Theoretische Physik I

Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Teil I Theoretische/klassische/analytische Mechanik

Motivation:

- tieferes Verständnis der Newtonschen Mechanik
- verschiedene (mathematische) Grundkonzepte
  ↳ Anwendung auf unterschiedliche Bereiche
    z.B. E-Dynamik, QM, ART aus Variationsprinzip

1) Newtonsche Mechanik

Newtonsche Axiome

1) kräftefreier Körper (Masse) bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit

2) Kraft gleich Masse mal Beschleunigung

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \ddot{\vec{x}}$$

3) Actio = Reactio : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

⇒ Newtonsches Weltbild (Weltbild der nicht-relativistischen klassischen Mechanik):

- Materie: läßt sich durch (unzerstörbare) Massenpunkte eindeutig beschreiben
- Zeit: eindimensionaler Parameter zur Beschreibung von Bahnen / Trajektorien:
  passiv, unbeeinflußbar
- Raum: 3D "Bühne" der Physik
  unveränderlich, Beschreibung mit Koordinaten
  (z.B. kartesisches Koordinatensystem)

↳ Raum + Zeit sind absolut

- Bewegungen sind deterministisch

⇒ Limitierungen:

- Elementarteilchen sind ununterscheidbar
- QM: nicht deterministisch → probabilistisch
  u. a. Unschärferelation
- SRT: Zeit ist abhängig von Relativbewegung
- ART: Raum + Zeit werden durch Materie / Energie gekrümmt

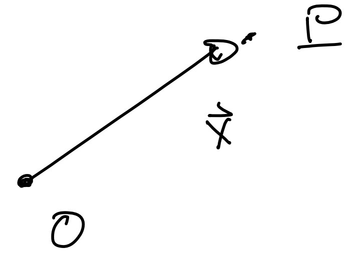
↳ nicht absolut, sondern dynamisch (z.B. GW)
Inhalt hat Einfluß auf "Bühne"

"Mathematisierung"

Zeit: $t \in \mathbb{R}$; Einheit Sekunde [s]

Raum: Beschreibung mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x, y, z)$
Dimension $|\vec{x}|$; Einheit Meter [m]

z.B. kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung in O



Änderung des Bezugssystems: "Beobachterwechsel"

a) Translation: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$

b) Rotation: $\vec{x}' = R\vec{x}$; R: Rotationsmatrix (orthogonal: $R^T R = \mathbb{1}$)

$\Rightarrow$ Gruppe Koordinatentransformationen:

Euklidische Gruppe

auch allgemein: Koordinatentransformation: Verwendung einer anderen "Karte"; z.B. Kugelkoordinaten $\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \varphi)$ mit $|\vec{x}|$ = Länge aber θ, φ = Winkel

Inertialsystem

kartesisches Koordinatensystem, in dem keine äußeren Kräfte wirken und es gilt

$$\vec{a} = 0$$

Postuliertes Koordinatensystem: beschreibt Klasse von Koordinatensystemen, die durch die Euklidsche Gruppe + Geschwindigkeitstransformation ineinander überführt werden kann: Galilei-Gruppe

Transformation: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{b} - \vec{v}t$; $\vec{b}, \vec{v}$ = konst.

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}}' = 0 = \ddot{\vec{x}}$$

Galileische Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Alle physikalischen Gesetze sind dort gleich. („Physik" im fahrenden Zug = „Physik" im ruhenden System)

Newtonsches Determinismusprinzip

für jedes System mit N Massenpunkten sind die Bahnen vollständig bestimmt (determiniert) wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt alle Orte und Geschwindigkeiten gegeben sind, d.h. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \dots \dot{\vec{x}}_N)$ gegeben

Newtonsche Bewegungsgleichung

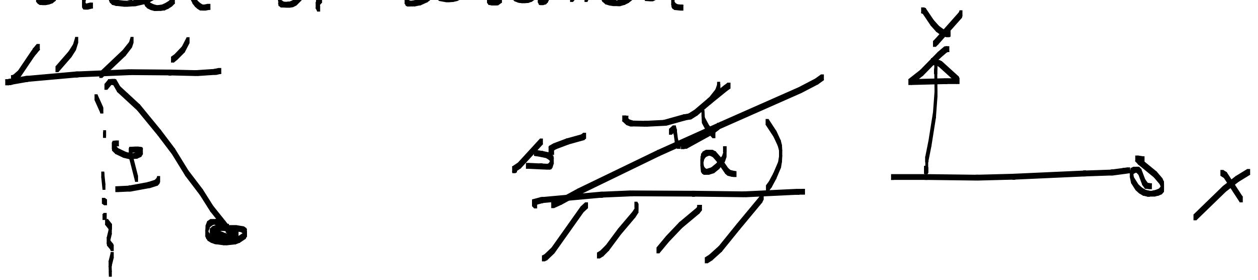
$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i \qquad \Rightarrow \text{Anfangswertproblem}$$

