z$$

$$= mg \vec{e}_z$$



Allgemein

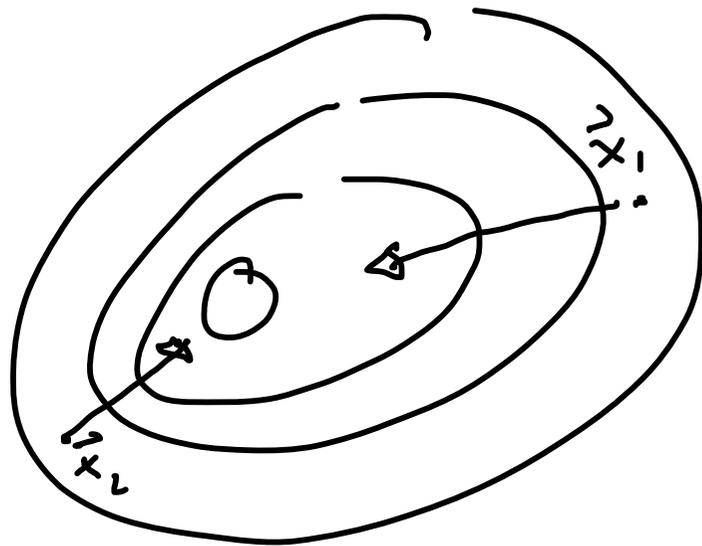
$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{grad}(f) \equiv \underset{\substack{\vec{\nabla} \\ \text{Nabla}}}{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{vektorielle} \\ \text{Größe} \end{array}$$

Differentialoperator "grad" / "Nabla"  $\vec{\nabla}$

$$\text{grad}(f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

partielle Ableitungen eines skalaren Feldes  $f$   
nach den Koordinaten  $x_i$  in Richtung  
 $\vec{e}_{x_i}$



grad: zeigt in Richtung  
des steilsten Anstiegs

grad: linearer Operator

$$\vec{\nabla}(f_1 + f_2) = \vec{\nabla}f_1 + \vec{\nabla}f_2$$

Produkt + Kettenregel:

$$\vec{\nabla}(f_1 \cdot f_2) = f_1 \vec{\nabla}f_2 + (\vec{\nabla}f_1) f_2$$

$$\phi = \phi(r) \Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \frac{d\phi}{dr} \frac{\vec{x}}{r} \quad \text{zeigt in Richtung } \vec{x}$$

$$\phi = -\frac{GM}{r} \Rightarrow \vec{g} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{GM}{r^2} \vec{r}$$

$$\left[ \vec{\nabla}\phi(r) = \frac{\partial\phi}{\partial r} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} r \\ \frac{\partial}{\partial y} r \\ \frac{\partial}{\partial z} r \end{pmatrix} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \right]$$

Eigenschaften von grad

- totale Differential

$$df = (\vec{\nabla}f) \cdot d\vec{x} \quad ; \quad d\vec{x} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

- Niveauflächen; Äquipotentialflächen  
 $f(\vec{x}) = \text{const.}$  ;  $\phi(\vec{x}) = \text{const.}$

$$\Rightarrow df = 0 \quad \text{für Niveauflächen}$$

$$= (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{x}$$

wenn  $d\vec{x}$  in Niveaufläche:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f \perp d\vec{x}$$

$\Rightarrow$   $\text{grad}(f)$  steht senkrecht auf  
 Niveauflächen von  $f = \text{const}$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} \quad ; \quad \text{Normaleneinheitsvektor}$$

auf Äquipotentialfläche  
 $f = \text{const}$

## Richtungsableitung

$$\vec{x} = \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix}$$

Parametrisierung der  
Bahnkurve mit  
 $\lambda$

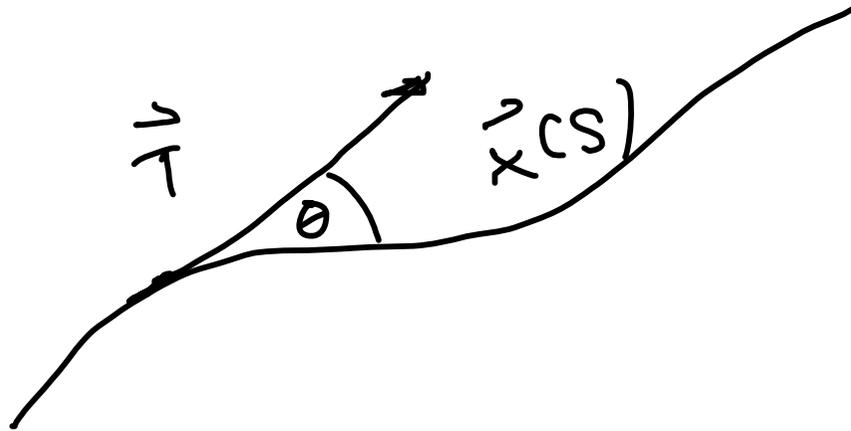
z.B.  $\lambda = t$  Zeit

$\lambda = s$  Bogenlänge:  $ds^2 = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

Richtungsableitung von  $f$  entlang  $\vec{x}$

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds} = (\vec{\nabla} f) \cdot \frac{d\vec{x}}{ds}$$

$$= (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{T} \quad ; \quad \vec{T} = \frac{d\vec{x}}{ds} \quad \text{Tangenten einheitsvektor}$$



$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{r} \\ &= |\vec{\nabla} f| \cos \theta \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{df}{ds}$  maximal wenn  $\vec{\nabla} f \parallel \vec{r}$

z.B.  $\phi(\vec{x})$  ; Potential

$$\frac{d}{dt} \phi = (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{v} \quad ; \quad \vec{v} \perp \vec{\nabla} \phi$$

$\Rightarrow$  max. zeitliche Änderung von  $\phi$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \phi \parallel \vec{v}$$

$\vec{F} \cdot \vec{v}$  : Leistung

z.B.  $\vec{F} = -m \vec{\nabla} \left( -\frac{GM}{r} \right) = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$

$\Rightarrow$  max. Leistung wenn  $\vec{v} \parallel \vec{F}$



Kreisbahn:  $\vec{v} \perp \vec{r} \Rightarrow$  keine Leistung

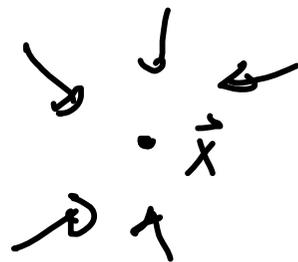
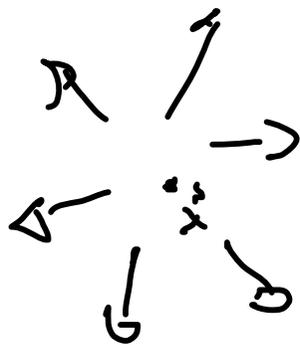
# Die Divergenz

$\text{grad}(f)$ : Richtung (Vektor) der Änderung  
eines skalaren Feldes  $f$

Änderung eines Vektorfeldes (Strömungsfeld)

$\text{div}(\vec{v})$ :  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\vec{v}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Skalare Größe quantifiziert "Auseinander-  
streben" von Vektoren an einem Punkt  $\vec{x}$



bei Strömungsfeld:  
Quelle, Quells-  
dichte, Senke

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(\vec{x}) \\ v_y(\vec{x}) \\ v_z(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v}) &\equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Skalarprodukt:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \neq \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$

Rechenregeln:  $\operatorname{div}$ : linearer Operator

$$\vec{\nabla} \cdot (a \vec{u} + b \vec{v}) = a \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + b \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (a, b = \text{const})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x})) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{v} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R})$$

## Laplace Operator

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f \\ &= \underbrace{(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)}_{\Delta} f \end{aligned}$$

$\Delta$  : Laplace Operator

Beispiele:

$$\cdot \vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{x} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3$$

allgemein,  $x^i$  Ortsvektor im  $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \text{div}(\vec{x}^i) = \# = n$  Dimensionen

$$\begin{aligned} \vec{g} &= - \frac{GM(r)}{r^2} \hat{r} & ; & \quad M(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho & ; & \quad \rho = \text{const} \\ &= - \frac{4\pi}{3} G \rho r \hat{r} & ; & \quad \hat{r} = \frac{\vec{x}}{r} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} & & \quad \text{Masse -} \\ & & & & & \quad \text{dichte} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{g} &= -4\pi G \rho & ; & \quad \vec{g} = -\vec{\nabla} \phi \\ &= +\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \phi) \end{aligned}$$

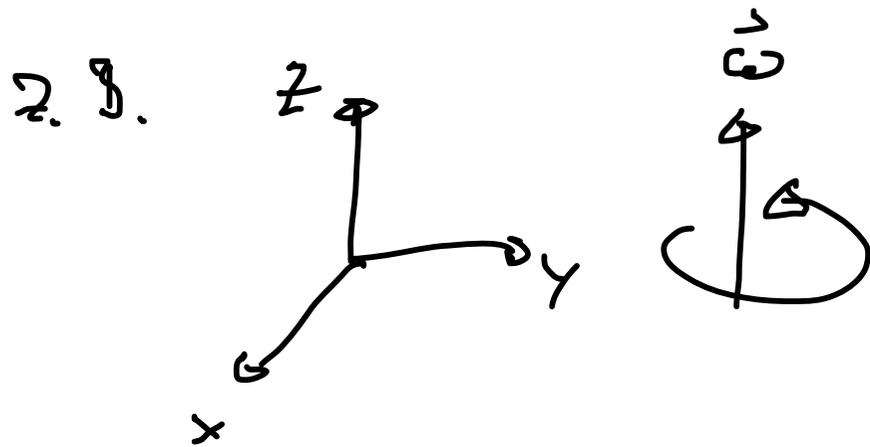
$$\Rightarrow \boxed{\Delta \phi = 4\pi G \rho}$$

Poissongleichung für  
Gravitationspotential  $\phi$

# Die Rotation

$\text{div}(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$  Skalarprodukt mit einem Vektor

$\vec{\nabla} \times \vec{v}$  : Vektorprodukt mit partiellen Ableitungen



$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} = 2\vec{\omega}$$

$\Rightarrow \text{rot}(\text{Strömungsfeld}) = 2 \times \text{Winkelgeschwindigkeit}$   
am  $\vec{x}$

rot: Linearer Operator

$$- \text{rot}(a\vec{v} + b\vec{w}) = a\vec{v} \times \vec{v} + b\vec{v} \times \vec{w}$$

$$- \vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = f\vec{v} \times \vec{v} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{v}$$

$$- \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0}$$

Rotation eines Gradientenfeldes ist wirbelfrei

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi)_x = \partial_y (\partial_z \phi) - \partial_z (\partial_y \phi)$$

$= 0$  wenn  $\phi$  2x stetig differenzierbar

$\Rightarrow$  auch Umkehrschluss:

$$\text{wenn } \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \\ \Rightarrow \vec{V} = \vec{\nabla} \phi$$

$\vec{V}$ : Gradientenfeld

z.B.  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi_{\text{Coulomb}}$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$$

Wirbelfelder sind  
quellfrei

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) &= \partial_x (\partial_y V_z - \partial_z V_y) + \partial_y (\partial_z V_x - \partial_x V_z) \\ &\quad + \partial_z (\partial_x V_y - \partial_y V_x) \\ &= (\partial_y \partial_z - \partial_z \partial_y) V_x + \dots = 0 \end{aligned}$$

⇒ Umkehrschluss

$$\begin{aligned} \text{wenn } \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{v} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned}$$

$\vec{v}$  : quellenfrei

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  keine mag. "Monopole"  
mag. Punktladungen

⇒  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  ;  $\vec{A}$  : Vektorpotential

— wenn  $f = f(|\hat{x}|) = f(r)$

$$\vec{\nabla} \times (f \hat{x}) = 0 = f \underbrace{\vec{\nabla} \times \hat{x}}_0 + \underbrace{(\vec{\nabla} f) \times \hat{x}}_{\parallel \hat{x}} = 0$$

$\Rightarrow$  Spezialfall eines Gradientenfeldes

$$\vec{f}_x = \vec{\nabla} \phi(r)$$

$$\begin{aligned} - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{v})) &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v} \end{aligned}$$

vgl. Entwicklungssatz

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

## Weitere Rechenregel

$$\bullet \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\bullet \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \\ + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\bullet \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \\ + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (A_x \partial_x + A_y \partial_y + A_z \partial_z) \vec{B} \\ = \begin{pmatrix} (A_x \partial_x + A_y \partial_y + A_z \partial_z) B_x(\vec{x}) \\ \vdots \\ (A_x \partial_x + A_y \partial_y + A_z \partial_z) B_z(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

# Integration $\mathbb{R}^3$

- Linien-, Weg-, Kurvenintegrale
- Flächen-, Flußintegrale
- Volumenintegrale

## 1) Wegintegrale

z.B. Arbeit = Kraft  $\times$  Weg

Allgemein:

$$L = \int_a^b \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$$

$\vec{v}$ : Vektorfeld

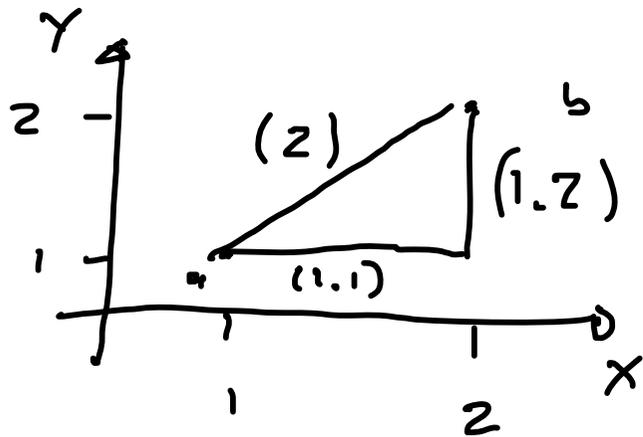
$d\vec{\ell}$ : infinitesimale  
Verschiebungs-  
vektor

für praktische Anwendung:

$$d\vec{\ell} = d\vec{x} \quad ; \quad \text{verwende Ortsvektor } \vec{x}$$

z.B.  $\vec{v}(\vec{x}) = y^2 \vec{e}_x + 2x(y+1) \vec{e}_y$

$$a = (1, 1, 0) \quad ; \quad b = (2, 2, 0)$$



$$\vec{v} \cdot d\vec{x} = y^2 dx + 2x(y+1) dy$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{l.1: } y = 1 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow \int_1^2 dx = 1 \\ \text{l.2: } x = 2 \Rightarrow dx = 0 \\ \Rightarrow \int_1^2 4(y+1) dy = 10 \end{array} \right\} \mathcal{L}_{(1)} = 11$$

Weg(z) :  $x, y$  nicht unabhängig

$$y = x \Rightarrow dy = dx ; \text{Allgem.: } y = Y(x, z)$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot d\vec{x} = x^2 dx + 2x(x+1)dx$$

$$\Rightarrow L_{(z)} = \int_1^2 dx [3x^2 + 2x] = x^3 + x^2 \Big|_1^2 = 10$$

$\Rightarrow \vec{v}(\vec{x})$  ; kein konservatives Feld

$\Rightarrow$  Integral ist wegabhängig

$$\text{Kundweg : } \oint \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_{(1)} - \int_{(2)} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$  konservatives Feld :

geschlossenes Wegintegral verschwindet

## Parametrisierung

mit  $\vec{x} = \vec{x}(\lambda)$  : z.B.  $\lambda = t$  Zeit

$\Rightarrow d\vec{x} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda} d\lambda = \vec{v} d\lambda$   $\leftarrow$  z.B.  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$   
 = s Bogenelement

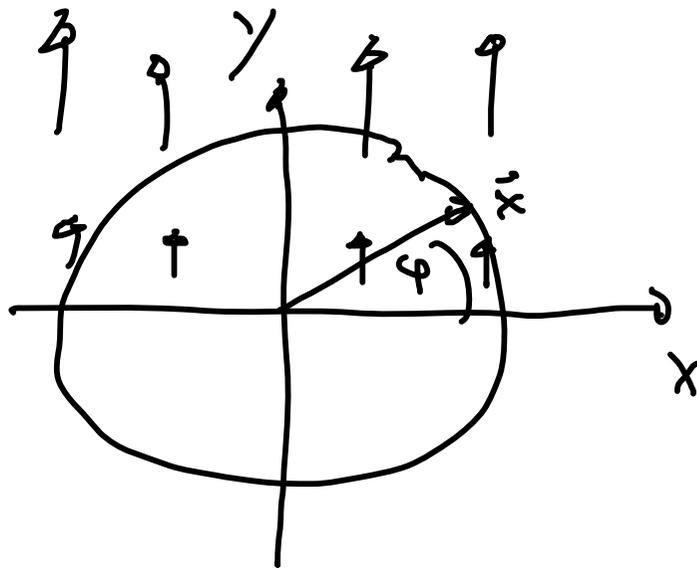
$$\Rightarrow \int_{\vec{x}(\lambda_0)}^{\vec{x}(\lambda_1)} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\lambda} d\lambda$$

Parameterdarstellung des Wegintegrals

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\varphi} = -\sin\varphi + y \cos\varphi = \sin\varphi (\cos\varphi - 1)$$



$$W = \oint \vec{r} \cdot d\vec{x}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi (\cos\varphi - 1)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \vec{F}$  : konservatives Kraftfeld :  $\vec{F} = \vec{\nabla} \left( x + \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \right)$   
Gradientenfeld

Wegintegrale über Gradientenfelder

$$\vec{V}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \phi : \phi(\vec{x}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_a^b \vec{V} \cdot d\vec{x} = \int_a^b (\vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{x} = \int_a^b d\phi = \phi(b) - \phi(a)$$

(totales Differential:  $d\phi = (\vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{x}$ )

$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{V} \cdot d\vec{x} = 0}$$

Jedes Wegintegral über einen geschlossenen Weg eines Gradientenfeldes verschwindet  
 bzw. Wegintegral zwischen zwei Punkten ist unabhängig vom Weg

Umkehrung:

Wenn  $\oint \vec{V} \cdot d\vec{x} = 0$  für jede geschlossene Kurve, dann folgt:  $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$

Bemerkung

Fundamentalsatz der Differentialrechnung

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = \int_a^b f' dx = f(b) - f(a)$$

= "Integrationsregel": Integral einer Ableitung in einem Intervall ist durch die Funktion an den Endpunkten des Intervalls gegeben

⇒ analog mit Gradient:  $f' \rightarrow \vec{\nabla} f$

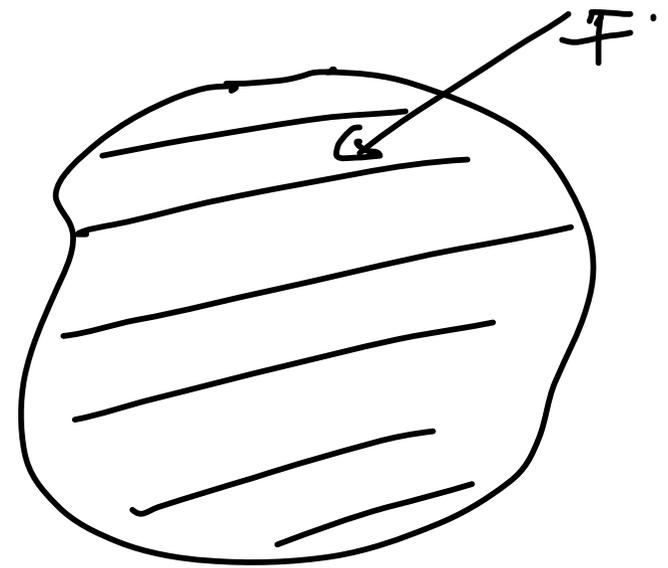
# Flächenintegrale

mit  $F$ : 2D Struktur im  $\mathbb{R}^3$

$\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  skalares Feld

$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  Vektorfeld

$\Rightarrow$  mögliche Doppelintegrale



①  $\iint_F dF$

Flächeninhalt

Skalar

②  $\iint_F \phi(\vec{x}) dF$

Skalar

③  $\iint_F \phi(\vec{x}) d\vec{F} = \iint_F \phi \vec{n} dF$

Vektor

④  $\iint_F \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{F} = \iint_F \vec{v} \cdot \vec{n} dF$

