Theoretische Physik I

Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Teil I Theoretische/klassische/analytische Mechanik

Motivation:

- tieferes Verständnis der Newtonschen Mechanik
- verschiedene (mathematische) Grundkonzepte
  ↳ Anwendung auf unterschiedliche Bereiche
    z.B. E-Dynamik, QM, ART aus Variationsprinzip

1) Newtonsche Mechanik

Newtonsche Axiome

1) kräftefreier Körper (Masse) bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit

2) Kraft gleich Masse mal Beschleunigung

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \ddot{\vec{x}}$$

3) Actio = Reactio : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$\Rightarrow$ Newtonsches Weltbild (Weltbild der nicht-relativistischen klassischen Mechanik):

- Materie: läßt sich durch (unzerstörbare) Massenpunkte eindeutig beschreiben

- Zeit: eindimensionaler Parameter zur Beschreibung von Bahnen / Trajektorien: passiv, unbeeinflußbar
- Raum: 3D "Bühne" der Physik unveränderlich, Beschreibung mit Koordinaten (z.B. kartesisches Koordinatensystem)

$\hookrightarrow$ Raum + Zeit sind absolut

- Bewegungen sind deterministisch

⇒ Limitierungen:

- Elementarteilchen sind ununterscheidbar
- QM: nicht deterministisch → probabilistisch
  u.a. Unschärferelation
- SRT: Zeit ist abhängig von Relativbewegung
- ART: Raum + Zeit werden durch Materie / Energie gekrümmt

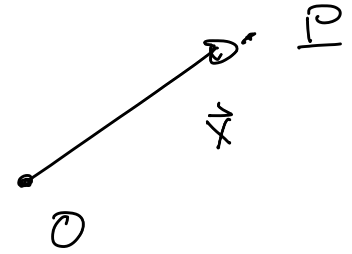
  ↳ nicht absolut, sondern dynamisch (z.B. GW)
  Inhalt hat Einfluß auf "Bühne"

"Mathematisierung"

Zeit: $t \in \mathbb{R}$; Einheit Sekunde [s]

Raum: Beschreibung mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x, y, z)$
Dimension $|\vec{x}|$; Einheit Meter [m]

z.B. kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung in O



Änderung des Bezugssystems: "Beobachterwechsel"

a) Translation: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$

b) Rotation: $\vec{x}' = R\vec{x}$; R: Rotationsmatrix (orthogonal: $R^T R = \mathbb{1}$)

$\Rightarrow$ Gruppe Koordinatentransformationen:

Euklidische Gruppe

auch allgemein: Koordinatentransformation: Verwendung einer anderen "Karte"; z.B. Kugelkoordinaten $\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \varphi)$ mit $|\vec{x}|$ = Länge aber θ, φ = Winkel

Inertialsystem

kartesisches Koordinatensystem, in dem keine äußeren Kräfte wirken und es gilt

$$\vec{a} = 0$$

Postuliertes Koordinatensystem: beschreibt Klasse von Koordinatensystemen, die durch die Euklidsche Gruppe + Geschwindigkeitstransformation ineinander überführt werden kann: Galilei-Gruppe

Transformation: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{b} - \vec{v}t$; $\vec{b}, \vec{v} = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}}' = 0 = \ddot{\vec{x}}$$

Galileische Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Alle physikalischen Gesetze sind dort gleich. („Physik" im fahrenden Zug = „Physik" im ruhenden System)

Newtonsches Determiniertheitsprinzip

für jedes System mit N Massenpunkten sind die Bahnen vollständig bestimmt (determiniert) wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt alle Orte und Geschwindigkeiten gegeben sind, d.h. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \ldots \dot{\vec{x}}_N)$ gegeben

Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i \qquad \Rightarrow \text{Anfangswertproblem}$$

