Theoretische Physik I

Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Teil I Theoretische/klassische/analytische Mechanik

Motivation:

- tieferes Verständnis der Newtonschen Mechanik
- verschiedene (mathematische) Grundkonzepte
  ↳ Anwendung auf unterschiedliche Bereiche
  z.B. E-Dynamik, QM, ART aus Variationsprinzip

1) Newtonsche Mechanik

Newtonsche Axiome

1) kräftefreier Körper (Masse) bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit

2) Kraft gleich Masse mal Beschleunigung

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \ddot{\vec{x}}$$

3) Actio = Reactio : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

⇒ Newtonsches Weltbild (Weltbild der nicht-relativistischen klassischen Mechanik):

- Materie : läßt sich durch (unzerstörbare) Massenpunkte eindeutig beschreiben

- Zeit : eindimensionaler Parameter zur Beschreibung von Bahnen / Trajektorien: passiv, unbeeinflußbar

- Raum: 3D "Bühne" der Physik unveränderlich, Beschreibung mit Koordinaten (z.B. kartesisches Koordinatensystem)

↳ Raum + Zeit sind absolut

- Bewegungen sind deterministisch

⇒ Limitierungen:

- Elementarteilchen sind ununterscheidbar
- QM: nicht deterministisch → probabilistisch
  u. a. Unschärferelation
- SRT: Zeit ist abhängig von Relativbewegung
- ART: Raum + Zeit werden durch Materie / Energie
  gekrümmt

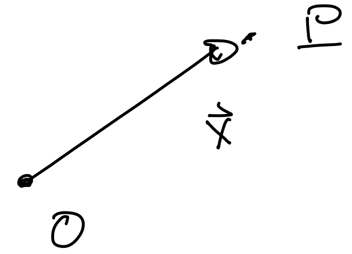
  ↳ nicht absolut, sondern dynamisch (z.B. GW)
  Inhalt hat Einfluß auf "Bühne"

"Mathematisierung"

Zeit: $t \in \mathbb{R}$; Einheit Sekunde [s]

Raum: Beschreibung mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x, y, z)$
Dimension $|\vec{x}|$; Einheit Meter [m]

z.B. kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung in O



Änderung des Bezugssystems: "Beobachterwechsel"

a) Translation: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$

b) Rotation: $\vec{x}' = R\vec{x}$; R: Rotationsmatrix (orthogonal: $R^T R = \mathbb{1}$)

$\Rightarrow$ Gruppe Koordinatentransformationen:

Euklidische Gruppe

auch allgemein: Koordinatentransformation: Verwendung einer anderen "Karte"; z.B. Kugelkoordinaten $\vec{x} = \vec{x}(r, \Theta, \varphi)$ mit $|\vec{x}|$ = Länge aber Θ, φ = Winkel

Inertialsystem

kartesisches Koordinatensystem, in dem keine äußeren Kräfte wirken und es gilt

$$\vec{a} = 0$$

Postuliertes Koordinatensystem: beschreibt Klasse von Koordinatensystemen, die durch die Euklidsche Gruppe + Geschwindigkeitstransformation ineinander überführt werden kann: Galilei-Gruppe

Transformation : $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{b} - \vec{v}t$; $\vec{b}, \vec{v}$ = konst.

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}}' = 0 = \ddot{\vec{x}}$$

Galileische Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Alle physikalischen Gesetze sind dort gleich. („Physik" im fahrenden Zug = „Physik" im ruhenden System)

Newtonsches Determiniertheitsprinzip

für jedes System mit N Massenpunkten sind die Bahnen vollständig bestimmt (determiniert) wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt alle Orte und Geschwindigkeiten gegeben sind, d.h. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \ldots \dot{\vec{x}}_N)$ gegeben