Fluss

Skalar

(z.B. Stromfluss, mag. Fluss)

Vektor

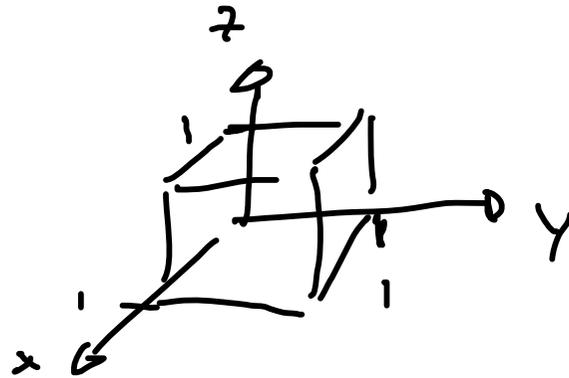
$$\textcircled{5} \iint_{\mathbb{F}} \vec{v}(\vec{x}) \times d\vec{\mathbb{F}} = \iint_{\mathbb{F}} (\vec{v} \times \vec{n}) d\mathbb{F}$$

"Flächenvektor" :  $d\vec{\mathbb{F}} = \vec{n} d\mathbb{F}$

$\Rightarrow \vec{n}$  : Flächennormale

Bsp

74 ①



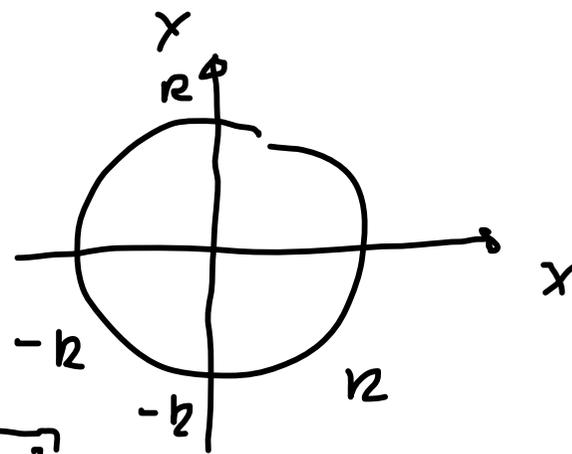
Flächeninhalt (Kubus):

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= 2 \cdot \int_0^1 \int_0^1 dx dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 dz dx + 2 \int_0^1 \int_0^1 dz dy \\ &= 6 \end{aligned}$$

Kreisfläche

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

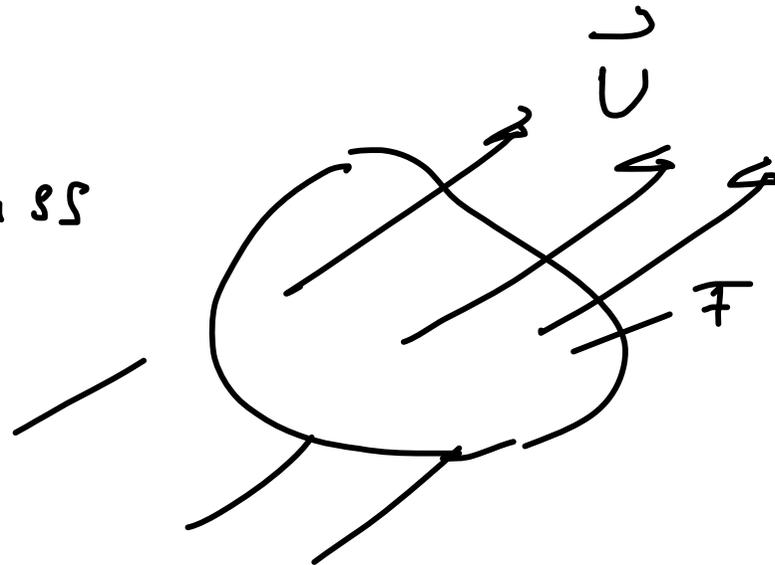
$$\Rightarrow y = y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

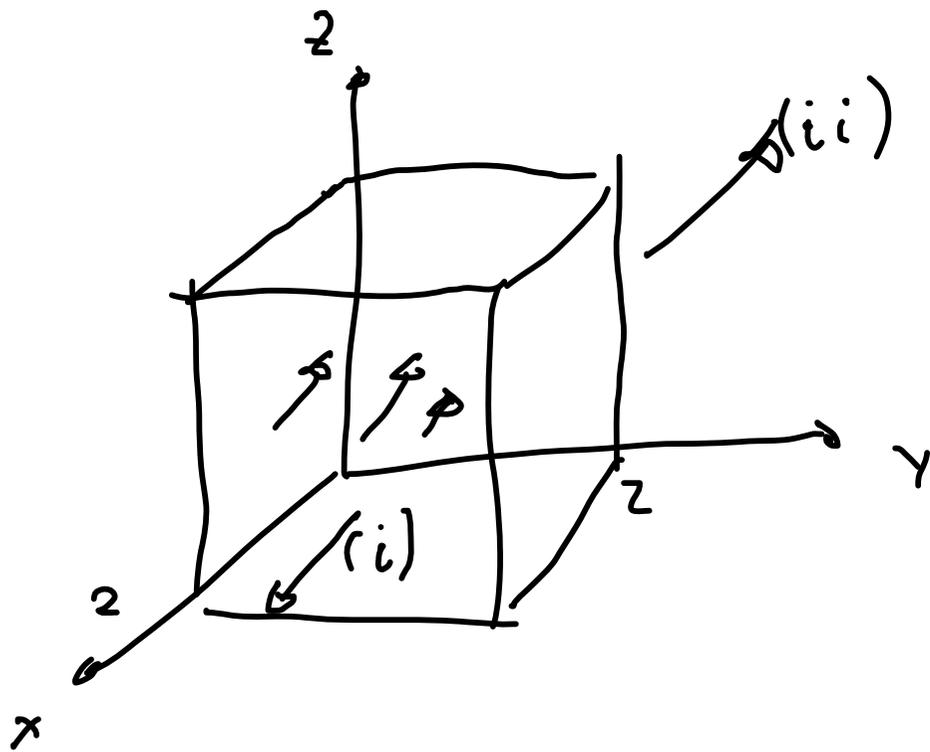


$$\begin{aligned} \bar{F}_0 &= \int_{-r}^r dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = 2 \int_{-r}^r dx \sqrt{r^2-x^2} = 2r^2 \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

Bsp 24 (4) : Fluss

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2x^2 \\ x+2 \\ y(x^2-3) \end{pmatrix}$$





$$\vec{n}_i = \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_i = -\vec{e}_x$$

$$(i) \quad x = 2; \quad d\vec{F} = \vec{e}_x dy dz$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{F} = 4z dy dz$$

$$F_{(i)} = \int_0^2 \int_0^2 4z dy dz = 16$$

Zusammenhang zwischen Flächenintegral und Linienintegral

⇒ Satz von Stokes

Flächenintegral eines Rotationsfeldes hängt nur von den Randwerten des Vektorfeldes entlang der Flächen Grenzen ab!

$$\int_{\mathbb{F}} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\mathbb{F}} = \oint_{\partial\mathbb{F}} \vec{V} \cdot d\vec{x}$$

$\partial\mathbb{F}$ : Rand der Fläche  $\mathbb{F}$



$$\Rightarrow \oint_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{x} \approx \left[ v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta x + \left[ v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta y \right] \Delta y$$

$$- \left[ v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x - \left[ v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta y \right] \Delta y$$

$$\approx \underbrace{\left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{(\vec{\sigma} \times \vec{v})_z} \underbrace{\Delta x \Delta y}_{\Delta F} \quad \left( \begin{array}{l} \text{nur lineare} \\ \text{Ordnung} \\ (\Delta x)^2 = 0 = (\Delta y)^2 \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(\vec{\sigma} \times \vec{v}) \cdot d\vec{F}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\vec{F}} (\vec{\sigma} \times \vec{v}) \cdot d\vec{F} = \oint_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{x}}$$

Fundamentalsatz  
der Rotation

□ Korollar 1

$$\int_{\vec{F}} d\vec{F} \cdot (\vec{v} \times \vec{V})$$

hängt nur von den Rand-  
linien, aber nicht von  
der Fläche ab

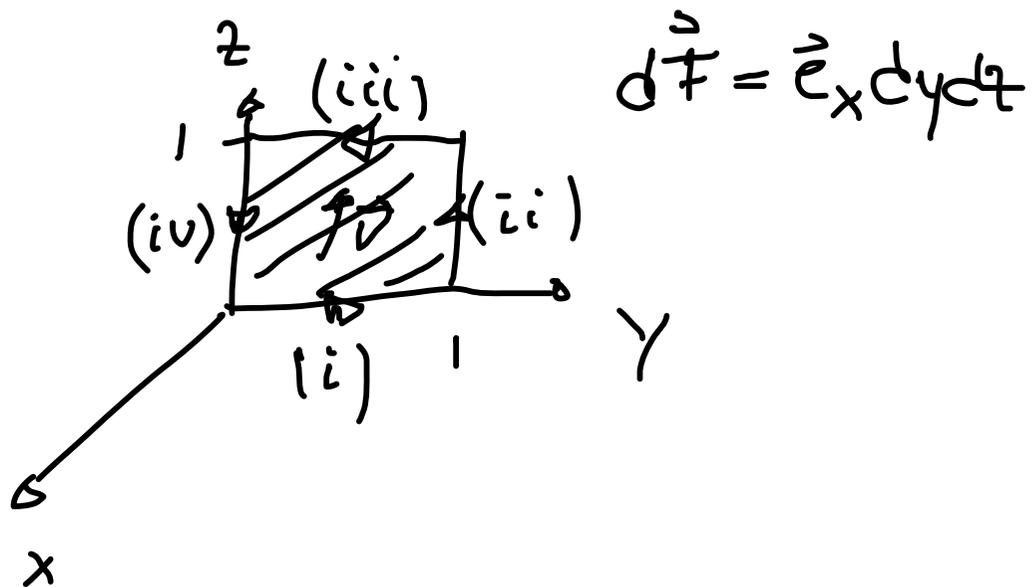
$$\oint_{\vec{F}} d\vec{F} \cdot (\vec{v} \times \vec{V}) = 0$$

Integration über eine  
geschlossene Fläche  
verschwindet, insb.

$\partial F \rightarrow 0$  kann gewählt  
werden

Bsp: Satz von Stokes

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2xz + 3yz \\ 4yz^2 \end{pmatrix}$$



$$\textcircled{1} \int (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{F} \quad @ x=0$$

$$= \int (\vec{\nabla} \times \vec{v})_x dy dz = \int (2_y v_z - 2_z v_y) dy dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 4z^2 dz dy = \frac{4}{3}$$

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{2} \text{ (i)} : x=0 = z ; \int_0^1 dy 3y^2 = 1 \\
 \text{(ii)} \quad y=1 ; \int_0^1 dz 4z^2 = 4/3 \\
 \text{(iii)} \quad z=1 ; \int_0^1 dy 3y^2 = -1 \\
 \text{(iv)} \quad y=0 ; \int_0^1 dz \cdot 0 = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \textcircled{2} \text{ (i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \\ \text{(iv)} \end{array}} \right\} = 4/3$$

Spezialfälle

$$\text{i) } \int_{\vec{r}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\vec{r}} d\vec{r} \times \vec{\nabla} f ; f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Beweis: } \vec{v} = \vec{a} f(\vec{x}) ; \vec{a} = \text{konst}$$

$$\textcircled{1} \int_{\vec{r}} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \vec{a} \cdot \int_{\vec{r}} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} f \times \vec{a}$$

$$(\vec{\nabla} f \times \vec{a}) \cdot d\vec{F} = (d\vec{F} \times \vec{\nabla} f) \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{F}} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{F} = \vec{a} \cdot \int_{\mathbb{F}} d\vec{F} \times \vec{\nabla} f$$

$\vec{a}$  : beliebig  $\Rightarrow$

$$2) \quad \oint_{\partial \mathbb{F}} d\vec{x} \times \vec{V}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{F}} (d\vec{F} \times \vec{\nabla}) \times \vec{V}(\vec{x})$$

$\Rightarrow$  Beweis: siehe Übungen

# Bemerkung zum Satz von Stokes

Anwendung in der Elektrodynamik

Ampère Gesetz / Durchflutungsgesetz

↳ Stromfluss durch einen Leiter erzeugt ein magnetisches Feld ( $\vec{B}$ -Feld)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu_0 I \quad \text{integrale Form}$$

$$= \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{F} \quad \text{mit } I = \int \vec{j} \cdot d\vec{F}$$

$$\Rightarrow \int d\vec{F} \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \mu_0 \vec{j}} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$\vec{j}$ : Stromdichte,  
Flussdichte

$I$ : Strom

Ampère in differentieller Form

## Volumenintegrale

$$\int_V f(\vec{x}) dV \quad ; \quad dV : \text{infinitesimales} \\ \text{Volumenelement}$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$dV = dx dy dz = d^3x$$

Beispiele:

$$V = \int_V d^3x = \int_0^a \int_0^a \int_0^a dx dy dz$$

Volumen eines  
Kubus mit  
Seitenlänge  $a$

$$M = \int_V \rho(\vec{x}) d^3x \quad : \text{Masse} ; \rho \text{ Massendichte}$$

$$Q = \int_V \rho_q(\vec{x}) d^3x \quad : \text{Gesamt-} \\ \text{ladung} ; \rho_q : \text{Ladungsdichte}$$

$$I_{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) [\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j] : \text{Trägheitstensor}$$

$$\vec{A} = \int_V d^3x \vec{V}(\vec{x}) = \vec{e}_x \int d^3x V_x + \vec{e}_y \int d^3x V_y + \vec{e}_z \int d^3x V_z$$

z. B. zur Bestimmung eines Vektorpotentials  
aus Stromdichte

z.B. Volumen einer Kugel

Kugel bestimmt durch:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

$\Rightarrow$  Koordinaten abhängig voneinander

$$x = x(y, z)$$

$$V_{\text{Kugel}} = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} dx dy dz = \int_{-R}^R dz \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-y^2}} dx$$

$$= 2 \int_{-R}^R dz \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dy \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$$

$$= 2 \int_{-R}^R dz \frac{R^2 - z^2}{2} \pi$$

$$= \pi \left[ R^2 z - \frac{1}{2} z^3 \right]_{-R}^R = \frac{4\pi}{3} R^3$$

mit

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right]$$

$$\int_{-a}^a dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{2} \pi$$

Zusammenhang zwischen Volumen- und  
Flächenintegral / Flussintegral

Gaußscher Integralsatz

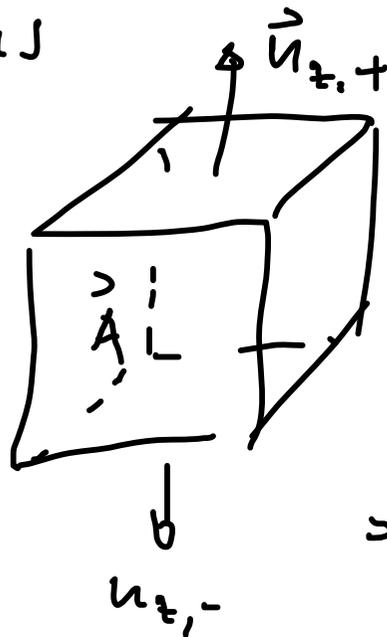
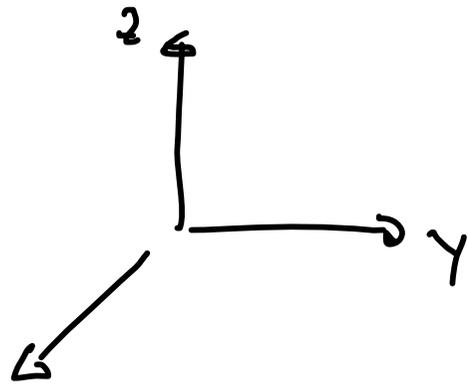
$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) d^3x = \oint_{\partial V} \vec{V} \cdot d\vec{F}$$

auch: Divergenzsatz

- Fundamentalsatz für die Divergenz:

Integral einer Ableitung (hier: Divergenz)  
über ein Gebiet (Volumen) = Wert der  
Funktion an den Grenzen des Gebiets  
(Gebietsgrenze = Fläche); Funktionswerte  
= Integral

"Beweis" mit Kubus



$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_z}{\partial z} d^3x = \iint_{\overline{\Gamma}} dx dy \int_a^b dz \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \iint_{\overline{\Gamma}} dx dy [A_z(x, y, b) - A_z(x, y, a)]$$

mit  $\vec{A} \cdot d\vec{F} = A_z n_{z,\pm} dx dy = (A_z(x, y, b) - A_z(x, y, a)) dx dy$

$$\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{F} = \iint dx dy [A_z(x, y, b) - A_z(x, y, a)]$$

+ analog für x, y-Richtung

$$\Rightarrow \iiint_V d^3x (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{A}$$

Beispiel

$\vec{A} = \vec{x}$  ; Volumen: Kugel mit Radius  $R$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3 \times V_{\text{Kugel}} = 4\pi R^3$$

$$d\vec{F} = \frac{\vec{x}}{r} dF \quad \Rightarrow \quad \oint_{\partial V} dF \frac{\vec{x}}{r} \cdot \vec{A} = \oint_{\partial V} dF \frac{\vec{x}^2}{r} = k \oint_{\partial V} dF$$

$$= k \cdot 4\pi R^2$$

Anwendung:

Zusammenhang zwischen Elektrischen Feld  $\vec{E}$  und Ladung  $Q$  bzw. Ladungsdichte  $\rho$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{F} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Fluss des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche ist proportional zur eingeschlossenen Ladung  $Q$

$$Q = \int d^3x \rho \quad ; \quad \rho: \text{Ladungsdichte}$$

mit Gauß

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{F} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3x \rho$$

$\Rightarrow$  integrale Form von Maxwell I

$$\text{wenn} \quad \int d^3x \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \right] = 0$$

$\Rightarrow$  differentielle Form von Maxwell I

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho}$$

# Definition der Divergenz mit S. v. Gauß

$$\int_{\Delta V} \text{div}(\vec{A}) d^3x = \oint_{\partial \Delta V} \vec{A} \cdot d\vec{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{div}(\vec{A}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial \Delta V} \vec{A} \cdot d\vec{F}}$$

div = lokale Quellstärke des Vektorfeldes  $\vec{A}$   
in dem Volumen  $\Delta V \rightarrow 0$

- Gauß für ein skalares Feld

$$\vec{A} = \vec{a} \phi(\vec{x}) ; \vec{a} = \text{konst}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \phi$$

$$\text{mit } \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{a} \int_V d^3x \vec{\nabla} \phi = \vec{a} \cdot \oint_{\partial V} \phi(\vec{x}) d\vec{F}$$

$$\Rightarrow \left| \int_V d^3x \vec{\partial} \phi = \oint_{\partial V} \phi d\vec{F} \right. \quad \begin{array}{l} \text{vektorielle} \\ \text{Größe} \end{array}$$