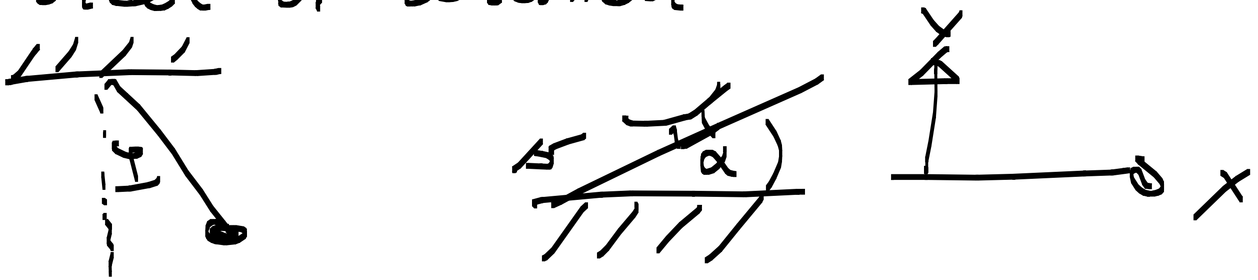
Lagrange-Mechanik

- Newtonsche Mechanik
  Bahnen/Trajektorien bestimmt durch Bewegungsgl.
  + Anfangswerte
- Lagrange-Mechanik
  Bahnen bestimmt durch "Randwerte" (auch z.B. kürzeste Strecke)

Zwangsbedingungen

Systeme oft eingeschränkt (geometrische Bedingungen)

z.B. Pendel o. Schlitten



Zwangskräfte i. A. nicht (im Detail) bekannt
(z.B. Auflagekraft o. Fadenspannung)

Formulierung mit

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i^{(ext.)} + \vec{Z}_i$$ ← Zwangskraft

schwierig

- Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ nicht unabhängig

  z.B. Bahn auf schiefer Ebene : $y = \mathrm{tg}\alpha \, x$

Terminologie / Klassifizierung von Zwangsbedingungen

- holonome Zwangsbedingung

  $$f(\vec{x}, t) = 0$$

  d.h. Formulierung mit Gleichung möglich

  z.B $y - \mathrm{tg}\alpha \, x = 0$

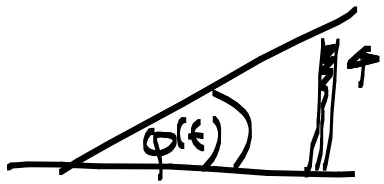
- nicht-holonome Zwangsbedingungen
  Formulierung mit Gleichung nicht möglich
  Elimination von redundanten Koordinaten nicht möglich
  z.B. Teilchen in Hohlkugel : $|\vec{x}| \leq R$

- skleronome ZB
  zeitunabhängige Zwangsbedingungen
  $f(\vec{x}) = 0$ holonome-skleronome ZB

  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

- rheonome ZB : $f(\vec{x}, t)$

  $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ z.B. schiefe Ebene zeitabhängig



Holonome Zwangsbedingungen

Freiheitsgrade für Systeme ohne ZB

$3N$ für N Teilchen

mit p holonome ZBs : Reduktion der Freiheitsgrade

$$f = 3N - p$$

$\Rightarrow$ Beschreibung mit f generalisierten Koordinaten

$q_1, q_2, \dots, q_f$ möglich

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$$

q_i unabhängig voneinander; d.h. $f(q_1, q_2 \dots q_f) = 0$ kann nicht mehr formuliert werden

bilden Konfigurationsraum mit einem f-dimensionalen Konfigurationsvektor $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

⇒ generalisierte Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_f$$

mit Anfangswerte bei t_0 : $\underline{q}(t_0) = \underline{q}_0$ und $\underline{\dot{q}}(t_0) = \underline{\dot{q}}_0$

System mit Bewegungsgleichungen (müssen noch bestimmt werden) bestimmt

Bem.: q_i's nicht eindeutig ; unterschiedliche generalisierte Koordinaten möglich

q_i's : nicht notwendigerweise Längen (z.B. Winkel)