Lagrange-Mechanik

- Newtonsche Mechanik
  Bahnen/Trajektorien bestimmt durch Bewegungsgl.
  + Anfangswerte
- Lagrange-Mechanik
  Bahnen bestimmt durch "Randwerte" (auch z.B.
  kürzeste Strecke)

Zwangsbedingungen

Systeme oft eingeschränkt (geometrische Bedingungen)
z.B. Pendel o. Schlitten



Zwangskräfte i. A. nicht (im Detail) bekannt
(z.B. Auflagekraft o. Fadenspannung)

Formulierung mit

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i^{(ext.)} + \vec{Z}_i$$ ← Zwangskraft

schwierig

- Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$
  nicht unabhängig
  z.B. Bahn auf schiefer Ebene : $y = tg\alpha \, x$

Terminologie / Klassifizierung von Zwangsbedingungen

- holonome Zwangsbedingung

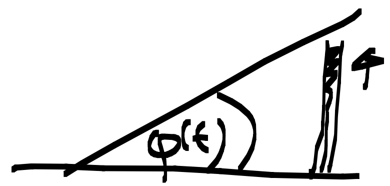
  $f(\vec{x}, t) = 0$ d.h. Formulierung mit Gleichung möglich

  z.B. $y - tg\alpha \, x = 0$

- nicht-holonome Zwangsbedingungen
  Formulierung mit Gleichung nicht möglich
  Elimination von redundanten Koordinaten nicht möglich
  z.B. Teilchen in Hohlkugel : $|\vec{x}| \leq R$

- skleronome ZB
  zeitunabhängige Zwangsbedingungen
  $f(\vec{x}) = 0$ holonome-skleronome ZB
  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

- rheonome ZB : $f(\vec{x}, t)$
  $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ z.B. schiefe Ebene zeitabhängig



Holonome Zwangsbedingungen

\# Freiheitsgrade für Systeme ohne ZB

$3N$ für N Teilchen

mit p holonome ZBs : Reduktion der Freiheitsgrade

$$f = 3N - p$$

$\Rightarrow$ Beschreibung mit f generalisierten Koordinaten

$q_1, q_2, \ldots, q_f$ möglich

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_f, t)$$

q_i unabhängig voneinander; d.h. $f(q_1, q_2 \ldots q_f) = 0$

kann nicht mehr formuliert werden

bilden Konfigurationsraum mit einem f-dimensionalen Konfigurationsvektor $\underline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_f)$

⇒ generalisierte Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_f$$

mit Anfangswerte bei t_0 : $\underline{q}(t_0) = \underline{q}_0$ und $\underline{\dot{q}}(t_0) = \underline{\dot{q}}_0$

System mit Bewegungsgleichungen (müssen noch bestimmt werden) bestimmt

Bem.: q_i's nicht eindeutig ; unterschiedliche generalisierte Koordinaten möglich

q_i's : nicht notwendigerweise Längen (z.B. Winkel)

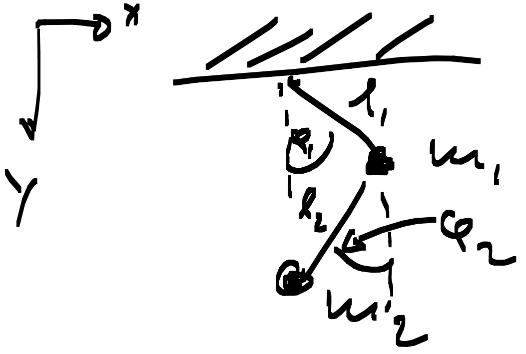
z.B. • Teilchen auf Kugeloberfläche fixiert; Radius R

Zwangsbedingung : $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

⇝ mögliche generalisierte Koordinaten :