- mit  $\phi \rightarrow \phi(\vec{x}) \psi(\vec{x})$

$$\vec{\partial}(\phi \psi) = \phi \vec{\partial} \psi + \psi \vec{\partial} \phi$$

$$\Rightarrow \int_V d^3x \phi \vec{\partial} \psi = - \int_V d^3x \psi \vec{\partial} \phi + \oint_{\partial V} (\phi \psi) d\vec{F}$$

vgl. partielle Integration

$$\int_a^b f g' dx = - \int_a^b f' g dx + f g \Big|_a^b$$

• mit  $\vec{B} = \vec{a} \times \vec{A}(\vec{x})$  ;  $\vec{a} = \text{konst.}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{F} \Rightarrow -\vec{a} \int_V d^3x (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \oint_{\partial V} (\vec{a} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dF$$

$$= -\vec{a} \oint_{\partial V} (\vec{n} \times \vec{A}) dF$$

$$\Rightarrow \left[ \int_V d^3x (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \oint_{\partial V} (\vec{n} \times \vec{A}) dF \right] \text{ vektorielle Größe}$$

- mit  $\chi(\vec{x}) = \vec{\sigma} \cdot (\phi(\vec{x}) \vec{\sigma} \psi(\vec{x}))$   
 $= \phi \Delta \psi + (\vec{\sigma} \phi) \cdot (\vec{\sigma} \psi)$

$$\int_V d^3x \chi = \int_V d^3x [\phi \Delta \psi + (\vec{\sigma} \phi) \cdot (\vec{\sigma} \psi)] = \int_V (\phi \vec{\sigma} \psi) \cdot d\vec{F}$$

$$\Rightarrow \left[ \int_V d^3x \phi \Delta \psi = - \int_V d^3x (\vec{\sigma} \phi) \cdot (\vec{\sigma} \psi) + \int_V (\phi \vec{\sigma} \psi) \cdot d\vec{F} \right]$$

erste Greensche Formel / Identität

Greenscher Satz in der unsymmetrischen Form

- Satz von Green

$$\vec{A} = \phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi$$

$$\Rightarrow \int_V d^3x (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \oint_{\partial V} (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{x}$$

Zweite Green'sche Identität

Verwendung: Beweis der Eindeutigkeit der Lösung von  $\Delta \phi = -4\pi \rho$ , wenn Randwerte vorgegeben sind

# Vektoranalysis / Integralrechnung : Zusammenfassung

062

## • Wirbelfreie Felder

äquivalente Aussagen

$$- \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in G = \mathbb{R}^3$$

$$- \oint \vec{V} \cdot d\vec{x} = 0 \quad \text{für jeden geschlossenen Weg} \\ (\text{Satz von Stokes})$$

$$- \int_a^b \vec{V} \cdot d\vec{x} \quad \text{unabhängig vom gewählten Weg,} \\ \text{nur von } a, b \text{ abhängig}$$

$$- \vec{V} = -\vec{\nabla}\phi \quad \vec{V} \text{ ist Gradientenfeld}$$

## • quellfreie Felder

$$- \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

$$- \oint \vec{V} \cdot d\vec{F} = 0 \quad \text{für jede geschlossene Fläche (Satz von Gauß)}$$

$$- \int \vec{V} \cdot d\vec{F} \quad \text{unabhängig von gewählter Fläche; nur von Begrenzungslinie abhängig}$$

$$- \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{V} \text{ ist Wirbelfeld / Rotationsfeld}$$

allgemein:

$$\vec{V}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Vektortheorem

jedes Vektorfeld läßt sich als Kombination eines Gradientenfeldes und eines Wirbelfeldes darstellen.

$\vec{V}$  nur eindeutig aus VT bestimmbar, wenn

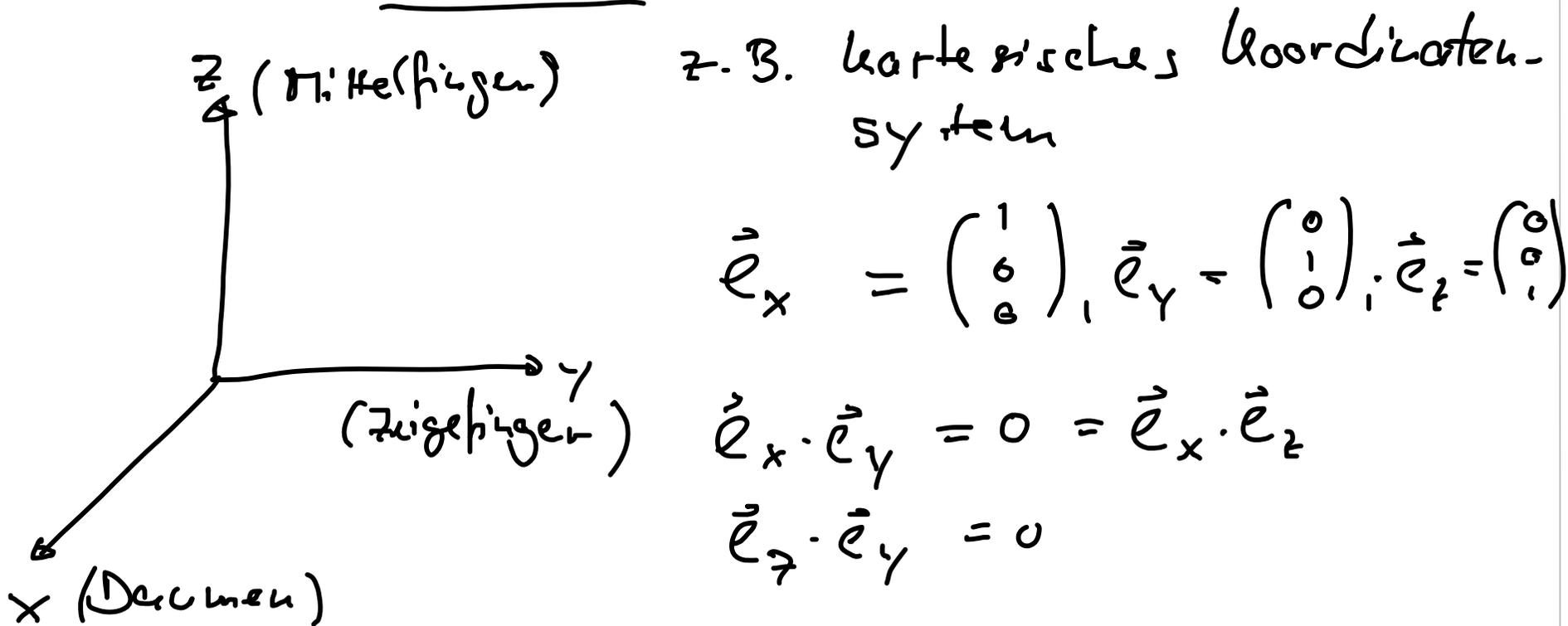
$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{V}(\vec{x}) = 0$$

$\Rightarrow$  Helmholtz-Theorem

VT: partielle Differentialgleichung mit eindeutiger Lösung wenn Randbedingungen vorgegeben sind

# Krummlinige, orthogonale Koordinatensysteme

orthogonal: Einheitsbasisvektoren stehen  
senkrecht aufeinander

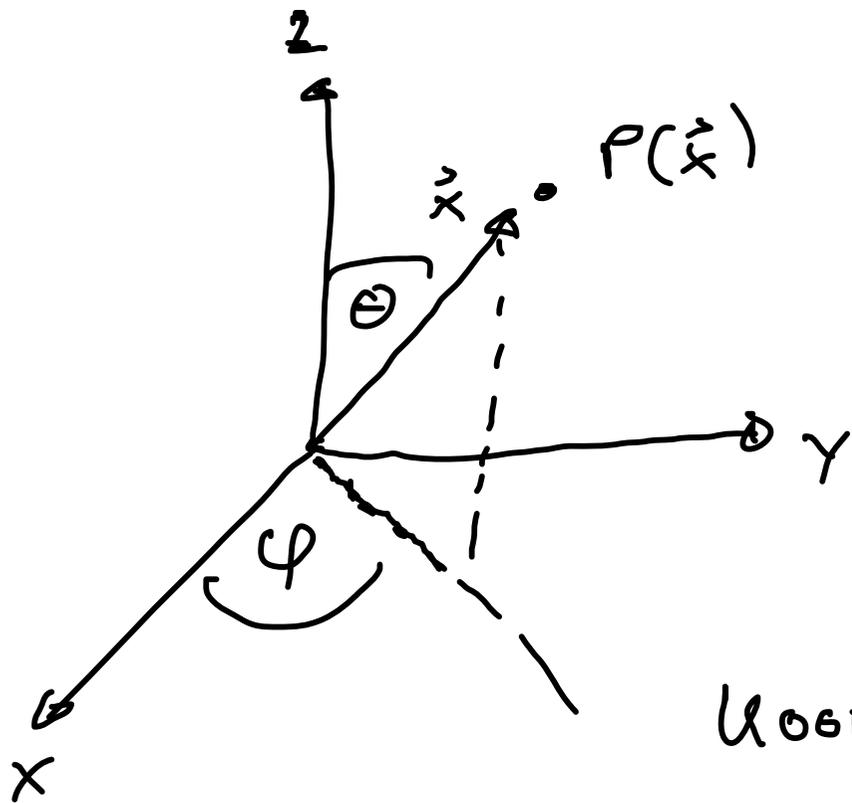


rechtshändiges System: Rechte-Hand-Regel

$$\Rightarrow \vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{e}_y \Rightarrow \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_x \Rightarrow \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_z$$

Krummlinige Koordinaten

Bsp.: Kugelkoordinaten, Sphärische-Polar-Koordinaten



$r$  : Radius

$\varphi$  : Azimutwinkel

$\Theta$  : Polarwinkel

aus Skizze:

$$r_{xy} = r \sin \Theta$$

Koordinatentransformation:

$$x = r \sin \Theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \Theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \Theta$$

# inverse Transformation

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r(x, y, z)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \theta(x, y, z)$$

$$\varphi = \arctan(y/x) = \varphi(x, y)$$

$$r = [0, \infty]$$

$$\theta = [0, \pi]$$

$$\varphi = [0, 2\pi]$$

beliebiger Vektor:

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$$

## Erzeugung von Basisvektoren

z.B.  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$

$\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \varphi)$  ;  $r, \theta, \varphi$  neue Koordinaten

↳ Richtungsänderung entlang neuer Koordinaten  $(r, \theta, \varphi)$   
bestimmt neue Basisvektoren =

Tangenteneinheitsvektoren entlang neuer Koordinaten

$$\vec{e}_r = N_r \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} ; N_r : \text{Normierung} = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \right|^{-1}$$

$$\vec{e}_\theta = N_\theta \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} ; N_\theta = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \right|^{-1}$$

$$\vec{e}_\varphi = N_\varphi \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} ; N_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right|^{-1}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_r = N_r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}; N_r^{-1} = \left( \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \right)^{1/2} = 1$$

$$\vec{e}_\theta = N_\theta \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}; N_\theta = r^{-1}$$

$$\vec{e}_\varphi = N_\varphi \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; N_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}; \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}; \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{e}_x + \cos\theta \sin\varphi \vec{e}_y - \sin\theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y$$

⇒ ändern sich von Punkt zu Punkt

⇒ krummliniges Koordinatensystem

Ortsvektor in Kugelkoordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix} = r \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_x + r \sin\theta \sin\varphi \vec{e}_y + r \cos\theta \vec{e}_z$$

Komponenten in Richtung  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$

$$x_{u,r} = \vec{x} \cdot \vec{e}_r = r$$

$$x_{u,\theta} = \vec{x} \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

$$x_{u,\varphi} = \vec{x} \cdot \vec{e}_\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x}_u = r \vec{e}_r}$$

Orthovektor in Kugelkoordinaten  
ist nur von  $\vec{e}_r$  abhängig.

$\Rightarrow \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  : orthogonales rechtshändiges  
Koordinatensystem

$$1) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0 ; \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\varphi = 0 ; \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$$

$$2) \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi ; \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r ; \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$$

# Allgemeine orthogonale Koordinatentransformationen

- Funktionaldeterminante
- Integration & Differentiation

$\{u, v, w\}$  krummliniges orthogonales Koordinatensystem  
z.B.  $\{r, \theta, \varphi\}$

durch Transformation mit kartesischen  
Koordinaten  $\{x, y, z\}$  verknüpft:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned} \right\} \vec{x} = \vec{x}(u, v, w)$$

$\Rightarrow$  Basisvektoren gegeben durch  
Tangenteneinheitsvektoren an Koordinatenlinien

$$\Rightarrow \vec{e}_u = \frac{1}{\rho_u} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \quad ; \quad \rho_u = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right|$$

$$\vec{e}_v = \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \quad ; \quad \rho_v = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right|$$

$$\vec{e}_w = \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \vec{x}}{\partial w} \quad ; \quad \rho_w = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial w} \right|$$

Jacobi-Matrix / Funktionalmatrix /  
Ableitungsmatrix

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \partial_{u_j} x_i \quad ; \quad x_i = \{x, y, z\}$$

$$u_j = \{u, v, w\}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = (P_u \vec{e}_u \quad P_v \vec{e}_v \quad P_w \vec{e}_w)$$

↑ Spaltenvektoren

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Funktionsdeterminante / Jacobi-Determinante

$$\det(J) = \underbrace{\vec{e}_u \cdot (\vec{e}_v \times \vec{e}_w)}_{= 1 \text{ für orthonomales, rechtshändiges KS}} P_u P_v P_w$$

vgl. Spatprodukt:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

(zyklisch vertauschbar, zeilen-Spalten vertauschbar)

z.B. Kugelkoordinaten  $\{r, \theta, \varphi\}$

$$\rho_r = 1; \quad \rho_\theta = r, \quad \rho_\varphi = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow \det J = r^2 \sin \theta$$

Linien-, Flächen-, Volumenelement

totale Differential des Ortsvektors in Koordinaten  $\{u, v, w\}$

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{x}}{\partial w} dw$$

$$= (\partial_{\vec{u}} \cdot \vec{x}) d\vec{u} \quad ; \quad d\vec{u} = \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}$$

$$= J d\vec{u}$$

$$= \vec{e}_u \rho_u du + \vec{e}_v \rho_v dv + \vec{e}_w \rho_w dw$$

$\Rightarrow ds \equiv |d\vec{x}|$  infinitesimale Bogenlänge /  
Bogenlängendifferential

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \rho_u^2 du^2 + \rho_v^2 dv^2 + \rho_w^2 dw^2$$

bzw.  $ds = \sqrt{\rho_u^2 du^2 + \rho_v^2 dv^2 + \rho_w^2 dw^2}$

Bsp. - kartesischen Koordinaten

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

- Kugelkoordinaten

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}$$

$S = \int ds$  : Bogenlänge

Hinweis:  $ds, s$  sind physikalische Größen  
(Länge)

$\Rightarrow$  sind unabhängig vom gewählten Koordinaten-System  $\odot$

Bsp.: Länge des Äquators

1) kartesischen Koordinaten

$$z = 0 \Rightarrow dz = 0 ; x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y(x) = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\oint ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2 \int_{-R}^R dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= 2 \int_{-R}^R dx \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} = 2R \int_{-1}^1 dx \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}$$

$$= 2\pi R$$

$\pi$

2) Kugelkoordinaten  
 $r = R \Rightarrow dr = 0$ ;  $\theta = \pi/2 \Rightarrow d\theta = 0$   
 $\sin\theta = 1$

$$\oint ds = \int_0^{2\pi} R d\varphi = 2\pi R$$

Allgemeine Koordinatentransformation

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' ; \vec{x}' = \vec{x}'(\vec{x}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}' = \vec{U}(\vec{x})$$

$$\Rightarrow ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j$$

$$= g'_{ij} dx'_i dx'_j$$

invariant unter  
 Koordinatentransformation

Kartesisch:  $dx_i = \{dx, dy, dz\}$

$$\Rightarrow g_{ij} = \mathbb{1} = \text{diag}(1, 1, 1)$$

Kugelkoordinaten:  $dx_i = \{dr, d\theta, d\varphi\}$

$$\Rightarrow g'_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$$

$g$ : Metrik, Metrischer Tensor

↳ zentrales Objekt (Bilinearform) in der ART

$g = \mathbb{J}^T \mathbb{J}$  im  $\mathbb{R}^3$  euklidischen Raum

auch in der Speziellen Relativitätstheorie (SRT)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Minkowski Metrik

# Transformation von Vektoren

z.B.  $\vec{\nabla} f(\vec{x})$

wobei  $f(x, y, z) = f(u, v, w)$  : Skalar ändert seinen Wert nicht bei Koordinatentransformation  
 $\Rightarrow$  phys. Größe, z.B.  
 el. Spannung, Temperatur

Ziel:  $\vec{\nabla} f = f_u \vec{e}_u + f_v \vec{e}_v + f_w \vec{e}_w$

$$\text{mit } d\vec{x}(u, v, w) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{x}}{\partial w} dw$$

$$= p_u du \vec{e}_u + p_v dv \vec{e}_v + p_w dw \vec{e}_w$$

$$\text{und } df = (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{x}$$

$$= p_u f_u du + p_v f_v dv + p_w f_w dw$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw$$

$$\Rightarrow f_u = \frac{1}{\rho_u} \frac{\partial f}{\partial u} ; f_v = \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial f}{\partial v} ; f_w = \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial f}{\partial w}$$

$\Rightarrow$  Gradient:

$$\vec{\nabla}_i f = \frac{1}{\rho_u} \frac{\partial f}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial f}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial f}{\partial w} \vec{e}_w$$

BSP. Kugelkoordin.