Newtonsche Bewegungsgleichung

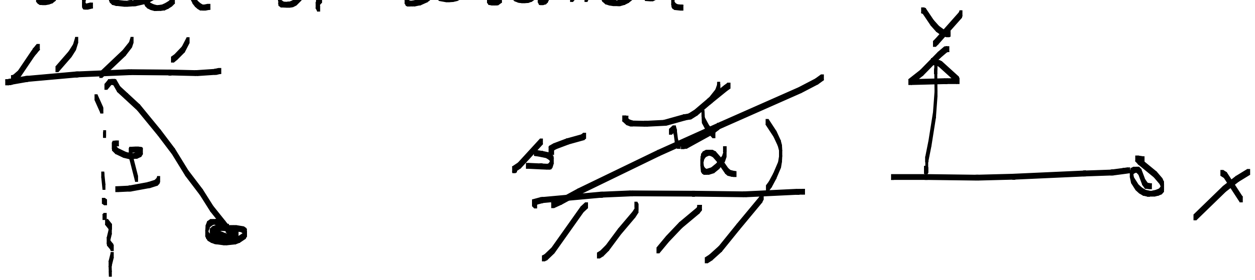
$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i \qquad \Rightarrow \text{Anfangswertproblem}$$

Lagrange-Mechanik

- Newtonsche Mechanik
  Bahnen/Trajektorien bestimmt durch Bewegungsgl.
  + Anfangswerte
- Lagrange-Mechanik
  Bahnen bestimmt durch "Randwerte" (auch z.B. kürzeste Strecke)

Zwangsbedingungen

Systeme oft eingeschränkt (geometrische Bedingungen)
z.B. Pendel o. Schlitten



Zwangskräfte i. A. nicht (im Detail) bekannt
(z.B. Auflagekraft o. Fadenspannung)

Formulierung mit

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i^{(ext.)} + \vec{Z}_i \leftarrow \text{Zwangskraft}$$

schwierig

- Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ <u>nicht</u> unabhängig
  z.B. Bahn auf schiefer Ebene : $y = \operatorname{tg}\alpha \, x$

<u>Terminologie</u> / Klassifizierung von Zwangsbedingungen

- holonome Zwangsbedingung

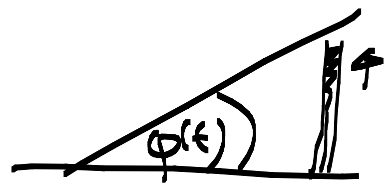
  $f(\vec{x}, t) = 0$ d.h. Formulierung mit Gleichung möglich
  z.B $y - \operatorname{tg}\alpha \, x = 0$

- nicht-holonome Zwangsbedingungen
  Formulierung mit Gleichung nicht möglich
  Elimination von redundanten Koordinaten nicht möglich
  z.B. Teilchen in Hohlkugel : $|\vec{x}| \leq R$

- skleronome ZB
  zeitunabhängige Zwangsbedingungen
  $f(\vec{x}) = 0$ holonome-skleronome ZB

  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

- rheonome ZB : $f(\vec{x}, t)$
  $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ z.B. schiefe Ebene zeitabhängig



Holonome Zwangsbedingungen

\# Freiheitsgrade für Systeme ohne ZB

$3N$ für N Teilchen

mit p holonome ZBs : Reduktion der Freiheitsgrade

$$f = 3N - p$$

$\Rightarrow$ Beschreibung mit f generalisierten Koordinaten

$q_1, q_2, \ldots, q_f$ möglich

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_f, t)$$

q_i unabhängig voneinander; d.h. $f(q_1, q_2, \ldots q_f) = 0$

kann nicht mehr formuliert werden

bilden Konfigurationsraum mit einem f-dimensionalen Konfigurationsvektor $\underline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_f)$

$\Rightarrow$ generalisierte Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_f$$

mit Anfangswerte bei t_0 : $\underline{q}(t_0) = \underline{q}_0$ und $\underline{\dot{q}}(t_0) = \underline{\dot{q}}_0$