Θ : Polarwinkel ; φ : Azimut-Winkel

- Doppelpendel in der Ebene



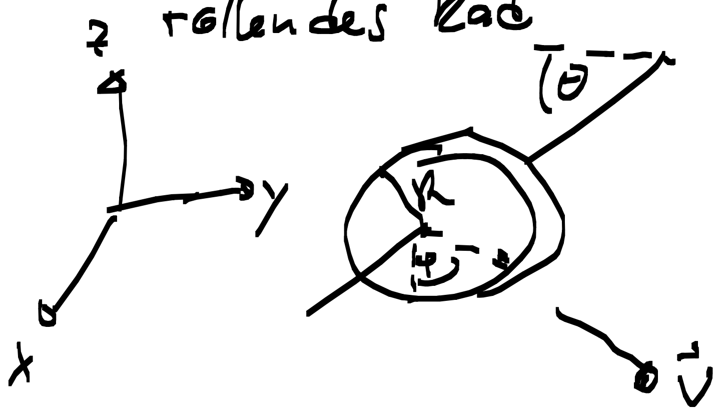
2-Körper Problem:
ursprünglich 6 Freiheitsgrade
4 holonome Zwangsbedingungen

$$z_1 = 0 = z_2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

- Bsp.: nicht-holonome Zwangsbedingung
  rollendes Rad



Beschreibung des Systems mit "Auflagepunkt" in der (x, y) Ebene und Winkel (φ, θ): 4 Freiheitsgrade (ignoriere $z = 0$)

holonome Zwangsbedingungen möglich?

↳ nein: Koordinaten sind unab. von einander

formal: "Rollen":

Geschwindigkeit Achse $(\dot{x}, \dot{y})$

= Geschwindigkeit Rad

v-Rad: $v = R\dot{\varphi}$

Richtung: $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = v\cos\theta = R\dot{\varphi}\cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R\cos(\theta(t))$$

$$\dot{y} = v\sin\theta = R\dot{\varphi}\sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} = R\sin(\theta(t))$$

nicht integrabel, da $\theta(t)$ unbekannt (hier: keine Bestimmungsgleichung für $\theta(t)$)

d'Alembert Prinzip

Ziel: Aufstellen der Bewegungsgleichungen unter Einbeziehung der Zwangsbedingungen
↳ differentielle Formulierung der Lagrange-mechanik

Def.: Virtuelle Verrückung $\delta\vec{x}_i$

infinitesimale Änderung der Orte (Koordinaten) eines mechanischen Systems bei festgehaltener Zeit t, die mit den Zwangsbedingungen im Einklang stehen
(virtuell = willkürlich, d.h. nicht durch physikalische Kräfte verursacht)

festgehaltene Zeit: $\delta t = 0$

mit $\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \ldots, q_f, t)$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \cancel{\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \delta t} = 0 \leftarrow \text{virtuell}$$

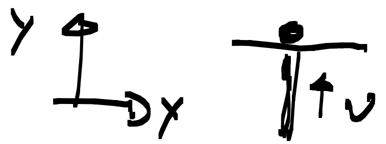
(Verwendung von δ genau wie Differential)

Anmerkung: für skleronome Zwangsbedingungen:
$\delta \vec{x}$ real ausführbar

für rheonome ZBs nicht real ausführbar

z.B.

Teilchen im Aufzug



$$d\vec{x} = (dx, dy) = (dx, v\,dt) \quad \text{reale Verrückung}$$

$$\delta \vec{x} = (\delta x, \delta y) = (\delta x, 0) \quad \text{nicht real durchführbar}$$

Def.: <u>Virtuelle Arbeit</u>

$$\delta W = -\sum_i^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x} \qquad i = 1, \ldots, N \text{ Teilchen}$$

mit $\vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i$ $\qquad \vec{F}_a$: äußere Kraft

$\vec{Z}$: Zwangskraft

mit Newtonsche Bewegungsgl.:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i = m_i \vec{a}_i \quad ; \quad \vec{a}_i = \ddot{\vec{x}}_i$$

bzw. $\vec{F}_{ai} + \vec{Z}_i - m_i \ddot{\vec{x}} = 0$ $\qquad$ dynamisches Gleichgewicht

$$\Rightarrow \sum_i (\vec{F}_{ai} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i + \sum_i \vec{Z}_i \delta \vec{x}_i = 0$$

<u>d'Alembertsche Prinzip</u>: die von den Zwangskräften geleistete virtuelle Arbeit ist <u>null</u>; bzw. Zwangskräfte leisten <u>keine</u> virtuelle Arbeit