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Transformation eines allgemeinen Vektors

$$\vec{A} = A_u \vec{e}_u + A_v \vec{e}_v + A_w \vec{e}_w = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

= physikalische Größe ( $\vec{E}$  - oder  $\vec{B}$ -Feld)

$\Rightarrow$  unabhängig von gewählten Koordinaten

aber: Komponenten  $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$  oder  $(A_u, A_v, A_w)$  082  
sind abhängig von Koordinatenwahl

betrachte  $d\vec{x}$  (= Vektor, Differential des Ortsvektors)  
Komponenten

$$d\vec{x} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z \quad (dx, dy, dz)$$

$$= \rho_u du \vec{e}_u + \rho_v dv \vec{e}_v + \rho_w dw \vec{e}_w \quad (\rho_u du, \rho_v dv, \rho_w dw)$$

$$= du \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} + dv \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} + dw \frac{\partial \vec{x}}{\partial w} \quad (du, dv, dw)$$

↳ nicht-normierte Basis:

$$\left. \left\{ \vec{t}_u = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}, \vec{t}_w = \frac{\partial \vec{x}}{\partial w} \right\} \right\} = \text{Tangenten-vektoren}$$

vgl. Kugelkoordinaten:

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Transformation der Vektorkomponenten ist abhängig von der Basis

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}$$

J: Jacobi-Matrix

$$= J \begin{pmatrix} 1/\rho_u & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho_v & 0 \\ 0 & 0 & 1/\rho_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_u du \\ \rho_v dv \\ \rho_w dw \end{pmatrix} = \underbrace{J P^{-1}}_{T} \begin{pmatrix} A_u \\ A_v \\ A_w \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T = J P^{-1}$  Transformationsmatrix für US mit Tangenteneinheitsvektoren

$$\Rightarrow J = T P$$

$$P = \begin{pmatrix} p_u & 0 & 0 \\ 0 & p_v & 0 \\ 0 & 0 & p_w \end{pmatrix} = \text{diag}(p_u, p_v, p_w)$$

diagonal, wenn  $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$  orthogonales  
Koordinatensystem aufspannen

$\Rightarrow (d_u, d_v, d_w), (A_u, A_v, A_w)$  durch Invertierung

$$\begin{pmatrix} d_u \\ d_v \\ d_w \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} ; J^{-1} J = \mathbb{1}$$

$$\begin{pmatrix} A_u \\ A_v \\ A_w \end{pmatrix} = P J^{-1} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

für allgemeinen Vektor  
 $\vec{A} = A_u \vec{e}_u + A_v \vec{e}_v + A_w \vec{e}_w$

$J^{-1}$ : inverse Jacobi Matrix

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow J_{ij}^{-1} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \partial_{x_j} u_i$$

Bsp. Kugelkoordinaten

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \text{diag}(1, r, r \sin \theta)$$

$$J^{-1} = \frac{\partial(r, \theta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} x/r & y/r & z/r \\ \frac{xz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{yz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{-(x^2 - y^2)}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho^{-1} = \text{diag}\left(1, \frac{1}{r}, \frac{1}{r \sin \Theta}\right)$$

z.B. Ortsvektor:  $\vec{x} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$

$$= x_r \vec{e}_r + x_\Theta \vec{e}_\Theta + x_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{pmatrix} x_r \\ x_\Theta \\ x_\varphi \end{pmatrix} = \rho J^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} x^2/r + y^2/r + z^2/r \\ \frac{1}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} (x^2 z + y^2 z - z(x^2 + y^2)) \\ -\frac{yx}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

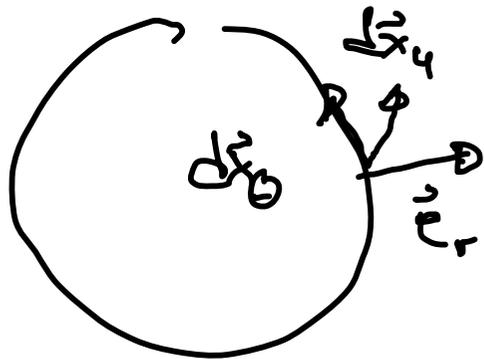
$$= \rho \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = r \vec{e}_r$$

# Das Flächenelement in krummlinigen Koordinaten

Fläche definiert durch

$u = \text{const}$ , oder  $v = \text{const}$  oder  $w = \text{const}$ .

$$\begin{aligned} \text{Flächenelement} &= d\vec{x}_u \times d\vec{x}_v && \cong \text{spannt ein} \\ & && \text{Parallelogramm} \\ & && \text{auf} \\ &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} du \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} dv \end{aligned}$$



$$= p_u p_v du dv \underbrace{(\vec{e}_u \times \vec{e}_v)}_{\vec{e}_w}$$

für orthogonales  
Koordinatensystem

$$= p_u p_v du dv \vec{e}_w$$

z.B. Kugelkoordinaten mit  $r = \text{const} = R$

$$\Rightarrow d\vec{F}_r = d\vec{x}_\theta \times d\vec{x}_\varphi = \rho_\theta \rho_\varphi d\theta d\varphi \vec{e}_r$$

$$= R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$$

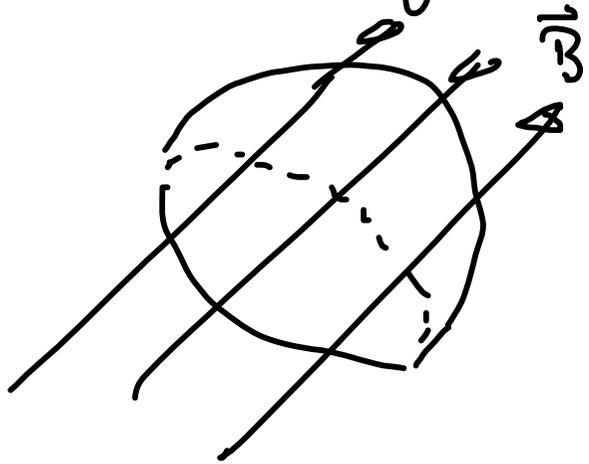
$\Rightarrow$  Oberfläche der Kugel (Integration über Flächennormale  $\vec{n} = \vec{e}_r$ )

$$F_0 = \int d\vec{F}_r \cdot \vec{e}_r = R^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta = 2\pi R^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta$$

$$= 4\pi R^2$$

z. B. Fluss eines konstanten Magnetfeld durch  
Halbkugel mit  $r = R$



$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = B \vec{e}_z$$

$$\vec{A} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{B}{2} y \vec{e}_x + \frac{B}{2} x \vec{e}_y$$

$$\Phi = \int_{\text{②}} \vec{B} \cdot d\vec{F} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{F} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{x} \quad \text{①}$$

↑  
Stokes

$$\text{①} \quad \vec{A} \cdot d\vec{x} = A_\varphi r \sin \theta d\varphi$$

$$A_\varphi = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y A_x + x A_y) \cdot r \sin \theta = \frac{B}{2} r \sin \theta$$

Wegintegration am Äquator:  $r = R \Rightarrow dr = 0$   
 $\theta = \pi/2 \Rightarrow d\theta = 0$

$$\Rightarrow \oint \vec{A} \cdot d\vec{x} = \frac{B}{2} k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = B \pi k^2$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{B} \cdot d\vec{F} = B_r k^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$B_r = \frac{x}{r} B_x + \frac{y}{r} B_y + \frac{z}{r} B_z = \frac{z}{r} B = \cos \theta B$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \vec{B} \cdot d\vec{F} &= B k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \underbrace{\cos \theta \sin \theta}_{-\frac{1}{2} \cos^2 \theta} \\ &= B 2\pi k^2 \int_0^1 \frac{d \cos \theta}{2} \\ &= B \pi k^2 \end{aligned}$$

## Das Volumenelement

$$dV = d\vec{x}_u \cdot (d\vec{x}_v \times d\vec{x}_w) \quad \left( \begin{array}{l} \text{Spatprodukt} \\ = \text{Parallelepiped} \end{array} \right)$$

$$= \rho_u \rho_v \rho_w \underbrace{\vec{e}_u \cdot (\vec{e}_v \times \vec{e}_w)}_{=1} du dv dw$$

$$= \det(J) du dv dw$$

Bsp. Kugelkoordinaten

$$J = T P$$

$$\det(J) = \det(P)$$

$$= r^2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow V_{\text{Kugel}} = \iiint r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3$$

# Vektoranalysis in krummlinigen Koordinaten

## • Gradient

$$\vec{\nabla} f(u, v, w) = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \vec{e}_w$$

z.B. Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

## • Divergenz

$$\vec{A} = A_u \vec{e}_u + A_v \vec{e}_v + A_w \vec{e}_w$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (A_u \vec{e}_u) + \vec{\nabla} \cdot (A_v \vec{e}_v) + \vec{\nabla} \cdot (A_w \vec{e}_w)$$

⇒ erster Versuch

$$\vec{\nabla} \cdot (A_u \vec{e}_u) = \underbrace{(\vec{\nabla} A_u)}_{\frac{1}{h_u} \frac{\partial A_u}{\partial u}} \cdot \vec{e}_u + A_u \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_u)}_{\text{unbekannt}}$$

$\Rightarrow$  mit "Lagrange" behaupte Regel

$$\begin{aligned} \text{grad}(u) = \vec{\nabla} u &= \frac{1}{\rho_u} \frac{\partial u}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial u}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial u}{\partial w} \vec{e}_w \\ &= \frac{1}{\rho_u} \vec{e}_u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{e}_u &= \rho_u \vec{\nabla} u = \vec{e}_v \times \vec{e}_w = \rho_v \rho_w (\vec{\nabla}_v \times \vec{\nabla}_w) \\ \vec{e}_v &= \rho_v \vec{\nabla}_v \\ \vec{e}_w &= \rho_w \vec{\nabla}_w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (A_u \vec{e}_u) &= \vec{\nabla} \cdot [(\rho_v \rho_w A_u) (\vec{\nabla}_v \times \vec{\nabla}_w)] \\ &= (\vec{\nabla}_v \times \vec{\nabla}_w) \cdot \vec{\nabla} (\rho_v \rho_w A_u) + \rho_v \rho_w A_u \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}_v \times \vec{\nabla}_w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}_v \times \vec{\nabla}_w) &= (\vec{\nabla}_w) \cdot \vec{\nabla}_v \times (\vec{\nabla}_v) - \vec{\nabla}_v \cdot \vec{\nabla}_w \times (\vec{\nabla}_w) \\ &= 0 \quad \left( \text{rot}(\text{grad}(f)) = 0 \right) \end{aligned}$$

$$\vec{e}_\nu \times \vec{e}_\omega = \frac{1}{\rho_\nu \rho_\omega} \vec{e}_\mu; \quad (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{e}_\mu = \frac{1}{\rho_\mu} \partial_\mu f$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (A_\mu \vec{e}_\mu) = \frac{1}{\rho_\mu \rho_\nu \rho_\omega} \frac{\partial}{\partial \mu} (\rho_\nu \rho_\omega A_\mu)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho_\mu \rho_\nu \rho_\omega} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu} (\rho_\nu \rho_\omega A_\mu) + \frac{\partial}{\partial \nu} (\rho_\mu \rho_\omega A_\nu) + \frac{\partial}{\partial \omega} (\rho_\mu \rho_\nu A_\omega) \right]}$$

Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\varphi) \right]$$

z. B. Orbitaltor

$$\vec{A} = \vec{x} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \sin \theta) \right) = 3$$

beachte:  $\vec{E} = \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 ?$

aber  $\int_{\mathcal{D}^3} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{F} = Q$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{Q}{r^2} \rightarrow \delta(r)$  für Punktladung

• Rotation

$$\text{rot}(\vec{A}(u, v, w)) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(u, v, w)$$

$$= \vec{\nabla} \times (A_u \vec{e}_u) + \vec{\nabla} \times (A_v \vec{e}_v) + \vec{\nabla} \times (A_w \vec{e}_w)$$

mit  $\vec{e}_u = \rho_u \vec{\nabla} u$

$$\vec{\nabla} \times (A_u \vec{e}_u) = \rho_u A_u \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u}_{=0} + \vec{\nabla}(\rho_u A_u) \times \vec{\nabla} u$$

$$= \left[ \frac{1}{\rho_u} \partial_u (\rho_u A_u) \vec{e}_u + \frac{1}{\rho_v} \partial_v (\rho_u A_u) \vec{e}_v + \frac{1}{\rho_w} \partial_w (\rho_u A_u) \vec{e}_w \right] \times$$

$$\frac{1}{\rho_u} \vec{\epsilon}_u$$

$$\leftarrow \vec{\epsilon}_v \times \vec{\epsilon}_u = -\vec{\epsilon}_w$$

$$= -\frac{1}{\rho_u \rho_v} \partial_v (\rho_u A_u) \vec{\epsilon}_w + \frac{1}{\rho_u \rho_w} \partial_w (\rho_u A_u) \vec{\epsilon}_v$$

$$\vec{\epsilon}_w \times \vec{\epsilon}_u = \vec{\epsilon}_v$$

analog für  $v, w$  Komponenten:

$$\vec{\nabla} \times (A_v \vec{\epsilon}_v) = \frac{1}{\rho_u \rho_v} \partial_u (\rho_v A_v) \vec{\epsilon}_w - \frac{1}{\rho_u \rho_w} \partial_w (\rho_v A_v) \vec{\epsilon}_u$$

$$\vec{\nabla} \times (A_w \vec{\epsilon}_w) = \frac{1}{\rho_v \rho_w} \partial_v (\rho_w A_w) \vec{\epsilon}_u - \frac{1}{\rho_u \rho_w} \partial_u (\rho_w A_w) \vec{\epsilon}_v$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(u, v, w) = \frac{1}{\rho_u \rho_v \rho_w} \left[ \rho_u \vec{\epsilon}_u (\partial_v (\rho_w A_w) - \partial_w (\rho_v A_v)) \right. \\ \left. + \rho_v \vec{\epsilon}_v (\partial_w (\rho_u A_u) - \partial_u (\rho_w A_w)) \right. \\ \left. + \rho_w \vec{\epsilon}_w (\partial_u (\rho_v A_v) - \partial_v (\rho_u A_u)) \right]$$

Dazu.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho_u \rho_v \rho_w} \begin{vmatrix} \rho_u \vec{e}_u & \rho_v \vec{e}_v & \rho_w \vec{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ \rho_u A_u & \rho_v A_v & \rho_w A_w \end{vmatrix}$$

in Kugelkoordinaten;  $\rho_r = 1$ ;  $\rho_\theta = r$ ;  $\rho_\varphi = r \sin \theta$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \vec{e}_r \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\theta) \right) \right. \\ &\quad \left. + r \vec{e}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} A_r - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\varphi) \right) \right. \\ &\quad \left. + r \sin \theta \vec{e}_\varphi \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right) \right] \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\theta \right) \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_r - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right) \vec{e}_\varphi$$

• Laplace Operator

$$\Delta = \text{div}(\text{grad}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) &= \vec{\nabla} \cdot \left[ \left( \vec{e}_u \frac{1}{\rho_u} \partial_u + \vec{e}_v \frac{1}{\rho_v} \partial_v + \vec{e}_w \frac{1}{\rho_w} \partial_w \right) f \right] \\ &= \frac{1}{\rho_u \rho_v \rho_w} \left[ \partial_u \left( \frac{\rho_v \rho_w}{\rho_u} \partial_u f \right) + \partial_v \left( \frac{\rho_u \rho_w}{\rho_v} \partial_v f \right) + \partial_w \left( \frac{\rho_u \rho_v}{\rho_w} \partial_w f \right) \right] \end{aligned}$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho_u \rho_v \rho_w} \left[ \partial_u \left( \frac{\rho_v \rho_w}{\rho_u} \partial_u f \right) + \partial_v \left( \frac{\rho_u \rho_w}{\rho_v} \partial_v f \right) + \partial_w \left( \frac{\rho_u \rho_v}{\rho_w} \partial_w f \right) \right]$$

Kugelkoordinaten:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$\Rightarrow \left[ \Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right]$$

## Die S. Funktion

S. Funktion = Funktional (Abbildung Funktionen auf Funktionen)

bzw. Distribution: Verallgemeinerung von Funktionen auf nicht-stetig differenzierbare Differentialgleichungen, nicht hinreichend definierte Diff'g Gleichungen

↳ Lösung mit Hilfe von Distributionen

Entwicklung durch Laurent Schwarz  
(1944/45)

S. Funktion = Dirac Funktion  
eingeführt von Paul Dirac für QM (1920)

Notwendigkeit der  $\delta$ -Distribution:

$$\vec{E} = \frac{Q}{r^2} \hat{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{aber} \quad \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{F} = 4\pi Q$$

$\Rightarrow$  Problem bei  $r = 0$  ?

Definition 1D  $\delta$ -Distribution

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 = x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw über Integral ( $\delta$  wird i. B. im Zusammenhang mit Integration verwendet)

$$\boxed{\int_{\Omega} \delta(x) dx = 1}$$

mit  $0 \in \Omega$  für beliebiges Gebiet  $\Omega$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad ; \quad 0 \in \Omega$$

$$\Rightarrow f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f(x) \delta(x) dx = f(0) \int_{\Omega} \delta(x) dx = f(0)$$

### Eigenschaften der $\delta$ -Distribution

- Filter :  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$

nur Funktionswert bei  $x=0$   
wird ausgewertet  
Rest wird ausgeblendet

+ Translation

$$y = x - a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+a) \delta(y) dy = f(a)$$

$$f(x) = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1 \Rightarrow \delta(x-a) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Linearität (wg. Linearität der Integration)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) (f(x) + g(x)) dx = f(0) + g(0)$$

• Skalierung

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f(y/a) \frac{dy}{a} \quad a > 0$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f(y/a) \frac{dy}{a} \quad a < 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x) dx = \frac{1}{|a|} f(0)$$

$\Rightarrow$  Dimension von  $\delta(x)$

$$[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$$

$$\text{z.B. } [x] = \text{Länge}$$

$$\Rightarrow [\delta(x)] = \frac{1}{\text{Länge}}$$

$$\text{auch } \int \delta(x) dx = 1$$

- Kettenregel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

$x_i$  = einfache Nullstelle von  $g(x)$

$n$  = # Nullstellen

$$\Rightarrow \boxed{\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(g(x)) dx \quad \text{mit } y = g \Rightarrow dy = \frac{dy}{dx} dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{g'}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(g^{-1}(y)) \frac{\delta(y)}{g'} dy$$

auswerten bei  $y = 0 \Rightarrow g(x) = 0$  Nullstellen  
von  $g$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|} dx = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

$$\text{Bsp.: } \delta(x^2 - a^2) \Rightarrow g(x) = x^2 - a^2 \Rightarrow g' = 2x$$

Nullstellen:  $g = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm a$

$$\Rightarrow \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} (\delta(x-a) + \delta(x+a))$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x^2 - a^2) dx = \frac{1}{2|a|} (f(a) + f(-a))$$

Darstellung der  $\delta$ -Distribution durch Grenzwertfunktionen

• Glockenfunktion / Gauß-, Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} e^{-x^2/2\epsilon^2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad \Rightarrow \delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}}$$

• Lorentzverteilung

$$\delta_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

• mit  $\sin$

$$\delta_{\epsilon} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x/\epsilon)}{1 \times 1}$$

- Ableitung der  $\delta$ -Distribution

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = \delta(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f'(x) dx$$

↑  
partielle Integration

= 0 wg.  $\delta(\pm\infty) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\delta'(x) f(x) = -\delta(x) f'(x)}$$

analog für höhere Ableitungen

bzw.:

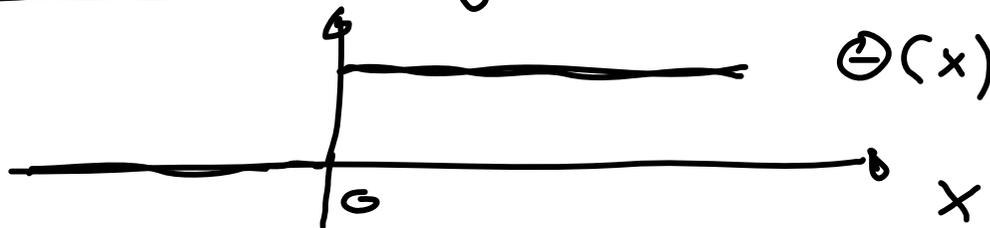
$$\frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{\delta(x)}{x}$$

vgl.:  $\delta(x) \frac{f(x)}{x} = \delta(x) f'(x)$

mit  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

- Zusammenhang mit Heaviside Sprungfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



Physik: Einschaltvorgang

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(x) f(x) dx = \Theta(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_0^{\infty} \Theta(x) f'(x) dx = -f(\infty) + f(0)$$

$\hookrightarrow = 0$   $\hookrightarrow = 0$   
 für  $f(\pm\infty) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} \Theta(x) = \delta(x)}$$

- $\delta$ -Funktion mit Fouriertransformation

$$\hat{F}[f](x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x} f(k) dk$$

Fourier Theorem / Inverse Fouriertrafo

$$f(x) = \hat{F}^{-1}[\hat{F}](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x k} \hat{F}[f](k) dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i h y} f(y) dy dh$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dh e^{2\pi i h (x-y)}}_{= \delta(x-y)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \delta(x-y)$$

$$= f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{2\pi i h x}}$$

## $\delta$ -Funktion in mehr Dimensionen

mit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\delta(\vec{x}) \equiv \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

Produkt 1D  $\delta$ -Distributionen

$$\Rightarrow \int dV \delta(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 1$$

$$\Rightarrow \int f(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{a}) dV = f(\vec{a})$$

Dimensionen:

$$[\delta(\vec{x})] = [\delta(x)] [\delta(y)] [\delta(z)] = \frac{1}{[x]} \frac{1}{[y]} \frac{1}{[z]}$$

z.B.  $\vec{x}$  : Ortsvektor  $\Rightarrow [\delta(\vec{x})] = \frac{1}{\text{Länge}^3}$

• in krummlinigen Koordinaten

Koordinaten  $\{u, v, w\}$  : orthogonales  
Koordinatensystem

Ausatz:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0)$$

$$1 = \int dV \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \Rightarrow \int du dv dw \det(J)$$

$$\gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\det(\gamma)}$$

$$\Rightarrow \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{\det(\gamma)} \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0)$$