System mit Bewegungsgleichungen (müssen noch bestimmt werden) bestimmt

Bem.: q_i's nicht eindeutig ; unterschiedliche generalisierte Koordinaten möglich

q_i's : nicht notwendigerweise Längen (z.B. Winkel)

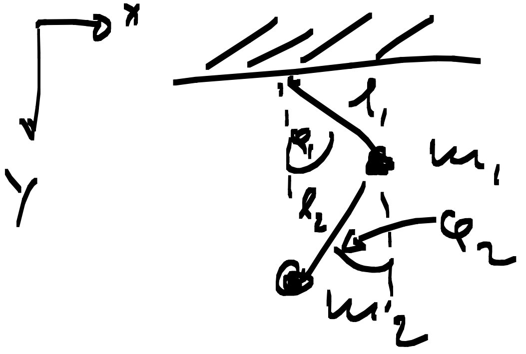
z.B. • Teilchen auf Kugeloberfläche fixiert; Radius R

Zwangsbedingung : $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

$\leadsto$ mögliche generalisierte Koordinaten :

Θ : Polarwinkel ; φ : Azimut-Winkel

• Doppelpendel in der Ebene



2-Körper Problem:
ursprünglich 6 Freiheitsgrade
4 holonome Zwangsbedingungen

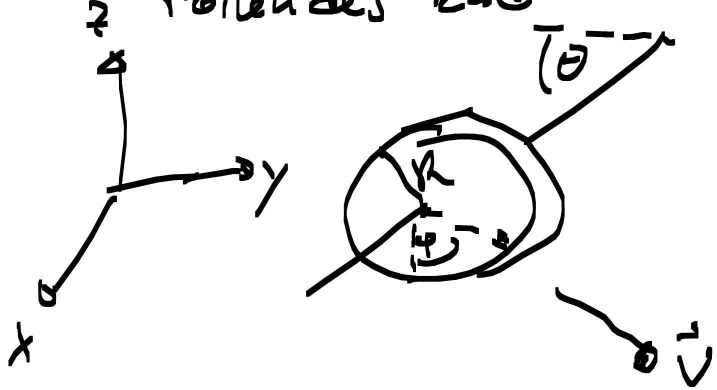
$$z_1 = 0 = z_2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

• Bsp.: nicht-holonome Zwangsbedingung

rollendes Rad



Beschreibung des Systems mit "Auflagepunkt" in der (x, y) Ebene und Winkel (φ, θ): 4 Freiheitsgrade (ignoriere $z = 0$)

holonome Zwangsbedingungen möglich?

↳ nein: Koordinaten sind unab. von einander

formal: "Rollen":

Geschwindigkeit Achse $(\dot{x}, \dot{y})$

= Geschwindigkeit Rad

v-Rad: $v = R\dot{\varphi}$

Richtung: $\begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \dot{x} = v\cos\Theta = R\dot{\varphi}\cos\Theta \Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R\cos(\Theta(t))$

$\dot{y} = v\sin\Theta = R\dot{\varphi}\sin\Theta \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} = R\sin(\Theta(t))$

nicht integrabel, da $\Theta(t)$ unbekannt (hier: keine Bestimmungsgleichung für $\Theta(t)$)

d'Alembert Prinzip

Ziel: Aufstellen der Bewegungsgleichungen unter Einbeziehung der Zwangsbedingungen
↳ differentielle Formulierung der Lagrange-mechanik

Def.: Virtuelle Verrückung $\delta \vec{x}_i$

infinitesimale Änderung der Orte (Koordinaten) eines mechanischen Systems bei festgehaltener Zeit t, die mit den Zwangsbedingungen im Einklang stehen
(virtuell = willkürlich, d.h. nicht durch physikalische Kräfte verursacht)

festgehaltene Zeit: $\delta t = 0$

mit $\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \ldots, q_f, t)$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j + \cancel{\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}\,\delta t}$$

$= 0 \leftarrow$ virtuell

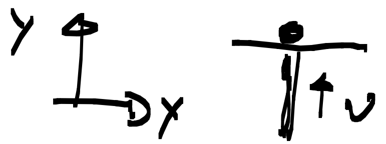
(Verwendung von δ genau wie Differential)

Anmerkung: für skleronome Zwangsbedingungen:

$\delta \vec{x}$ real ausführbar

für rheonome ZBs nicht real ausführbar

z.B.