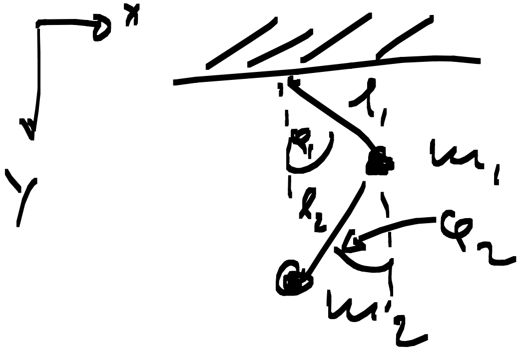
z.B. • Teilchen auf Kugeloberfläche fixiert; Radius R

Zwangsbedingung : $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

⇝ mögliche generalisierte Koordinaten :

Θ : Polarwinkel ; φ : Azimut-Winkel

- Doppelpendel in der Ebene



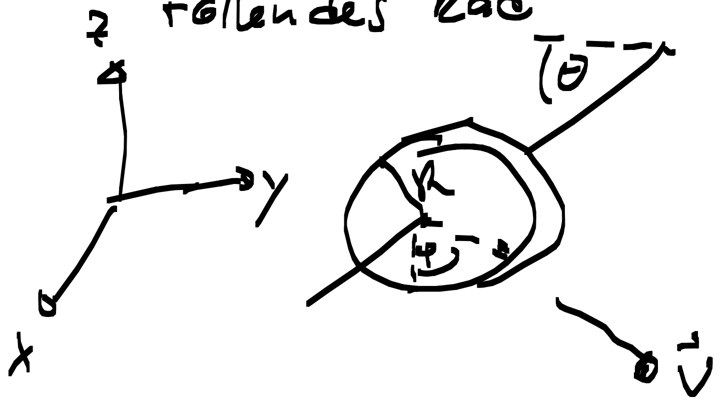
2-Körper Problem:
ursprünglich 6 Freiheitsgrade
4 holonome Zwangsbedingungen

$$z_1 = 0 = z_2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

- Bsp.: nicht-holonome Zwangsbedingung
rollendes Rad



Beschreibung des Systems mit "Auflagepunkt" in der (x, y) Ebene und Winkel (φ, θ): 4 Freiheitsgrade (ignoriere $z = 0$)

holonome Zwangsbedingungen möglich?

↳ nein : Koordinaten sind unab. von einander

formal : "Rollen" :

Geschwindigkeit Achse $(\dot{x}, \dot{y})$

= Geschwindigkeit Rad

v-Rad : $v = R\dot{\varphi}$

Richtung : $\begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = v\cos\Theta = R\dot{\varphi}\cos\Theta \Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R\cos(\Theta(t))$$

$$\dot{y} = v\sin\Theta = R\dot{\varphi}\sin\Theta \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} = R\sin(\Theta(t))$$

nicht integrabel, da $\Theta(t)$ unbekannt (hier: keine Bestimmungsgleichung für $\Theta(t)$)

d'Alembert Prinzip

Ziel: Aufstellen der Bewegungsgleichungen unter Einbeziehung der Zwangsbedingungen
↳ differentielle Formulierung der Lagrange-mechanik

Def.: Virtuelle Verrückung $\delta \vec{x}_i$

infinitesimale Änderung der Orte (Koordinaten) eines mechanischen Systems bei festgehaltener Zeit t, die mit den Zwangsbedingungen im Einklang stehen
(virtuell = willkürlich, d.h. nicht durch physikalische Kräfte verursacht)

festgehaltene Zeit: $\delta t = 0$

mit $\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \ldots, q_f, t)$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j + \cancel{\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}\,\delta t} = 0 \leftarrow \text{virtuell}$$

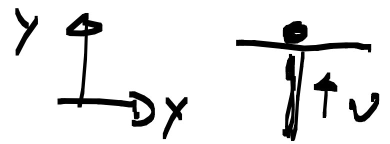
(Verwendung von δ genau wie Differential)

Anmerkung: für skleronome Zwangsbedingungen:

$\delta \vec{x}$ real ausführbar

für rheonome ZBs nicht real ausführbar

z.B.



Teilchen im Aufzug

$$d\vec{x} = (dx, dy) = (dx, v\,dt)$$ reale Verrückung

$$\delta \vec{x} = (\delta x, \delta y) = (\delta x, 0)$$ nicht real durchführbar