Bsp. Kugelkoordinaten

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

Aus Ausgangsmotivation

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta(\vec{x})}$$

Punktladung:

$$\Rightarrow \rho_q(\vec{x}) = q \delta(\vec{x})$$

mit  $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{x})}$$

für Lösung der  
Poisson-Gleichung

# Poisson - Gleichung

Elektrostatik:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \phi_E = -4\pi \rho} \quad (\text{Gauß Einheiten})$$

$$\text{S.I.:} \quad \boxed{\vec{\nabla}^2 \phi_E = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho} \quad (\text{SI})$$

$\phi_E(\vec{x})$ : elektrostatistisches Potential

$\rho(\vec{x})$ : Ladungsdichteverteilung

$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi_E$  : elektrische Feld

Magnetostatik

mit  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  ;  $\vec{A}$  : Vektorpotential

und  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$  bzw.  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  (SI)

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{x}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$\Rightarrow$  Poissonsgleichung für jede Komponente des Vektorpotentials

hier  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  : Coulomb - Gleichung

auch Gravitation

$$\vec{\nabla}^2 \phi_G(\vec{x}) = 4\pi G_N \rho(\vec{x}) ; G_N : \text{Grav. konst.}$$

$\rho$  : Massendichte

$$\Rightarrow \vec{g} = -\vec{\nabla} \phi_G \Rightarrow \vec{F}_G = -m \vec{\nabla} \phi_G \quad \text{vgl. } \vec{F}_E = -q \vec{\nabla} \phi_E$$

# Laplace-Gleichung

= homogene Poisson Gleichung

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \quad \begin{array}{l} \text{elliptische partielle Differentialgl.} \\ \text{zweiter Ordnung} \end{array}$$

für Bereich außerhalb der Ladungsverteilung

→ Lösungen  $\phi$  der Laplace Gleichung sind harmonische Funktionen

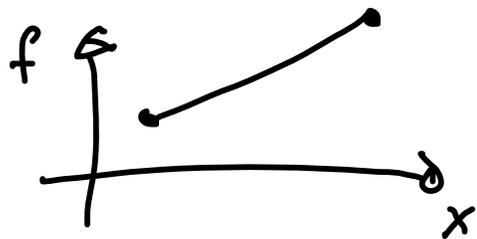
- Eigenschaft:

nimmt keine lokalen Maxima / Minima an

↳ Extremwerte treten nur an den Rändern auf

z.B. 1D Laplace - Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = mx + b$$



→ keine lokalen  
Extrema

⇒ Konsequenz:

Earnshaw - Theorem:

statisches elektrisches Feld kann eine  
Testladung nicht in einem stabilen  
Gleichgewicht halten

⇒ keine (einfache) Ladungsfallen möglich  
aber - Magnetfallen mit Kopplung an mag. Dipol  
möglich  
- magneto-optische Falle (LASER) mit

zeitlich veränderlichem Magnetfeld  
möglich

- Formale Lösung der Poisson-Gleichung  
mit Grenzfunktion

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

wobei  $\nabla_x^2$  oder  $\nabla_{x'}^2$  da  $G$  symmetrisch

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}', \vec{x}) \quad \text{Reziprozität}$$

z.B.  $\vec{x}$ : Ort einer Testladung

$\vec{x}'$ : Ort einer Ladungsquelle

$$\Rightarrow \underline{\text{Lösung}}: G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

für gesamten Raum  $V = \mathbb{R}^3$

d.h. keine weiteren Randbedingungen

bei  $|\vec{x}|, |\vec{x}'| \leq \infty$

$\Rightarrow$  allgemeine Lösung für

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } \left[ \phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right]$$

$$= \int d^3x' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}')$$

= Lösung für  $V = \mathbb{R}^3$

Lösung der Poisson-Gleichung durch Integration

$\hookrightarrow$  Green'sfunktion = Inverse des Laplace-Operators

$$\begin{aligned}
 \text{Test: } \nabla^2 \phi(\vec{x}) &= \nabla_x^2 \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
 &= \int d^3x' \rho(\vec{x}') \underbrace{\nabla_x^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{= -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')} = -4\pi \int d^3x' \rho(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\
 &= -4\pi \rho(\vec{x})
 \end{aligned}$$

Lösung mit Kantenbedingungen  
 mit 2. Green'scher Identität  
 (4 → 6)

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int d^3x' (\phi(\vec{x}') \Delta_x G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \Delta_x \phi(\vec{x}')) \\
 \downarrow \\
 = \int_{\partial V} [\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}_x G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}_x \phi(\vec{x}')] \cdot d\vec{F}'
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \Delta_{x'} G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\Delta_{x'} \phi(\vec{x}') = -4\pi \rho(\vec{x}')$$

$$\Rightarrow \int_U d^3x' (\phi \Delta G - G \Delta \phi) = -4\pi \phi(\vec{x}) + 4\pi \int_U d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}')$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \int_U d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial U} [\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}_{x'} G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}')] \cdot d\vec{F}'$$

$\Rightarrow$  Lösung in einem beschränkten Raumgebiet  $U$  (" $U \subset \mathbb{R}^3$ ")

⇒ Randbedingungen

$\phi(\vec{x})$  auf  $\partial V$  oder

$\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$  auf  $\partial V$  müssen bekannt sein

⇒ Poisson- / Laplace-Gleichung

= Randwertproblem

mit  $\Delta G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$

⇒ allgemeine Lösung:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}')$$

mit  $\Delta F(\vec{x}, \vec{x}') = 0$  muß Laplace-Gleichung erfüllen

mit  $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$  auf  $\partial V$  für  $\vec{x}'$

$\Rightarrow$  Dirichlet Randbedingung

$\Rightarrow \phi(\vec{x})$  ist auf  $\partial V$  vorgegeben

(z.B. geerdete Metallplatte, an Spannungsquelle angeschlossener Leiter)

$$\Rightarrow \left( \phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} (\phi(\vec{x}') \vec{\nabla} G(\vec{x}, \vec{x}')) \cdot d\vec{F}' \right)$$

für Dirichlet Randbedingungen

2. Möglichkeit

123

$$\text{mit } \left( \vec{\nabla}_{\vec{x}}, \mathcal{G}_N(\vec{x}, \vec{x}') \right) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{x}' \in \partial V} = - \frac{4\pi}{F} ; \vec{n} = \text{Flächen-} \\ \text{normale}$$

$$\equiv \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta} \Big|_{\vec{x}' \in \partial V}$$

$F$ : Flächeninhalt  
der Randfläche

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' \mathcal{G}_N(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') \\ + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left( \mathcal{G}_N(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \phi(\vec{x}') \right) \cdot d\vec{F}' \\ + \frac{1}{F} \oint_{\partial V} \phi(\vec{x}') dF$$

$$\underbrace{\phantom{\frac{1}{F} \oint_{\partial V} \phi(\vec{x}') dF}}_{\langle \phi \rangle_{\partial V}} = \text{Mittelwert von } \phi \\ \text{über } \partial V = F \Rightarrow \text{konstante}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\partial V} = (\vec{\nabla} \phi(\vec{x})) \cdot \vec{n} \quad ; \text{ ist } \underline{\text{vorgegeben}}$$

Neumann Randbedingung

z.B. isolierter Leiter  $\Rightarrow$  bekanntes  $\vec{E}$ -Feld an einer Oberfläche

Bemerkung

$$\frac{\partial G}{\partial n'} \neq 0$$

$$\oint (\nabla G) \cdot d\vec{F} = \int d^3x \nabla \cdot (\nabla G) = -4\pi \int d^3x \delta(\vec{x} - \vec{x}') = -4\pi$$

↑  
Gauß

- Eindeutigkeit der Lösung

$$\Delta \phi(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x}) ; \quad \Delta \tilde{\phi}(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x})$$

Annahme:  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  sind verschiedene Lösungen

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} [\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}_{x'} G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}')].$$

analog für  $\tilde{\phi}$

1) Dirichlet Randbedingungen

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) - \tilde{\phi}(\vec{x})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} d\vec{F}' \cdot [\phi(\vec{x}') - \tilde{\phi}(\vec{x}')] \vec{\nabla}_{x'} G(\vec{x}, \vec{x}')$$

$$= 0 \quad \text{da } \phi = \tilde{\phi} \text{ auf } \partial V$$

$\Rightarrow \phi(\vec{x})$  und  $\tilde{\phi}$  sind identische Lösungen

2) Neumann Randbedingungen

$$\begin{aligned} \phi - \tilde{\phi} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\tilde{\mathbf{r}}' \cdot [\vec{\sigma}_{\mathbf{x}'} \phi(\mathbf{x}') - \vec{\nu}_{\mathbf{x}'} \tilde{\phi}(\mathbf{x}')] G(\vec{x}, \vec{x}') \\ &\quad - \langle \phi \rangle_{\partial V} + \langle \tilde{\phi} \rangle_{\partial V} \\ &= - \langle \phi \rangle_{\partial V} + \langle \tilde{\phi} \rangle_{\partial V} = \text{const.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  physikalisch identische Lösungen

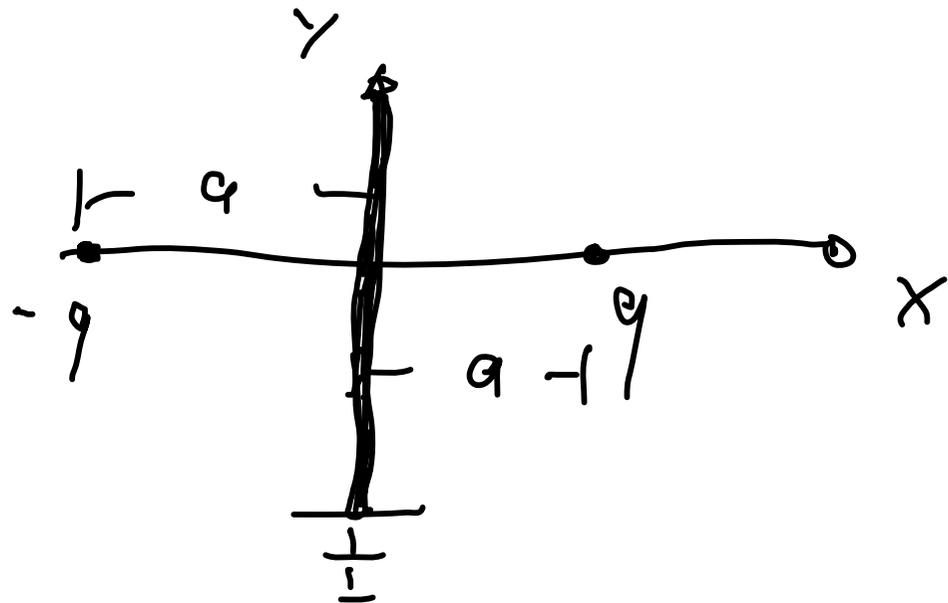
$\Rightarrow$  Konsequenz

konstruierte, lineare Lösung der Poisson-Gleichung, die die Randbedingung erfüllt ist einzigartig

# Bsp.: Methode der Spiegelladung

127

- Punktladung vor geerdeter Metallplatte



betrachte nur das  
Halbfeld für  $x \geq 0$   
 $V \subset \mathbb{R}^3$

Ladungsdichte:  $\rho(\vec{x}) = q \delta(\vec{x} - \vec{a})$ ;  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

+ Randbedingung:  $\phi(\vec{x}) = 0$  für  $x = 0$

$\Rightarrow$  Dirichlet Randbedingung

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \text{ auf } \partial V \text{ für } \vec{x}' = 0$$

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \overline{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}')$$

128

$$= \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}'|} \quad \text{mit } \vec{x}' = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}'|} = 0 \quad \text{da } |\vec{x} + \vec{a}| > 0$$

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' q \delta(\vec{x}' - \vec{a}) \left[ \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}'|} \right]$$

(kein Flächenintegral notwendig,  
da  $\phi = 0$  auf  $\partial V$ )

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x} - \vec{a}|} + \frac{-q}{|\vec{x} + \vec{a}|}$$

Potential zweier  
Punktladungen  
bei  $x = \pm a$   
mit Ladung  $\pm q$

# Elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \quad \left( \text{SI} : \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\vec{x}-\vec{a}|} - \frac{q}{|\vec{x}+\vec{a}|} \right) \right)$$

bzw. mit Flächenladungsdichte

$$\sigma = - \left( \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \cdot \vec{n} \right) \Big|_{\partial V} = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\phi}{\partial u} \Big|_{\partial V}; \quad \vec{n} = \vec{e}_x \quad \text{Flächennormale}$$

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n} \quad \left( \text{SI} : \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \right)$$

$$\sigma = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\phi}{\partial u} \Big|_{x=0} = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{q(x-a)}{|\vec{x}-\vec{a}|^3} - \frac{q(x+a)}{|\vec{x}+\vec{a}|^3} \right]_{x=0}$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \frac{2aq}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \text{induzierte Flächenladung}$$

gesamte induzierte Ladung

130

$$q_{\text{ind}} = \int d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x})$$

$$= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr r \frac{1}{2\pi} \frac{q a}{\underbrace{(a^2 + r^2 + z^2)^{3/2}}_{= r^2}} = -q a \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}}}_{1/a}$$

Zylinderkoordinaten

$\Rightarrow q_{\text{ind}} = -q \Rightarrow$  induzierte Gesamtladung  
= negative Punktladung  $q$

$\Rightarrow$  Ladung  $q$  wird von induzierter Ladung  
angezogen

⇒ Kraft auf Ladung  $q$  wird von  
Spiegelladung ausgeht  $\vec{x} = -\vec{a}$  ( $x = -a$ ) 131

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{q^2}{(2a)^2} \vec{e}_x \quad \left( \text{SI: } \vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2} \vec{e}_x \right)$$

$$\vec{F} \neq q \vec{E} = -2q^2 \frac{1}{a^2}$$

↳ für Berechnung mit Flächenladungsdichte

$$\Rightarrow \vec{F} = -q \int d^2x \sigma(\vec{x}) \frac{\vec{x} - \vec{a}}{|\vec{x} - \vec{a}|^3}$$

# Lösung der Poisson-Gleichung

132

## Zusammenfassung

- Dirichlet Randbedingungen

- $\phi(\vec{x})|_{\partial U}$  Potential am Rand  $\partial U$  vorgegeben

- Greensfunktion

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}')$$

$$\text{mit } G_D(\vec{x}, \vec{x}')|_{\partial U} = 0$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \int_U d^3x' \rho(x') G_D(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} d\vec{F} \cdot (\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}_{\vec{x}} G_D(\vec{x}, \vec{x}'))$$

- von Neumann Randbedingung

$$- \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) \cdot \vec{n} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\partial V} \quad \text{auf Rand vorgegeben}$$

$$- \left. \frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n} \right|_{\partial V} = - \frac{4\pi}{F} \quad F: \text{Flächeninhalt von } \partial V$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') G_N(\vec{x}, \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\vec{F} \cdot (G_N(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}'))$$

# Fourier-Integrale

134

↳ Erweiterung der Fourierreihe auf nicht-periodische Funktionen

- Fourierreihe periodischer Funktion  $f(x)$  mit Periode  $\ell$

$$\text{d.h. } f(x) = f(x + \ell)$$

$$\Rightarrow \left. f(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{i 2\pi / \ell r x} \right\} \text{Fourierreihe}$$

$$\text{mit } \left| c_r = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) e^{-i r 2\pi / \ell x} dx \right|$$

# Satz von Dirichlet

135

wenn  $f(x)$  überall stetig

$\Rightarrow$  Fourierreihe von  $f$  konvergiert gleichmäßig und absolut

wenn  $f(x)$  unstetig bei  $x$

$$\Rightarrow \text{FK}[f](x) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon))$$

d.h. Mittelwert an der Sprungstelle

- Fourierdarstellung auch für nicht-periodische Funktionen möglich?

reelle Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{\pi}{c} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{c} nx\right) \right]$$

$$\text{hier: Periode} = 2c \quad ; \quad f(x) = f(x+2c)$$

$$\text{mit } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(y) \cos\left(\frac{\pi}{l} n y\right) dy; \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(y) dy \quad 136$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(y) \sin\left(\frac{\pi}{l} n y\right) dy$$

für nicht-periodische Funktionen:

↳ Grenzwert  $l \rightarrow \infty$

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(y) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{l} n y\right) \cos\left(\frac{\pi}{l} n x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{l} n y\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} n x\right) \right] dy$$

$$\text{mit } \left. \begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \end{aligned} \right\} \cos(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2e} \int_{-e}^e f(y) dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} \int_{-e}^e f(y) \cos\left(\frac{\pi}{e} n(x-y)\right) dy \quad 137$$

betrachte Grenzwert  $e \rightarrow \infty$

$$1. \text{ Summand } \left| \frac{1}{2e} \int_{-e}^e f(y) dy \right| \leq \frac{1}{2e} \int_{-e}^e |f(y)| dy \leq \frac{1}{2e} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy$$

absolut integrierbar

$$\Rightarrow \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{1}{2e} \int_{-e}^e f(y) dy = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{e \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} \int_{-e}^e f(y) \cos\left(\frac{\pi}{e} n(x-y)\right) dy$$

$$\text{mit } h_1 = \frac{\pi}{e}; \quad h_2 = \frac{2\pi}{e}, \quad \dots \quad h_n = \frac{\pi}{e} n$$

$$\Delta h = h_{n+1} - h_n = \frac{\pi}{e}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{\infty} \Delta h \int_{-l}^l f(y) \cos(h(x-y)) dy$$

138

mit  $\sum \Delta h \rightarrow \int dh$  und  $l_n \rightarrow l$   
 von diskreten zu kontinuierlichen Variablen

$$\Rightarrow \left[ f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dh \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos(h(x-y)) dy \right]$$

Fourierintegral der Funktion  $f(x)$

Erweiterung des FI in den komplexen Raum

$$\cos(h(x-y)) = \cos(-h(x-y))$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos(h(y-x)) dy$$

mit komplexer Erweiterung

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{ih(y-x)} dy$$

komplexe Fourierintegral

Fouriertransformation

mit 
$$g(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{ihy}$$

Spektral-  
funktion

= Fouriertransformation von f

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{-ikx}}$$

140

Rücktransformation, inverse Fourier transform

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{ik(y-x)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(y-x)}}_{2\pi \delta(y-x)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \delta(y-x)$$

$$= f(x)$$

## ⇒ Fouriertransformation

kontinuierliche Abbildung einer Funktion vom  
 "Ortsraum" (auch jede andere Variable, z. B.  
 Zeit + möglich) in den Spektralraum  
 mit Frequenzen 'h' ( $t \rightarrow \omega$ )

$$\left( \hat{F}[f](h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{ihx} \right) = F(h)$$

Fouriertransformation

$$\left( f(x) = \hat{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dh \hat{F}[f](h) e^{-ihx} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dh F(h) e^{-ihx}$$

# Rücktransformation

142

Bemerkung: viele verschiedene Konventionen

$$\hat{F}[f](\omega) = \int dx f(x) e^{\pm 2\pi i \omega x} \Leftrightarrow f(x) = \int d\omega \hat{F}(\omega) e^{\mp 2\pi i \omega x}$$

$$\int d\omega e^{2\pi i \omega (x-y)} = \delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega(x-y)}$$

$$\hat{F}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int dx f(x) e^{\pm i\omega x} \Leftrightarrow f(x) = \int d\omega \hat{F}(\omega) e^{\mp i\omega x}$$

$$\hat{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx f(x) e^{\pm i\omega x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{F}(\omega) e^{\mp i\omega x}$$