Teilchen im Aufzug

$d\vec{x} = (dx, dy) = (dx, v\,dt)$ reale Verrückung

$\delta\vec{x} = (\delta x, \delta y) = (\delta x, 0)$ nicht real durchführbar

Def.: <u>Virtuelle Arbeit</u>

$$\delta W = -\sum_i^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x} \qquad i = 1, \dots, N \quad \text{Teilchen}$$

mit $\vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i$ $\qquad \vec{F}_a$: äußere Kraft

$\qquad \vec{Z}$: Zwangskraft

mit Newtonsche Bewegungsgl.:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i = m_i \vec{a}_i \quad ; \quad \vec{a}_i = \ddot{\vec{x}}_i$$

bzw. $\vec{F}_{ai} + \vec{Z}_i - m_i \ddot{\vec{x}} = 0$ $\qquad$ dynamisches Gleichgewicht

$$\Rightarrow \sum_i (\vec{F}_{ai} - m_i \ddot{\vec{x}}_i)\, \delta \vec{x}_i + \sum_i \vec{Z}_i\, \delta \vec{x}_i = 0$$

<u>d'Alembertsche Prinzip</u>: die von den Zwangskräften geleistete virtuelle Arbeit ist <u>null</u>; bzw. Zwangskräfte leisten <u>keine</u> virtuelle Arbeit

$$\boxed{\delta W_Z = -\sum_i \vec{Z}_i \, \delta \vec{x}_i = 0}$$

Bem.: skleronome Zwangsbedingungen: Zwangskräfte leisten keine reale Arbeit

theonom: ... können reale Arbeit leisten

auch d'Alembertsche Prinzip

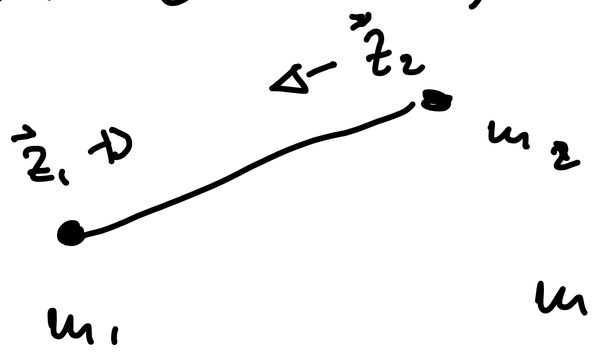
$$\boxed{\sum_i^N \left(\vec{F}_{a_i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i \right) \delta \vec{x}_i = 0}$$

Vorteil: Formulierung ohne (komplizierte) Zwangskräfte

aber: $\delta \vec{x}_i$ nicht unabhängig voneinander.

(z.B. holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{x}) = 0$)

Bsp.: $\delta W = 0$; kräftefreie Hantel



mit Ursprung bei m_1

$\delta \vec{x}_1 = \delta \vec{s}$ Verschiebung

m_2 kann relativ zu m_1 rotieren

$\delta \vec{x}_2 = \delta \vec{s} + \delta \vec{R}$

d'Alembertsche Prinzip:

$$\delta W_Z = 0 = -\vec{Z}_1 \delta \vec{s} - \vec{Z}_2 (\delta \vec{s} + \delta \vec{R})$$

$$= -\underbrace{(\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2)}_{=0} \delta \vec{s} - \underbrace{\vec{Z}_2 \delta \vec{R}}_{\vec{Z}_2 \perp \delta \vec{R}}$$