Wichtig: konsistente Normierung

↳ d.h. Rücktransformation muß wieder  $f(x)$  ergeben

Bsp.: Harmonische Schwingung

193

$$f(t) = \sin(\omega_s t)$$

$$= \frac{1}{2i} (e^{i\omega_s t} - e^{-i\omega_s t})$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \frac{1}{2i} (e^{i\omega_s t} - e^{-i\omega_s t})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dt [e^{i t(\omega + \omega_s)} - e^{i t(\omega - \omega_s)}]$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} (\delta(\omega + \omega_s) - \delta(\omega - \omega_s))$$

Filterfunktion für die Frequenz  $\omega_s$   
der Schwingung  $f(t)$

Bsp.  $\delta$ -Funktion: Quall / Explosion

144

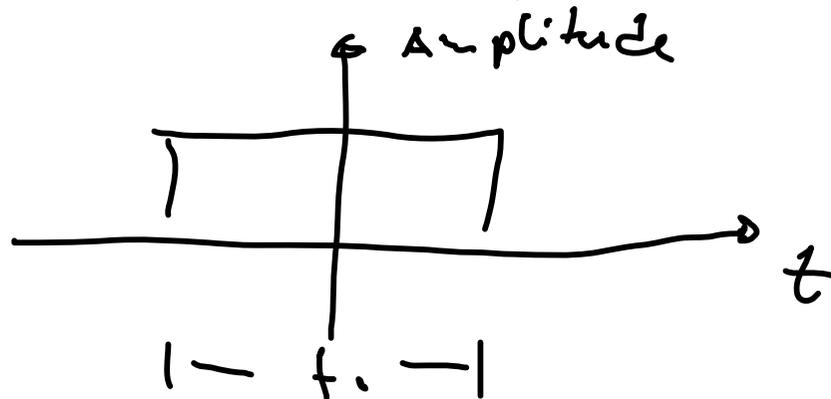
$$f(t) = \delta(t - t_0)$$

$$\hat{f}[\omega] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \delta(t - t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t_0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos(\omega t_0) + i \sin(\omega t_0))$$

Quall mit zeitlicher Unschärfe

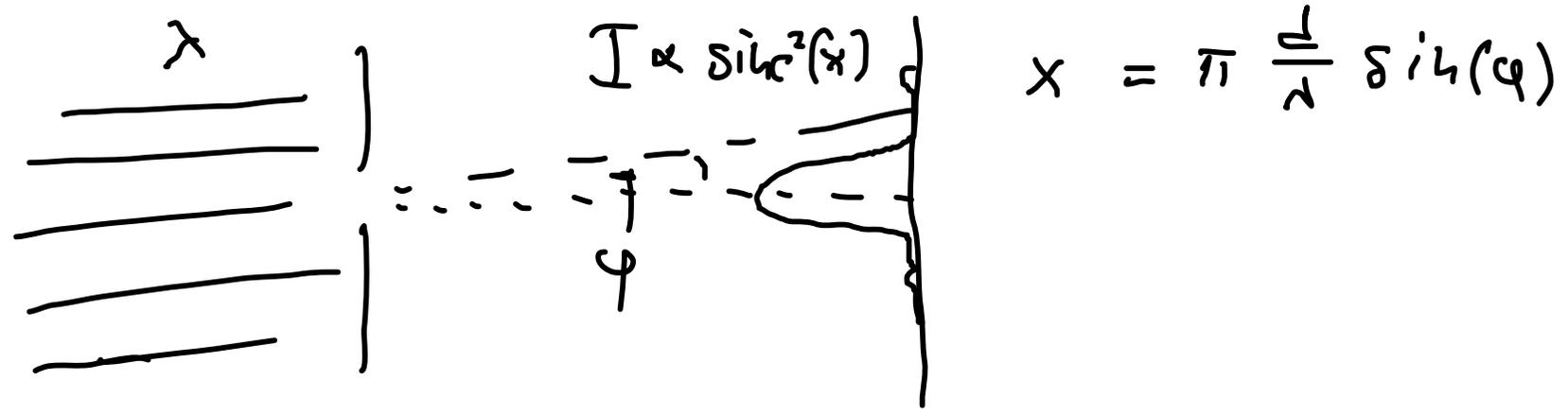
↳ Rechteckimpuls



$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -t_0/2 \leq t \leq t_0/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_0/2}^{t_0/2} dt e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t} \Big|_{-t_0/2}^{t_0/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} \left[ \cos(\omega t_0/2) - \cos(-\omega t_0/2) \right. \\ &\quad \left. + i \sin(\omega t_0/2) - i \sin(-\omega t_0/2) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega t_0/2)}{\omega} \quad \begin{matrix} x = \omega t_0/2 \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t_0 \frac{\sin(x)}{x} \end{matrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t_0 \operatorname{sinc}(x) \quad \text{"sineus cardinalis"} \end{aligned}$$

auch: Beugung am Spalt mit Öffnung d



# Eigenschaften der FT

146

- Linearität

$$\hat{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)](\omega) = \alpha \hat{F}[f](\omega) + \beta \hat{F}[g](\omega)$$

- Verschiebung des Arguments

$$\begin{aligned}\hat{F}[f(t-t_0)] &= \hat{F}[f(t)] e^{i\omega t_0} = F(\omega) e^{i\omega t_0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t-t_0) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{i\omega(t'+t_0)} \\ &= \int dt' f(t') e^{i\omega t'} e^{i\omega t_0} = F(\omega) e^{i\omega t_0}\end{aligned}$$

$t' = t - t_0 \rightarrow t = t' + t_0$

- Skalierung

$$\hat{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \int dt f(at) e^{i\omega t} = \frac{1}{|a|} \int dt' f(t') e^{i\frac{\omega}{a}t'}$$

- Verschiebung der Frequenz

$$\hat{F}[f(t)e^{-i\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0) = \int dt f(t)e^{it(\omega - \omega_0)}$$

- Differentiation

$$\hat{F}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = (i\omega)^n \hat{F}[f](\omega) = (i\omega)^n F(\omega)$$

Beweis  $\hat{F}[f'](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f'(t) e^{i\omega t} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \frac{d}{dt} e^{i\omega t} + \underbrace{f e^{i\omega t}}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty}$

$$= -i\omega F(\omega)$$

- 1)  $f(t) = f(-t) \in \mathbb{R}$  und gerade

$$\Rightarrow F(\omega) = F(-\omega) = \overline{F(\omega)} \in \mathbb{R}$$

ℜ c.c.

$$2) f(t) = -f(-t) \in \mathbb{R} \text{ ungerade}$$

148

$$\Rightarrow F(\omega) = -F(-\omega) = -\overline{F(\omega)} \text{ imaginär} \\ \text{+ ungerade}$$

$$\text{74 1) } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(-t) e^{i\omega t}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}$$

$$= F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$$

$$2) F(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} dt f(-t) e^{i\omega t} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = -\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = -F(\omega) \\ = -\overline{F(\omega)}$$

- Faltungssätze

Def: Faltung

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(t - \tau) g(\tau)$$

$$\begin{aligned} 1) \hat{F}[f * g](\omega) &= \sqrt{2\pi} \hat{F}[f](\omega) \cdot \hat{F}[g](\omega) \\ &= \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(t - \tau) g(\tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(\tau) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t - \tau) e^{i\omega t}}_{F(\omega) e^{i\omega \tau}}$$

$$= F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(\tau) e^{i\omega\tau} \quad 150$$

$$= \sqrt{2\pi} F(\omega) \cdot G(\omega)$$

$$2) \hat{F}[f \cdot g](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{F}[f](\omega) * \hat{F}[g](\omega)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\omega) * G(\omega)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' F(\omega - \omega') G(\omega')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i(\omega - \omega')t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t') e^{i\omega't'}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{i\omega'(t' - t)}}_{\delta(t' - t)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) g(t) e^{i\omega t}$$

151

Bsp. Faltung: Autokorrelation  
muss Zeit über die eine Funktion  
ein "Gedächtnis" hat

Rechtecksimpuls:  $f(t) \begin{cases} = 1 & \text{für } |t| \leq t_0/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\Rightarrow \hat{F}[f * f](\omega) = \sqrt{2\pi} F^2(\omega) \quad \text{ohne Berechnung der Autokorrelation}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t_0^2 \operatorname{sinc}^2 x \quad \text{mit } x = \frac{\omega t_0}{2}$$

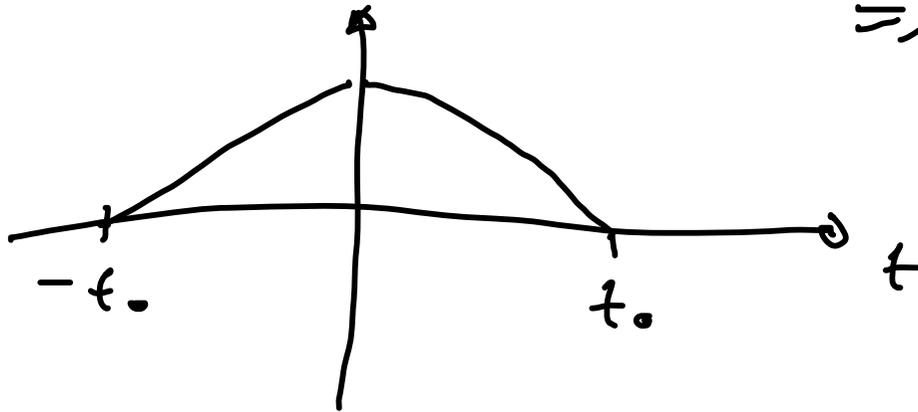
Autokorrelation der Rechtecksfunktion

152

$$(f * f)(t) = g(t) = \begin{cases} t_0 - |t| & \text{für } -t_0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hatfunktion

$$\Rightarrow \hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t_0^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega t_0}{2}$$



### Parseval Theorem

Energie eines Signals im Zeit-Raum  
= Energie im Frequenzraum

$$\begin{aligned}
 \bar{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |F(\omega)|^2 & 153 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left( \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{i\omega t'} \right)^* \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f^*(t') e^{-i\omega t'} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' f^*(t') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')}}_{\delta(t-t')} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) f^*(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2
 \end{aligned}$$

z.B.

EM-Wellen

$$E_{EM} = \frac{1}{2} \int d^3x \left( \frac{\vec{B}(\vec{x})^2}{4\pi} + \frac{\vec{E}(\vec{x})^2}{4\pi} \right) = \frac{1}{2} \int d^3x \left( \frac{|\vec{B}(\vec{x})|^2}{4\pi} + \frac{|\vec{E}(\vec{x})|^2}{4\pi} \right)$$

• Fixpunkt  
 $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$  Gauß-, Normalverteilung

$\hat{\mathcal{F}}[\varphi](\omega) = \varphi(\omega)$  d.h.  $\varphi$  ist Eigenfunktion  
 der Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}[\varphi](\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{1}{2}(t-i\omega)^2}}_{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \end{aligned}$$

# Fouriertransformationen in mehr Dimensionen

155

$$\text{z.B. } \vec{x} = \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3$$

$$f(\vec{x}) = f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$$

$$\hat{F}[f](\vec{k}) = F(k_x, k_y, k_z)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz f(x, y, z) e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x f(\vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

---

---

Bsp. extern getriebene Schwingung

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = h(t) ; h(t) = A \sin(\omega_e t)$$

$$\text{FT: } [(-i\omega)^2 - 2\gamma i\omega + \omega_0^2] Y(\omega) = H(\omega)$$

$$Y(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[y](\omega) ; H(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[h](\omega)$$

$$H(\omega) = \sqrt{2\pi} A \frac{1}{2i} (\delta(\omega + \omega_e) - \delta(\omega - \omega_e))$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{H(\omega)}{-\omega^2 - 2\gamma i\omega + \omega_0^2}$$

$\Rightarrow y(t)$  aus Rücktransformation

$$\Rightarrow y(t) = A \frac{\sin(\omega_e t)}{\omega_0^2 - \omega_e^2 - 2\gamma i\omega_e}$$

Bsp. Poisson-Gleichung

157

$$\Delta \phi(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x})$$

$$\Rightarrow (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \phi(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x})$$

$$\text{FT: } -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \hat{\phi}(\vec{k}) = -4\pi \hat{Q}(\vec{k})$$

$$\text{mit } \hat{\phi}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{x})$$

$$\hat{Q}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \rho(\vec{x})$$

$$\hat{\phi}(\vec{k}) = \frac{4\pi \hat{Q}(\vec{k})}{k^2}$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{\hat{Q}(\vec{k})}{k^2}$$

# Elektrodynamik & Relativität

158

1905: A. Einstein "Zur Elektrodynamik bewegter Körper"

- Auflösung offenkundiger Widersprüche /  
Asymmetrien

z.B. Bewegte Ladung erzeugt Magnetfeld  
↳ im mitbewegten System kein  
Magnetfeld?

↳ Erzeugung von Elektromotorischer  
Kraft: Bewegung der Leiterschleife  
oder Magnetfeld erzeugt

$$\vec{F}_{EMK} = \frac{d\Phi}{dt}$$

⇒ mögliche Erklärungen:

159

- absoluter Raum gefüllt mit Äther
  - ↳ alle Bewegungen relativ zu ruhender Äther
    - Äther nie nachgewiesen
    - Ausbreitung EM-Wellen mit Lichtgeschw.  $c$  in alle Richtungen gleich (obwohl sich die Erde dreht, um die Sonne bewegt; Sonne um gal. Zentrum)
- Physik ist Lorentz-invariant anstatt Galilei-invariant
  - + Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen

Konsequenzen:

- E, B zwei Seiten einer Medaille

=> Elektromagnetismus

- Newton's absolutes Raum-Zeit Weltbild  
müß aufgegeben werden

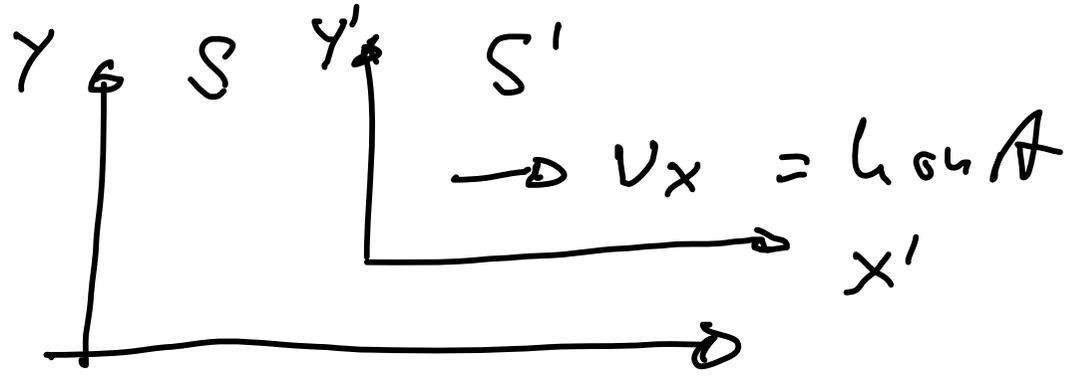
- Längenkontraktion, Zeitdilatation

-  $E = mc^2$

Spezielle Relativitätstheorie

zwei Postulate

1) Jedes Inertialsystem ist physikalisch identisch  
bzw. Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen  
die gleiche Form = Forminvariant



geleitet aus Newtonscher Physik  
 ↳ Galilei-Transformation:  $x' = x - v_x t$ ,  $t' = t$

2) Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen  
 Bezugssystemen identisch

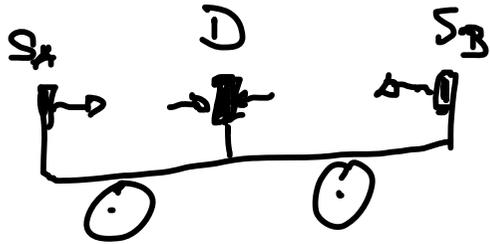
$$c = 2.99792 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 300.000 \text{ km/s}$$

$$\approx 10^9 \text{ km/h}$$

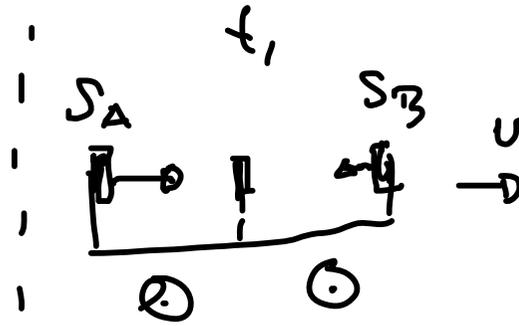
$$= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

# konsequenzen

①

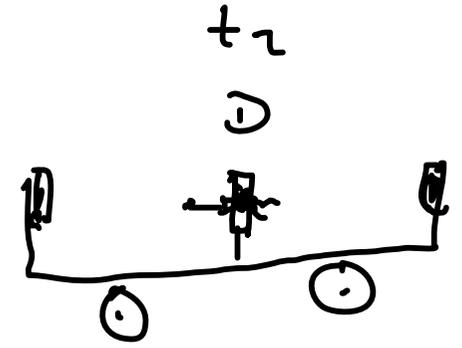


Externe und interne  
Physiker stimmen  
mit allen Beobachtungen  
überein: Lichtsignale  
werden gleichzeitig von  
 $S_A, S_B$  abgestrahlt wenn  
gleichzeitig bei  $D$  empfangen



Externe und interne Physiker  
stimmen nicht, daß Signale  
gleichzeitig abgestrahlt wurden,  
wenn sie gleichzeitig bei  $D$   
ankommen

⇒ Konzept der absoluten Gleichzeitigkeit muß  
aufgegeben werden  
↳ Gleichzeitigkeit hängt von Beobachter ab



⇒ Transformation zwischen Inertialsystemen  
maß Zeit mit berücksichtigten ( $t' \neq t$ )

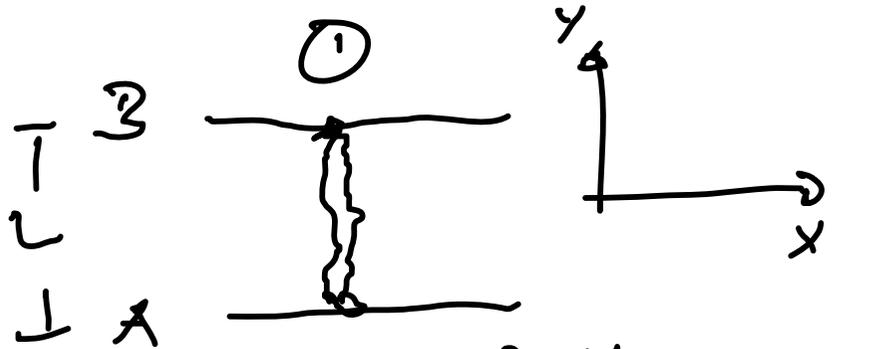
163

$$\Rightarrow S: (t, x, y, z) \longrightarrow S': (t', x', y', z')$$

⇒ RAUMZEIT : Einheit von Raum + Zeit  
in 4-dimensionalen  $\mathbb{R}^4$

Raum: bestimmt durch Geometrie

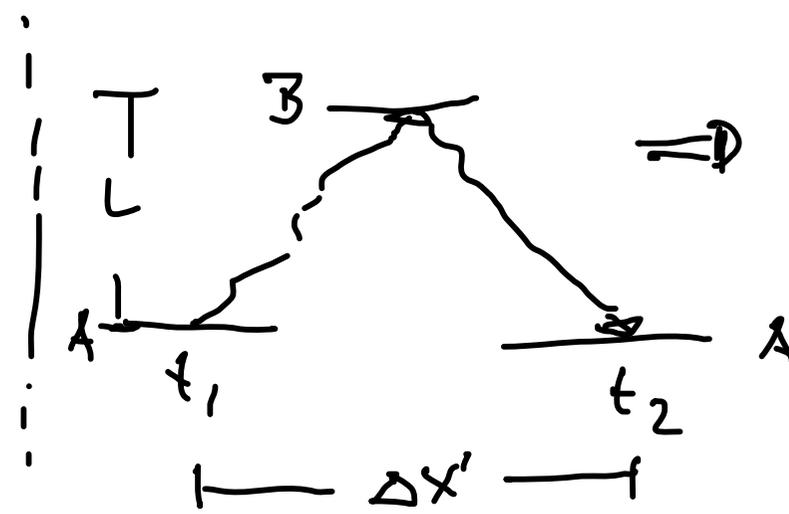
- Geometrie der flachen RAUMZEIT ?
- Welche Transformationsvorschrift gilt ?