$= 0 \Rightarrow$ keine virtuelle (auch keine reale) Arbeit

Ziel: Bewegungsgleichungen mit generalisierten Koordinaten
(unabhängige Koordinaten)

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \ldots, q_f, t) \quad ; \quad \underline{q} = (q_1, q_2, \ldots q_f)$$

Konfig. raum

$$\delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

(Einstein Summenkonvention:
$$\delta \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$
)

virtuell: $\delta t = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \delta t = 0$$

1. Term aus Summe

$$\sum_i \vec{F}_{a,i} \delta \vec{x}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{f} Q_j \delta q_j$$

mit $Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$ generalisierte Kraftkomponenten

Bem.: $[Q_j] \neq$ Kraft i. A.

aber $[Q_j q_j] =$ Energie

mit konservativen Kräften

$$\vec{F}_{a,i} = -\vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) \; ; \quad V : \text{Potential}$$

$$= -\sum_j (\vec{\nabla}_i q_j) \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = -\sum_i (\vec{\nabla}_i V) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

2. Term:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} m_i \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} m_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 \right) \right] \delta q_j$$

$$= \sum_{j}^{f} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

mit $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^2$ kinetische Energie des N-Teilchen Systems

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0}$$

d'Alembertsche Prinzip

mit holonomen Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

q_j unabhängig von einander

für konservatives System:

$V = V(\underline{q})$ unabhängig von $\underline{\dot{q}} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) \right] \delta q_j = 0$$

Def.! $\boxed{L = T - V}$

$= L(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ <u>Lagrange-Funktion</u>

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{f} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

holonom + konservativ

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Lagrange-Gleichung 2. Art

Lagrange-Bewegungs-gleichung

Vergleich mit Newton:

- Energie (Skalar) vs. Kraft (Vektor)
- keine Zwangskräfte
- invariant unter beliebigen Koordinatentransformation
- Formulierung in rein differentieller Form

Koordinatentransformation:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{\tilde{x}} \quad ; \quad \vec{x} = \vec{x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

Beschleunigung: $\ddot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}})$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_j}{dt} \quad \text{(Summenkonvention)}$$

$$\ddot{x} = \underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_k}{dt} \frac{d\tilde{x}_j}{dt}}_{\text{zusätzlicher Term}} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d^2 \tilde{x}_j}{dt^2}$$

→ Newtonsche Bewegungsgl. nicht forminvariant

$$F_i = \tilde{F}_j \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i}$$ allgem. Transformation eines Vektors

Lagrange Gleichung unter Koordinatentransformation

$$\tilde{L}(\underline{\tilde{q}}, \underline{\dot{\tilde{q}}}, t) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$$

Skalar: Wert bleibt unter Koordinaten-trafo gleich (z.B. Temperatur)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

1) $$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j}$$

mit $$\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\right) \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\right)\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial q_j}$$

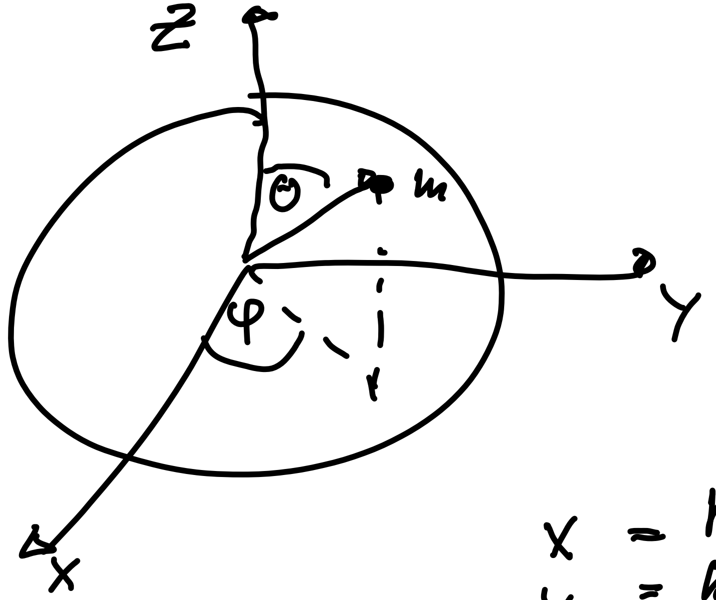
2) $$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k}\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k}\right)}_{=0}\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$ Lagrange-Gleichung forminvariant unter Koordinatentransformation!

Anwendungen

1) Teilchen auf Kugeloberfläche im Schwerefeld der Erde



Zwangsbedingung: holonom-skleronom

$r = |\vec{x}| = R$

generalisierte Koordinaten

Θ : Polarwinkel : q_1

φ : Azimut : q_2

$$x = R \sin\Theta \cos\varphi$$
$$y = R \sin\Theta \sin\varphi$$
$$z = R \cos\Theta$$

Kraft: $\vec{F}_a = -mg\vec{e}_z = -mg\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$q_1 \; q_2$

Lagrange-Funktion: $L = T - V = L(\Theta, \varphi)$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2}R^2(\dot\Theta^2 + \sin^2\Theta\,\dot\varphi^2)$$

V aus generalisierter Kraft:

$$Q_1 = Q_\Theta = \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \Theta} = -mg(-R\sin\Theta) = mgR\sin\Theta$$

$$Q_2 = Q_\varphi = \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = 0$$

konservative Kraft: $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow V(\Theta) = -\int d\Theta\, Q_\Theta = -mgR\int d\Theta \sin\Theta = mgR(1+\cos\Theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{m}{2}R^2(\dot\Theta^2 + \sin^2\Theta\,\dot\varphi^2) - mgR(1+\cos\Theta)}$$

Lagrange-Gleichungen / Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = mR^2\sin\Theta\cos\Theta\,\dot\varphi^2 + mgR\sin\Theta$$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi$ ist <u>zyklische</u> Koordinate

↳ Erhaltungsgröße

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\Theta} = mR^2\dot\Theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mR^2\sin^2\Theta\,\dot\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\theta: \ \ddot{\theta} - \left(\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}\right)\sin\theta = 0 \\ &\varphi: \ \frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\right) = 0 \end{aligned}} \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung} \ (\vec{\ell} = \vec{x} \times \vec{v})$$

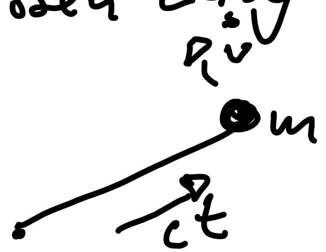
Lösung liefert Bahn auf Kugeloberfläche

(nicht trivial, auf $\dot{\varphi} = 0$

$\Rightarrow \ \ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta$ vgl. Pendel $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$

$\approx -\frac{g}{\ell}\,\theta$)

2) Teilchen an masseloser Stange,
dessen Läng sich linear mit der Zeit ändert



Bewegung nur in x-y-Ebene

$z = 0$ holonom-skleronom

$|\vec{x}| = R + ct$ holonom-rheonom

c: konst. Längenänderung

mit Polarkoordinaten:

$x(t) = r(t)\cos\varphi = (R+ct)\cos\varphi \quad ; \quad q_1 = \varphi$

$y(t) = r(t)\sin\varphi = (R+ct)\sin\varphi$

Lagrange-Funktion: $L = \underline{\underline{T}} - V$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\left(c^2 + (k+ct)^2\dot{\varphi}^2\right) \quad ; \quad V = 0$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \text{ zyklische Koordinate}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(k+ct)^2\dot{\varphi} = \text{konst}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 = m(k+ct)\left((k+ct)\ddot{\varphi} + 2c\dot{\varphi}\right)$$