Lichtlaufzeit:

$$\Delta t = 2L/c$$

$$\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta z = 0$$



Experiment  
mit Geschw.  
 $v_x$

$$\Delta t' = 2\sqrt{L^2 + (\Delta x'/2)^2} / c$$

Annahme: - transversalen Richtungen  
bleiben unverändert  
- 3D Raum ist Euklidisch

$L + c$ : unverändert

$$c^2(\Delta t)^2 = 4L^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

$$\Rightarrow c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$$

$\Rightarrow$  invariante Linienelement

$$\boxed{(\Delta S)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}$$

bzw. infinitesimal:

$$\boxed{dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Linienelement der flachen RAUMZEIT

$\Rightarrow$  Minkowski RAUMZEIT

mit 4er Ortsvektor

$$x^\mu = (ct, x, y, z) ; \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \eta_{\mu\nu}$$

beschreibt  
 RAUMZEIT  
 Geometrie

=> Linienelement:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

• Transformationsvorschrift

beim Wechsel zwischen Inertialsystemen

Linienelement (= Länge in der 4D RAUMZEIT)

maß invariant bleiben

$$ds^2 = cd t'^2 - dx'^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

nur Verschiebung in x-Richtung mit Geschw.  $v$

Transformation with  $2 \times 2$  Matrix

167

( $c=1$ )

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} t' &= at + bx \\ x' &= et + fx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ds^2 &= dt'^2 - dx'^2 = dt^2 - dx^2 \\ &= (adt + bdx)^2 - (et + fdx)^2 \\ &= (a^2 - e^2)dt^2 + (b^2 - f^2)dx^2 + 2(ab - ef)dt dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a^2 - e^2 &= 1 \\ b^2 - f^2 &= -1 \\ ab - ef &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Lösung:}$$

$$\begin{aligned} a = f &= \cosh \Theta \\ b = e &= \sinh \Theta \end{aligned}$$

$$\cosh^2 \Theta - \sinh^2 \Theta = 1$$

# ⇒ Lorentz - Transformation

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Theta & \sinh \Theta \\ \sinh \Theta & \cosh \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

in 4D - Raumzeit

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Theta & \sinh \Theta & 0 & 0 \\ \sinh \Theta & \cosh \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Verknüpfung mit Relativgeschwindigkeit  $v$

$$\Theta = \Theta(v) ?$$

Teilchen in  $S'$  in Ruhe bewegt sich mit Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung in  $S$

$$x' = 0$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Theta & \sinh \Theta \\ \sinh \Theta & \cosh \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = \sinh \Theta ct + \cosh \Theta x$$

$$\text{mit } v = \frac{x}{t} \Rightarrow v = -c \frac{\sinh \Theta}{\cosh \Theta} = -c \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 \Theta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cosh \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \equiv \gamma} \quad \gamma: \text{Lorenz faktor}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sinh \Theta = -\frac{v}{c} \cosh \Theta = -\beta \gamma}$$

# Lorentz - Transformation

170

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' &= \gamma (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

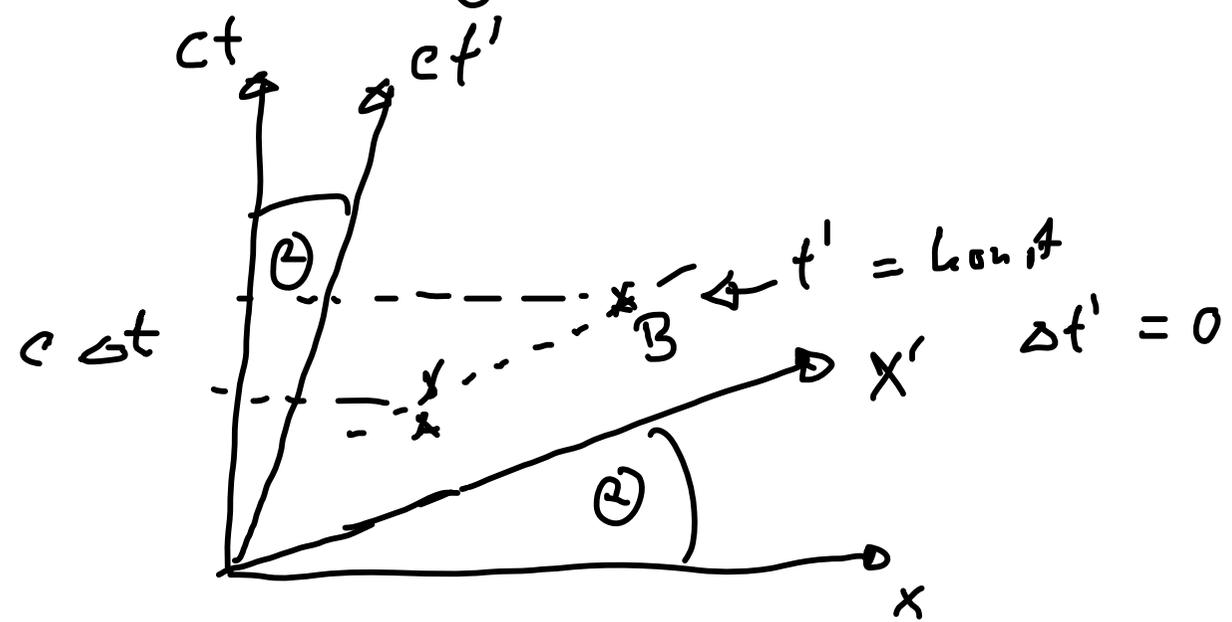
Relativbewegung  
mit  $v$  in  
 $x$ -Richtung

inverse Transformation :  $v \rightarrow -v$

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \\ x &= \gamma (x' + vt') \end{aligned}$$

Konsequenzen der Lorentztransformation

• Gleichzeitigkeit  
 mit Kz-Diagrammen:



$S'$  bewegt sich  
 relativ zu  $S$  mit  
 $v = -c \tanh \Theta$   
 $A, B$  sind  
 gleichzeitig in  $S'$

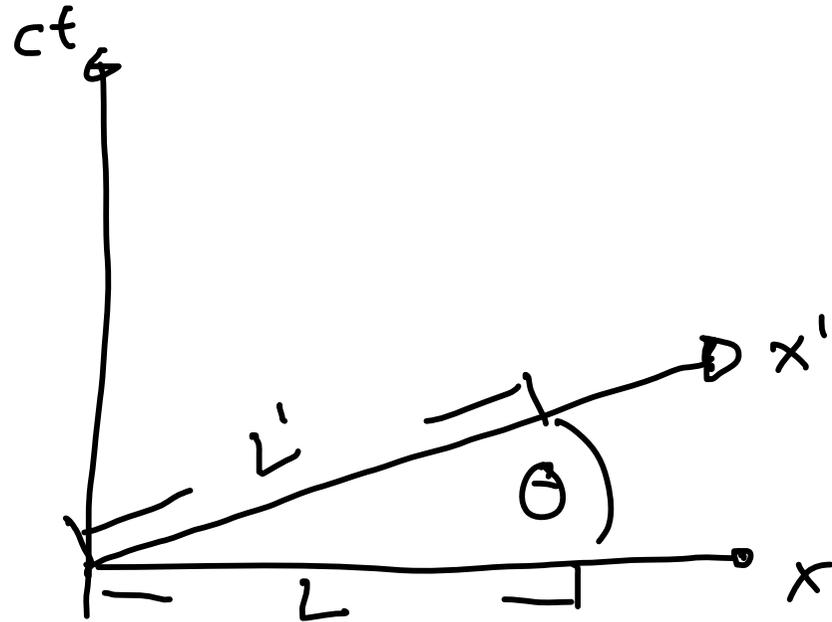
$\vec{e}_{ct'} \perp \vec{e}_{x'}$

$$\Delta s^2 = \underbrace{(c \Delta t')^2}_{=0} - (\Delta x')^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

mit  $\Delta x = \gamma (\Delta x' - \underbrace{v \Delta t'}_{=0})$

$\Rightarrow \Delta t = \gamma \frac{v}{c^2} \Delta x' \Rightarrow A$  und  $B$  sind nicht gleichzeitig in  $S$

• Längenkontraktion (Lorentz-Kontraktion)



$L$  : Länge einer Stange  
in dessen Ruhesystem

"Länge" eines Objekts:  
gleichzeitige Messung  
der Enden

$$(c \Delta t)^2 - L^2 = \underbrace{(c \Delta t')^2}_{=0} - L'^2$$

mit  $\Delta t = \gamma \left( \underbrace{\Delta t'}_{=0} + \frac{v}{c^2} L' \right)$

$$\Rightarrow L'^2 (1 + \beta^2 \gamma^2) = L^2 \quad (1 + \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2)$$

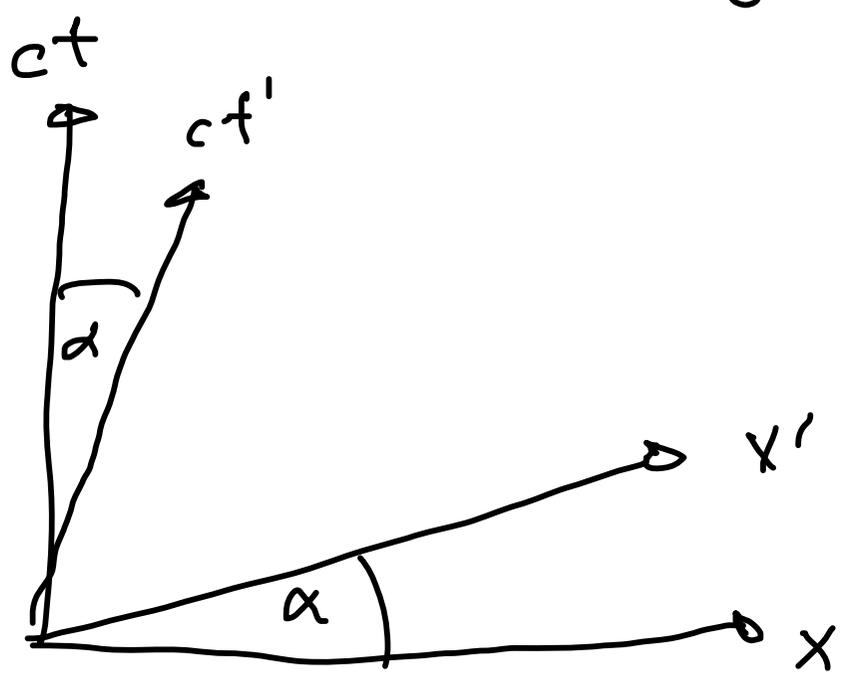
$$\Rightarrow \boxed{L' = L/\gamma} = L \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

bewegter Stab ist kürzer

$\Rightarrow$  Längenkontraktion

Einschub: Minkowski Diagramme

$\rightarrow$  Darstellung verschiedener Inertialsysteme



Darstellung von  $S'$  mit Achsen  $ct'$ ,  $x'$

$x'$ -Achse = gleichzeitige Ereignisse mit  $ct' = \text{konst}$

$\hookrightarrow t' = 0$

$$= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{ct}{x} = \frac{v}{c}$$

$t'$ -Achse: bei  $x' = \text{konst}$  bzw.  $x' = 0$  174

$$x' = 0 = \gamma(x - vt) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{ct}{x} = \frac{v}{c}$$

wichtig:  $\vec{e}_{ct'}$  und  $\vec{e}_{x'}$  stehen senkrecht aufeinander  
in Minkowski-Geometrie:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_t \\ a_x \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_t \\ b_x \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_t b_t - a_x b_x$$

Verwendung für Darstellung von  
Längenkontraktion, Zeitdilatation, etc.

für quantitative Beschreibung:

Skalierung der Achsen Einheiten

$$U' = U \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}} \quad \text{für Achsen } (ct', x')$$

# Längenkontraktion

- sehr kleiner Effekt im Alltag

z.B. schnelleres Auto:  $360 \text{ km/h} = 100 \text{ m s}^{-1} \approx 3.3 \times 10^{-7} c$

$$\frac{\Delta L}{L} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 10^{-13}$$

- Geschwindigkeit:  $v \approx 10 \text{ Ma} = 3000 \text{ m s}^{-1} \approx 10^{-5} c$

$$\Rightarrow \frac{\Delta L}{L} \approx 10^{-10}$$

# Zeitdilatation

bewegte Uhren gehen langsamer als ruhende Uhren

"Uhren": alle physikalischen, biologischen, ...

Zeitmessungen

$\Delta t_{\text{bewegt}} = \Delta t_{\text{ruhe}} / \gamma$

z.B. Myonen: werden in Atmosphäre ( $\approx 10$  km) 176  
durch kosmische Strahlung erzeugt  
 $\tau \sim 2 \mu\text{s} \rightarrow d \sim 600$  m  
aber: Myonen werden in Bodenschichten  
nachgewiesen

### Addition von Geschwindigkeiten

betrachte Geschwindigkeit eines Teilchens in  $S$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

gemessene Geschwindigkeit in  $S'$ : bewegt  
sich mit  $v$  relativ zu  $S$  in  $x$ -Richtung

$$u'^x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)} = \frac{dt(dx/dt - v)}{dt(1 - \frac{v}{c^2} dx/dt)}$$

$$\Rightarrow \boxed{u'^x = \frac{u^x - v}{1 - u^x v / c^2}}$$

für  $u^x = c$

$$\Rightarrow u'^x = c$$

in allen Inertialsystemen

$$u'^y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma dt (1 - v/c u^x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{u'^y = \frac{1}{\gamma} \frac{u^y}{1 - v u^x / c^2}}$$

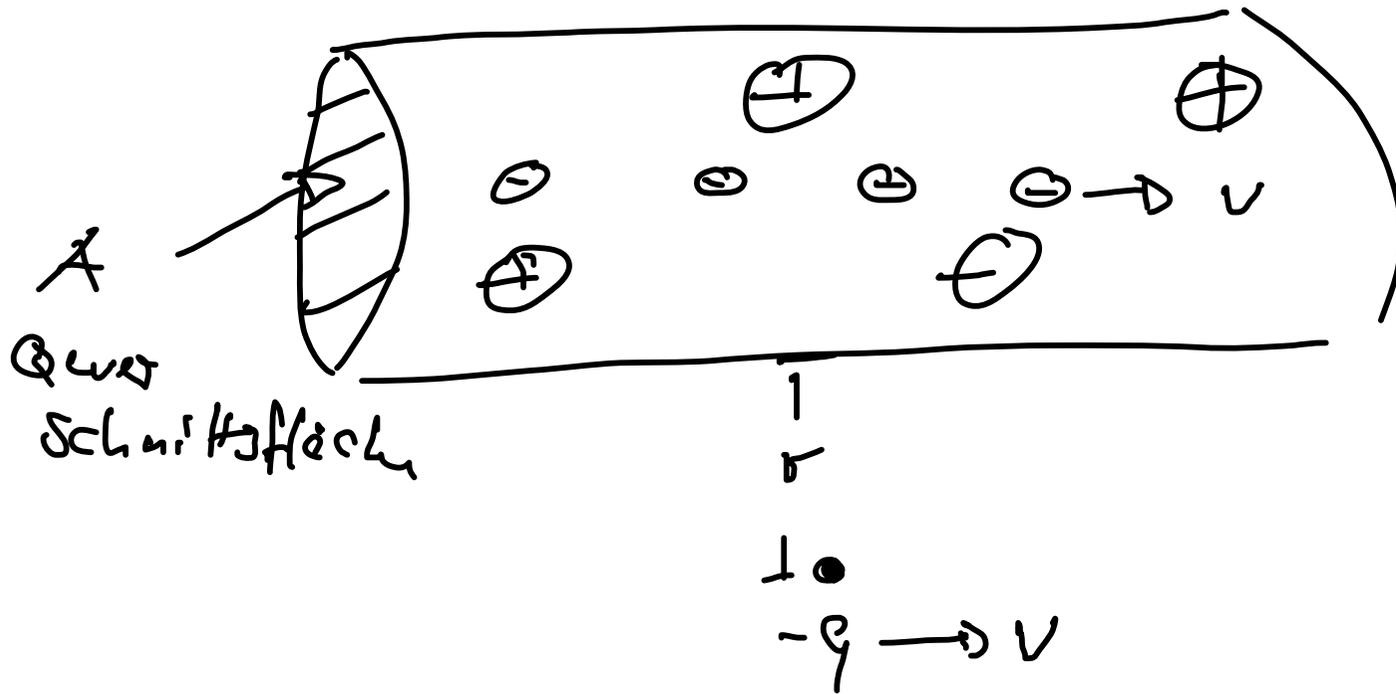
$$\boxed{u'^z = \frac{1}{\gamma} \frac{u^z}{1 - v u^x / c^2}}$$

auch transversale  
Komponenten werden  
transformiert

Lorentztransformation:

178

Zusammenhang zwischen Coulomb-  
kraft und Lorentz-kraft



Leiter mit  
Strom  $I$   
im Ruhesystem  
des Leiters

Ladungsträger/  
Elektronen bewegen  
sich mit Geschw.  
 $v$

Im System  $S'$  erfährt die  
Ladung  $-q$  keine Lorentz-kraft  
da hier  $v = 0$  ( $F_L \propto v$ )

(Bem.:  $v_0 \sim 0.1 \text{ km s}^{-1}$   
 $\sim 10^{-12} c$ )

Ladungsdichten:

$$\rho_- = \frac{N_- q_-}{V} \quad ; \quad \rho_+ = \frac{N_+ q_+}{V}$$

mit  $V = A \cdot L$

und  $Q_{\pm} = V \rho_{\pm} = A L \rho_{\pm}$  identisch in allen Inertialsystemen

$$\Rightarrow \rho' L' = \rho L$$

$$\Rightarrow \rho' = \rho \frac{L}{L'} = \rho \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \rho$$

wg.  
Längen-  
kontraktion

im Laborsystem:

$$\rho_+ + \rho_- = 0$$

$\rho_-$  bewegt sich relativ zu  $S$  mit Geschw.  $v$

$\Rightarrow \rho_- = \gamma \rho'_-$  ;  $\rho'_-$  Ruhesystem  
 der Elektronen  
 im Ruhesystem der Ladung  $-q$  ( $= S'$ )  
 bewegen sich  $\rho_+$  :

$$\rho'_+ = \gamma \rho_+$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \rho' &= \rho'_+ + \rho'_- = \gamma \rho_+ + \frac{1}{\gamma} \rho_- \\
 &= \rho_+ \gamma \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \rho_+ \gamma \beta^2
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Im System  $S'$  der bewegten Ladung  $-q$  gibt  
 es eine positive Ladungsdichte, diese  
 erzeugt Coulomb-Feld.