Lösung: triviale Lösung $\dot{\varphi} = 0$

aus $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = h \Rightarrow d\varphi = \frac{h/m}{(k+ct)^2}\,dt$

$$\leadsto \varphi(t) = -\frac{1}{c}\,\frac{h/m}{(k+ct)}$$

Verallgemeinerte Potentiale / geschwindigkeitsabhängige Potentiale

Lagrange-Gleichung für holonome Systeme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

auch für nicht konservative Systeme mit verallgemeinerte Potential:

$$U = U(q_j, \dot q_j)$$

wenn $\boxed{Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}}$

⇒ Lagrange-Funktion

$$\boxed{L = T - U} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

verallgem. Lagrange-Funktion

Bsp.: Teilchen im Elektromagnetischen Feld

Kraft: $\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v}\times\vec{B})\right)$ in Gauß-cgs Einheiten

mit Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad ; \quad \vec{j} : \text{Stromdichte}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \rho : \text{Ladungsdichte}$$

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$; $\vec{A}$ Vektorpotential

Induktion: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$

Lösung: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

in Lorentzkraft: $\vec{F} = e\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right)$

suche $U(\vec{x},\vec{v})$ mit $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{\nabla}_{\vec{v}}U - \vec{\nabla}U$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \rightarrow (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = e\left(-\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right) - \frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}\right)$$

$$\text{mit} \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{\nabla}_{\vec{v}}(\vec{A}\cdot\vec{v})$$

$$= e\left(-\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\vec{\nabla}_{\vec{v}}(\vec{A}\cdot\vec{v})\right)$$

$\Rightarrow$ verallgemeinertes Potential

$$\boxed{U(\vec{x},\vec{v}) = e\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}\right)}$$

für Lorentzkraft

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - e\left(\phi - \frac{1}{c}(\vec{A}\cdot\vec{v})\right)}$$

Systeme mit Reibung

- meist geschwindigkeitsabhängig
- nicht energieerhaltend

↳ $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ nicht möglich

↳ keine Lagrange-Funktion $L = T - V$

aber $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$ d'Alembertsches Prinzip für holonome Zwangsbedingungen

mit $\vec{F} = \vec{F}^{(k)} + \vec{F}^{(R)}$

$\vec{F}^{(k)} = -\vec{\nabla} V$ konservativer Anteil

$\vec{F}^{(R)}$: Reibungskraft

↳ $L = T - V$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_j^{(R)}$$

Beispiel: Reibungskraft $\propto v$: Stokes'sche Reibung

↳ Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \beta_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m \quad ; \quad \beta_{lm}$$

Dissipations-koef.-Tensor

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0}$$

modifizierte Lagrange-Gleichung

$$\hookrightarrow \quad Q_j^{(2)} = - \sum_{k=1}^{f} \beta_{jk} \dot{q}_k$$

<u>Energiedissipation</u>

Gesamtenergie: $E = T + V = 2T - L$

mit skleronomen Zwangsbedingungen:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \mu_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m$$

konservatives System (bis auf Reibung)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_j} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \dot q_j} = 0 \right)$$

$\dot q_j \times$ Lagrange-Gleichung

$$\left(\begin{array}{l} \dot q_j \frac{\partial D}{\partial \dot q_j} = 2D \\ \dot q_j \frac{\partial T}{\partial \dot q_j} = 2T \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\dot q_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot q_j}}_{2\dot T - \frac{\partial T}{\partial \dot q_j} \ddot q_j} - \dot q_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = -2D$$

$$\text{mit} \quad \dot L = \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} \ddot q_j \rightarrow \dot q_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot L - \frac{\partial T}{\partial \dot q_j} \ddot q_j$$

$$\hookrightarrow 2\dot T - \dot L = -2D$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot E = -2D}$$