$\Rightarrow$  Testladung wird aufgrund der Coulomb-Kraft

in Richtung Leiter abgelenkt

181

mit Ladung pro Längeneinheit:

$$\lambda' = \rho' A' \quad ; \quad A' = A$$

$$\Rightarrow E' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \quad ; \quad r: \text{Abstand zum Leiter}$$

$$= \frac{\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} \gamma$$

elektrisches Feld im System  $S'$  der bewegten Ladung

$\Rightarrow$  Coulomb-Kraft:

$$\vec{F}' = -q E' = -q \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \gamma$$

$$\text{da } v \ll c \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx 1$$

$$\Rightarrow \vec{F}'_c = -q \frac{\rho_+ A}{2\pi \epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = -q v \frac{\rho_+ v A}{\epsilon_0 c^2 2\pi r}$$

$$\text{in } S: \vec{I} = v \rho_- A ; \vec{I}' = v \rho_+ A$$

$$+ \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \Rightarrow$$

$$\left| \vec{B} \equiv \frac{\mu_0 \vec{I}}{2\pi r} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Biot-} \\ \text{Savart} \\ \text{für strom-} \\ \text{durchflossenen Leiter} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left| \vec{F}_L = -q v \vec{B} \right| \quad \text{in } S' \text{ nur magnetische Lorentz-Kraft}$$

in  $S'$  (System der bewegten Ladung):

Coulomb-Kraft, da keine frei bewegliche Testladung mit  $v \neq 0$  vorhanden

$\Rightarrow \vec{F}_C$  und  $\vec{F}_L$  sind physikalisch  
identisch; Unterscheidung nur durch  
Relativbewegung + Längenkontraktion (sonst  
wie effektive Ladungsdichte in  $S'$ )

193

$\Rightarrow \vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld sind durch Lorentztransformation  
verknüpft

### Uneinheitliche Darstellung von $E$ - und $B$ -Feldern

- $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  können in einem System gleichzeitig  
existieren  $\Rightarrow$  Vektor (mit 3 Komponenten) ist  
nicht ausreichend, um  $\vec{E}, \vec{B}$  vollständig darzustellen

aber Darstellung mit verallgemeinertem Vektorpotential  
möglich:

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{4er-Vektor} \\ \mu = \{0, 1, 2, 3\} \\ = \{t, x, y, z\} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

184

4er-Vektor  $A^\mu$ : transformiert sich wie (Differential des)  
 4er-Ortsvektors  $x^\mu = (ct, x, y, z)$  bei  
 Wechsel von  $S \rightarrow S'$

### Beispiel

Ladung  $q$  im Ruhesystem:  $S'$

$\Rightarrow$  nur  $\vec{E}'$ -Feld, kein  $\vec{B}'$ -Feld bzw. kein  $\vec{A}'$

im Laborsystem  $S$ : Ladung bewegt sich mit  
 Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung

$$A^\mu = \underbrace{\Lambda^{-1\mu}}_{\text{inverse Lorentztransformation}} A'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi'/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \beta = \frac{v}{c}$$

$$A'^{\mu} = \begin{pmatrix} \phi'/c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla}'\phi' ; \vec{B}' = 0$$

$$A^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma\phi'/c \\ \gamma\beta\phi'/c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{v} \times \vec{A}$$

+ Transformation der Ableitungen:

$$x' = \gamma(x - vt) ; t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'}\right) ; \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} ; \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \phi - \frac{\partial}{\partial t} A_x = -\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'}\right)\phi' - \beta\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'}\right)\phi'/c \\ &= -\gamma^2(1 - \beta^2) \frac{\partial}{\partial x'} \phi' \\ &= E'_x \end{aligned}$$

$$\vec{E}_y = -\frac{\partial}{\partial y} \phi - \frac{\partial}{\partial t} A_y = -\gamma \frac{\partial}{\partial y'} \phi' = \gamma E_y'$$

186

$$E_z = \gamma E_z'$$

$$B_x = 0 \quad (= \partial_y A_z - \partial_z A_y)$$

$$B_y = \partial_z A_x = \gamma \frac{\beta}{c} \partial_{z'} \phi = -\gamma \frac{\beta}{c} E_z'$$

$$B_z = \gamma \frac{\beta}{c} E_y'$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} E_x = E_x' & B_x = 0 \\ E_y = \gamma E_y' & B_y = -\gamma \frac{\beta}{c} E_z' \\ E_z = \gamma E_z' & B_z = \gamma \frac{\beta}{c} E_y' \end{array} \right.$$

keine  
Änderung  
in Bewegungs-  
richtung

# Matrix-Darstellung von $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feldern

187

⇒ Elektromagnetischer Feldtensor

mit  $\partial^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ -\partial_x \\ -\partial_y \\ -\partial_z \end{pmatrix} = \underbrace{\eta^{\mu\nu}}_{\text{Minkowski-Metrik}} \partial_\nu$  ;  $\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mu, \nu = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$= \{t, x, y, z\}$$

→ 4er Vektorpotential:

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

⇒ Elektromagnetischer Feldstärke Tensor

Darstellung mit 4x4 Matrix

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

↑  
Spalte

↑  
Zeile

antisymmetrisch  
⇒ 6 unabh.  
Einträge

$$= \begin{pmatrix} \partial_{ct} \\ -\partial_x \\ -\partial_y \\ -\partial_z \end{pmatrix} (\phi/c, A_x, A_y, A_z) - \begin{pmatrix} \partial_{ct}, -\partial_x, -\partial_y, \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \partial_t A_x + \partial_x \phi/c & \frac{1}{c} \partial_t A_y + \partial_y \phi/c & \frac{1}{c} \partial_t A_z + \partial_z \phi/c \\ - (0, 1) & 0 & -\partial_x A_y + \partial_y A_x & -\partial_x A_z + \partial_z A_x \\ - (0, 2) & -\partial_y A_x + \partial_x A_y & 0 & -\partial_y A_z + \partial_z A_y \\ - (0, 3) & -\partial_z A_x + \partial_x A_z & -\partial_z A_y + \partial_y A_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (189)$$

Lorentz-Transformation (Relativbewegung in x-Richtung)

$$F'^{\mu\nu} = \underbrace{\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta}_{\text{2 mal wg. Transformation von } A^\mu, \partial^\mu} F^{\alpha\beta}$$

=> Transformation der  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ -Felder  $(\beta = \frac{v}{c})$

$$\begin{array}{ll} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma (E_y - v B_z) & B'_y = \gamma (B_y + \frac{\beta}{c} E_z) \\ E'_z = \gamma (E_z + v B_y) & B'_z = \gamma (B_z - \frac{\beta}{c} E_y) \end{array}$$

# Maxwell-Gleichungen aus Feldstärke tensor

190

mit  $j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$  ;  $\rho$  : Ladungsdichte  
 $\vec{j}$  : Stromdichte

$$= \begin{pmatrix} j^0 \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  inhomogene Maxwell-Gleichungen  
(Ladungsverletzung, Ampere-Maxwell)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

(er Divergenz des  
Feldstärke tensor)

$v = 0$  (Spalte)

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{E}_x/c + \frac{\partial}{\partial y} \bar{E}_y/c + \frac{\partial}{\partial z} \bar{E}_z/c = \mu_0 c \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = c^2 \mu_0 \rho = \frac{1}{\epsilon_0} \rho} \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad |31$$

$$\nu = 1 \quad \frac{\partial}{\partial ct} (-E_x/c) + \partial_y B_z - \partial_z B_y = \mu_0 j_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}}$$

homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

oder

$$\boxed{\partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} + \partial_\lambda F^{\mu\nu} = 0}$$

aus anti-  
Symmetrie  
von  $F^{\mu\nu}$

# Relativistische Dynamik

192

bisher: Maxwell-Gleichungen aus kovarianten  
(= Lorentz-invarianten) Formeln aus  
Feldstärke tensor  $F_{\mu\nu}$

jetzt: Verbindung zu kovarianten Formeln der  
Bewegungsgleichungen  
↳ alle Größen (Vektoren, Tensoren) müssen  
4er-Formen haben

1) 4er-Geschwindigkeit

vgl. 3er-Geschwindigkeit:  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

$\vec{x}$ : Ortsvektor

$t$ : Newtonsche absolute/universelle Zeit

in 4D (Minkowski) RAUMZEIT

193

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

mit  $x^M = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  4er Ortsvektor

=>  $ds^2$  ist Lorentz-invariant  
= "Länge<sup>2</sup>" in  $\mathbb{R}^4$

=> Lorentz-invariante Zeit

$$d\tau^2 = ds^2/c^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2$$

$\tau$ : "Eigenzeit" Zeit, die von mitgeführter Uhr gemessen wird; im Ruhesystem ist  $d\vec{x} = 0$

$d\tau^2 \geq 0$  für alle Beobachter von  
Trajektorien von Objekten,  
da  $v < c$

$$\Rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} ; v = \frac{dx}{dt}$$
$$= dt \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}$$

$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$  vgl. Zeitdilatation

$\Rightarrow$  Vier-Geschwindigkeit:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} u^0 &= \frac{c dt}{d\tau} = \gamma c \\ u^x &= \frac{dx}{d\tau} = \gamma \frac{dx}{dt} = \gamma v \\ u^y &= \gamma v \\ u^z &= \gamma v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}}$$

"Betrag" von  $u^\mu$

Allgemein:  $a^2 \equiv \underbrace{\eta_{\mu\nu}}_{\text{Minkowski-Metrik}} a^\mu a^\nu$ ; vgl.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Minkowski-Metrik

$$= a_\mu a^\mu \quad ; \quad a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu$$

$a^2$ : Lorentz-Skalar: gleicher Wert in allen

(inertial) Systemen, wenn  $a^\mu$  4er Vektor

$$u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu$$

$$= \gamma \begin{pmatrix} c \\ -\vec{v} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_\mu u^\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2)$$

$$= c^2$$

$$\Rightarrow |u_\mu u^\mu| = \sqrt{u_\mu u^\mu} = \underline{\underline{c}}$$

2) 4er Beschleunigung

für Bewegungsgleichung :  $m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}$

Beschleunigung  $\vec{a} = \ddot{\vec{x}}$

aus  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow$  plausible Erweiterung :

$$\left| q^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right|$$

4er Beschleunigung

# Bewegungsgleichung im kräftefreien Raum

197

$$\boxed{a^\mu = 0}$$

mit externer Kraft: 4er Kraft:  $f^\mu$

$$\boxed{m a^\mu = f^\mu}$$

$m$ : Ruhemasse

mit  $u_\mu u^\mu = c^2$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}(u_\mu u^\mu) = 0 = 2 u_\mu a^\mu \Rightarrow u^\mu \perp a^\mu$$

$$\Rightarrow u_\mu f^\mu = 0 \Rightarrow \text{nur 3 unabhängige Komponenten von } f^\mu$$

### 3) Vier Impuls / Energie - Impuls - Vektor

198

$$\text{aus } \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{p^\mu = m u^\mu}$$

Vierimpuls;  $m$ : Ruhemasse

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu}$$

relativistische Bewegungsgleichung

$$\Rightarrow p_\mu p^\mu = (mc)^2 \rightarrow \text{Lorentzskalar}$$

$$p^\mu = m \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v}}$$

relativistischer 3er Impuls

$$c p^0 = m \gamma c^2 \approx m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots$$

199

↑  
Ruheenergie

↑  $(\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2 + \dots)$   
kinetische  
Energie

$$\boxed{E = c p^0}$$

: Gesamtenergie /  
relativistische Energie

⇒ Energie - Impuls - Vektor

$$\boxed{p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow p_\mu p^\mu = (m c)^2 = (E/c)^2 - \vec{p}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2}}$$

$$\Rightarrow E = m c^2 \quad \text{für } \vec{v} = 0$$

# 4) 4er-Kraft

Newton:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad ; \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

(auch Massen-  
änderung  
verursacht  
Beschleunigung)

relativistisch:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\gamma\vec{v})}{dt}$

kovariant:  
= Lorentz-invariant

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} = \gamma \vec{F}_N$$

relativistische  
Zer-Kraft

$\vec{F}_N$ : Newtonsche  
Kraft:  
z.B. Hookesches Ges.  
 $\vec{F} = -k\vec{x}$

Lorentz-Kraft:  
 $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

$$f^\mu = \begin{pmatrix} f^0 \\ \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \frac{f^0}{c} \\ \gamma \vec{F}_N \end{pmatrix}$$

und  $u_\mu f^\mu = 0 = \gamma f^0 c - \gamma^2 \vec{F}_N \cdot \vec{v}$   
 $\Rightarrow f^0 = \gamma \vec{F}_N \cdot \vec{v} / c$

$$\Rightarrow f^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma \vec{F}_N \cdot \vec{v} / c \\ \gamma \vec{F}_N \end{pmatrix}$$

Bsp.: Coulomb-Kraft:

$$\vec{f}_e = \vec{F}_{C,N} \cdot \gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r \cdot \gamma$$

Bemerkung:

$m' = m\gamma$  : relativistische Masse

vgl.:  $p' = p\gamma$

Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = \gamma q (\vec{v} \times \vec{B})$$

0-Komponente

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{dE/c}{dt} = \gamma \vec{F}_L \cdot \vec{v} / c = 0$$

$$\text{da } \vec{v} \perp \vec{F}_L \propto \vec{v} \times \vec{B}$$

=> Magnetfeld / Lorentz-Kraft verrichtet keine Arbeit

Bemerkung:

relativistische Bewegungsgleichungen im

Fall von  $\vec{v} \rightarrow 0$  ( $= 0$ : momentane Ruhesystem  $S'$ )

=> Newtonsche Bewegungsgleichung:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_L$

$$\Rightarrow f'^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \text{ in } S' \text{ für } \vec{v} = 0 \quad 203$$

$$\beta = \frac{v}{c} = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1$$

$\Rightarrow f^{\mu}$  durch Lorentz-Transformation  
(bzw. inverse LT)

$$\Rightarrow f^{\mu} = \underbrace{\Lambda^{-1 \mu \nu}}_{\text{für } \vec{v} = v \vec{e}_x} f'^{\nu}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \vec{F}_2 \cdot \vec{v} \\ \gamma \vec{F}_2 \end{pmatrix}$$

für allgemeinen  
Lorentz-Boost  
 $\Lambda(\vec{v})$

Z54

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu}$$

kovariante / Lorentz-invariante  
Bewegungsgleichung, da für  
 $\vec{v} = 0 \Rightarrow$  Newtonsche Bewegungsgl.  
+ aus LT

## Elektromagnetische Wellen

in Vakuum aus Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{E} = 0 \quad ; \quad \left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{B} = 0$$

mit  $\vec{B} \perp \vec{E}$  und  $\perp \vec{k}$

205

$\Rightarrow$  transversale Wellen

Wellenoperator:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu$$

Minkowski-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_{ct} \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

=  $\square$

D'Alembert Operator

Lösung: ebene Wellen

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 \right| \begin{array}{l} \text{Dispersions-} \\ \text{relation} \\ \text{im Vakuum} \end{array}$$

$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$  = 4er Skalarprodukt in  
Minkowski-KALTMZEIT

mit  $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

und

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

4er Wellenvektor

$$\Rightarrow \eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

$\Rightarrow$  Energie-Impuls-Vektor

$$p_{em}^\mu = \hbar k^\mu = \begin{pmatrix} \hbar \omega/c \\ \hbar k_x \\ \hbar k_y \\ \hbar k_z \end{pmatrix}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$h = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

Plancksches  
Wirkuingsquantum

aus Mechanik

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \bar{E}/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad p_\mu p^\mu = \hbar^2 c^2$$

↑  
Kleinwarte

$$p_{\alpha\mu} p_{\beta\mu} = \hbar \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 \right)$$

$$= 0 \quad (\text{wg. Dispersionsrelation})$$

⇒ "Träger" der em-Wellen ist masselos  
= Photon

$$\vec{p}_{em} = \bar{E}_{em} / c^2$$

$$\Rightarrow p_{em}^\mu = \bar{E}/c \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n} \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$  : Propagationsrichtung  
der Welle  
 $\vec{n}^2 = 1$

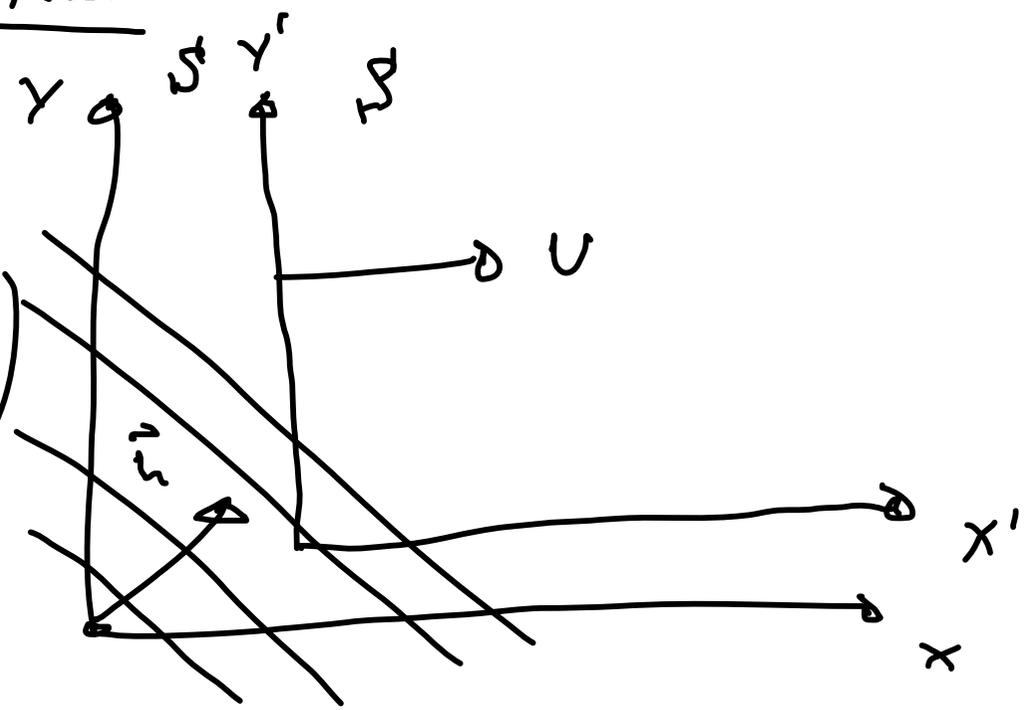
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow h^{\mu} = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{h} \end{pmatrix} = c/c \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{h} \end{pmatrix}$$

relativistischer Doppelt-Effekt

$$h'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} h^{\nu}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(1 - \beta h_x) \\ \gamma(h_x - \beta) \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'/c \\ \vec{h}' \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \boxed{\omega' = \omega \gamma (1 - \beta h_x)}$$

relativistische Doppelt-Effekt

$\Rightarrow$  bewegt sich S' von der Quelle weg ( $v > 0$ )  
 wird in S' eine kleinere Frequenz gemessen

$\omega' < \omega_0$  : "Rotverschiebung" bei Entfernung von der Quelle

$\omega' > \omega_0$  : "Blauverschiebung" bei Bewegung in Richtung Quelle

wg. Wellenlänge :  $\lambda = \frac{c}{\omega} 2\pi$

Longitudinaler Doppeler-Effekt

$\vec{v} // \vec{h} \Rightarrow \vec{v} = v \vec{h}$

$\Rightarrow \left( \omega' = \omega \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$

für  $\beta \ll 1 \Rightarrow v \ll c$

$\omega' \approx \omega(1 - \beta) \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega' - \omega}{\omega} = -\beta = -\frac{v}{c}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = z \approx \pm \frac{v}{c} \quad ; \quad + \text{rot} \quad ; \quad - \text{Blau}$$

$z$  : "Rotverschiebung" aus Kosmologie

vgl. Hubble-Gesetz :

$$\boxed{v_{gal} = H_0 \cdot d_{gal}} \quad ; \quad H_0 \approx 70 \text{ km/s } \frac{1}{\text{Mpc}}$$

$$= 2.2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

$z$  zu erklären die Rotverschiebung mit Entfernungszunahme  $d$  aufgrund der Expansion des Raums (Universum)

$$\boxed{\frac{v}{c} = \pm z \frac{z + z}{z + 2z + z^2}}$$

Geschwindigkeit  
u.s.  
Rotverschiebung-  
parameter