Energiedissipation bei Reibung

Nicht-holonome Systeme

Lagrange-Multiplikatoren

- Zwangsbedingungen in der Form $f(\vec{x}, t) = 0$
  nicht möglich

↳ Angabe von unabhängigen generalisierten Koordinaten
nicht möglich

aber: Zwangsbedingungen in differentieller Form
unter Umständen möglich, z.B. "rollende Rad"

$\Rightarrow$ Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Betrachte System mit $3N$ Freiheitsgraden
($N = \#$ Teilchen)

$\tilde{f}$: Anzahl Zwangsbedingungen, wobei

$f \leq \tilde{f}$: zB in differentieller Form:

$$\sum_{m=1}^{3N} g_{im}(x_1, \dots, x_{3N}, t)\, dx_m + h_i(x_1, \dots, x_{3N}, t)\, dt = 0$$

$$i = 1, \dots, f$$

verwende Anzahl holonomer Zwangsbed. $(\tilde{f} - f)$
zur Reduktion der Anzahl der Koordinaten:

$$n = 3N - (\tilde{f} - f)$$

↳ verwende n generalisierte Koordinaten: $q_1, \dots, q_n$

$$\Rightarrow \vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

aber q_j nicht unabhängig voneinander

umschreiben der differentiellen Zwangsbedingungen

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}(q_1, \dots, q_n, t)\, dq_m + b_i(q_1, \dots, q_n, t)\, dt = 0$$

Vergleich mit rein holonomen System

$f = 0$ und es existieren $\tilde{f}$ Gleichungen

$$g_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \qquad i = 1 \dots \tilde{f}$$

$$\Rightarrow \quad dg_i = 0 = \sum_m \frac{\partial g_i}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial g_i}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow a_{im} = \frac{\partial g_i}{\partial q_m} \; ; \; b_i = \frac{\partial g_i}{\partial t}$$

partielle Ableitungen der Zwangsbedingungen

Lagrange-Gleichung für Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen ?

(aber in differentieller Form)

- für virtuelle Verrückungen ($\delta t = 0$) gilt:

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im} \, \delta q_m = 0 \qquad i = 1, \dots, f$$

- mit Lagrange - Multiplikatoren:

$\lambda_i \quad ; \quad i = 1, \dots, f$ unabhängig von $\underline{q}$ aber evtl. abhängig von t

- verwendet für generelle Optimierungsprobleme mit Neben- (Zwangs-) Bedingungen
- müssen noch bestimmt werden:

$$\sum_{i=1}^{f} \lambda_i \sum_{m}^{n} a_{im} \delta q_m = 0$$

- für konservative Systeme:

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right) \delta q_m = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$$

wg. $\tilde{f}$ Zwangsbedingungen: $n-f$ unabh. generalisierte Koordinaten

q_k : $k = 1, \dots, n-f$ unabh.

q_e : $\ell = n-f+1, \dots, n$ abhängig

mit f Bestimmungsgleichungen für λ_i
(frei wählbar)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im} \overset{!}{=} 0 \quad ; \quad m = n-f+1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{n} (\dots) \delta q_m = \sum_{m=1}^{n-f} (\dots) \delta q_m + \sum_{m=n-f+1}^{n} (\dots) \delta q_m = 0$$

wg. 1 Summand mit unabh. q_m und Bestimmungsgleichung für λ_i:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im}} \quad m = 1, \dots, n$$

Lagrange-Gleichung 1. Art

n Gleichungen $n+f$ Unbekannte:

n Koordinaten q_m

$+\ f$ Multiplikatoren λ_i

f Bestimmungsgleichungen gegeben durch differentiellen Zwangsbedingungen:

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im} \dot{q}_m + b_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, f$$

physikalische Interpretation der λ_i's:

vgl. holonomes System $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m$

$\Rightarrow Q_m = \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im}$: Komponenten einer generalisierten Kraft: hier gegeben durch Zwangskräfte