$$\boxed{\delta W_Z = -\sum_i \vec{Z}_i \, \delta \vec{x}_i = 0}$$

Bem.: skleronome Zwangsbedingungen: Zwangskräfte leisten keine reale Arbeit

theonom: ... können reale Arbeit leisten

auch d'Alembertsche Prinzip

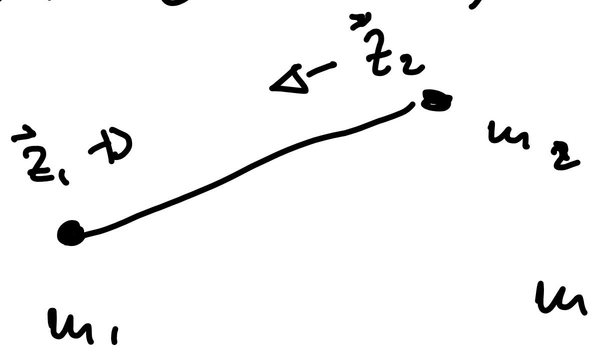
$$\boxed{\sum_i^N \left(\vec{F}_{ai} - m_i \ddot{\vec{x}}_i \right) \delta \vec{x}_i = 0}$$

Vorteil: Formulierung ohne (komplizierte) Zwangskräfte

aber: $\delta \vec{x}_i$ nicht unabhängig voneinander.

(z.B. holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{x}) = 0$)

Bsp.: $\delta W = 0$; kräftefreie Hantel



mit Ursprung bei m_1

$\delta \vec{x}_1 = \delta \vec{s}$ Verschiebung

m_2 kann relativ zu m_1 rotieren

$\delta \vec{x}_2 = \delta \vec{s} + \delta \vec{R}$

d'Alembertsche Prinzip:

$$\delta W_Z = 0 = -\vec{Z}_1 \delta \vec{s} - \vec{Z}_2 (\delta \vec{s} + \delta \vec{R})$$

$$= -\underbrace{(\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2)}_{=0} \delta \vec{s} - \underbrace{\vec{Z}_2 \delta \vec{R}}_{\vec{Z}_2 \perp \delta \vec{R}}$$

$= 0 \Rightarrow$ keine virtuelle (auch keine reale) Arbeit

Ziel: Bewegungsgleichungen mit generalisierten Koordinaten
(unabhängige Koordinaten)

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \ldots, q_f, t) \quad ; \quad \underline{q} = (q_1, q_2, \ldots q_f)$$

Konfig. raum

$$\delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

(Einstein Summenkonvention:

$$\delta \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \;)$$

virtuell: $\delta t = 0$

$$\leadsto \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \delta t = 0$$

1. Term aus Summe

$$\sum_i \vec{F}_{a,i} \delta \vec{x}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{f} Q_j \delta q_j$$

mit $Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$ generalisierte Kraftkomponenten

Bem.: $[Q_j] \neq$ Kraft i. A.

aber $[Q_j q_j] =$ Energie

mit konservativen Kräften

$$\vec{F}_{a,i} = -\vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) \; ; \quad V: \text{Potential}$$

$$= -\sum_j (\vec{\nabla}_i q_j) \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = -\sum_i (\vec{\nabla}_i V) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

2. Term:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} m_i \left(\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} m_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 \right) \right] \delta q_j$$

$$= \sum_{j}^{f} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

mit $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^2$ kinetische Energie des N-Teilchen Systems

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0}$$

d'Alembertsche Prinzip

mit holonomen Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

q_j unabhängig voneinander

für konservatives System:

$V = V(\underline{q})$ unabhängig von $\underline{\dot{q}} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) \right] \delta q_j = 0$$

Def.: $\boxed{L = T - V}$

$= L(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ Lagrange-Funktion

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

holonom + konservativ

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Lagrange-Gleichung 2. Art

Lagrange-Bewegungsgleichung

Vergleich mit Newton:

- Energie (Skalar) vs. Kraft (Vektor)
- keine Zwangskräfte
- invariant unter beliebigen Koordinatentransformation
- Formulierung in rein differentieller Form

Koordinatentransformation:

$$\vec{x} \to \vec{\tilde{x}} \quad ; \quad \vec{x} = \vec{x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

Beschleunigung: $\ddot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}})$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j}\frac{d\tilde{x}_j}{dt} \quad \text{(Summenkonvention)}$$

$$\ddot{x} = \underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_k}{dt} \frac{d\tilde{x}_j}{dt}}_{\text{„zusätzlicher Term"}} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d^2 \tilde{x}_j}{dt^2}$$

→ Newtonsche Bewegungsgl. nicht forminvariant

$$F_i = \tilde{F}_j \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i}$$ allgem. Transformation eines Vektors

Lagrange Gleichung unter Koordinatentransformation

$$\tilde{L}(\underline{\tilde{q}}, \underline{\dot{\tilde{q}}}, t) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$$

Skalar: Wert bleibt unter Koordinaten-trafo gleich (z.B. Temperatur)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

1) $$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j}$$

mit $$\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\right)\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\right)\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial q_j}$$

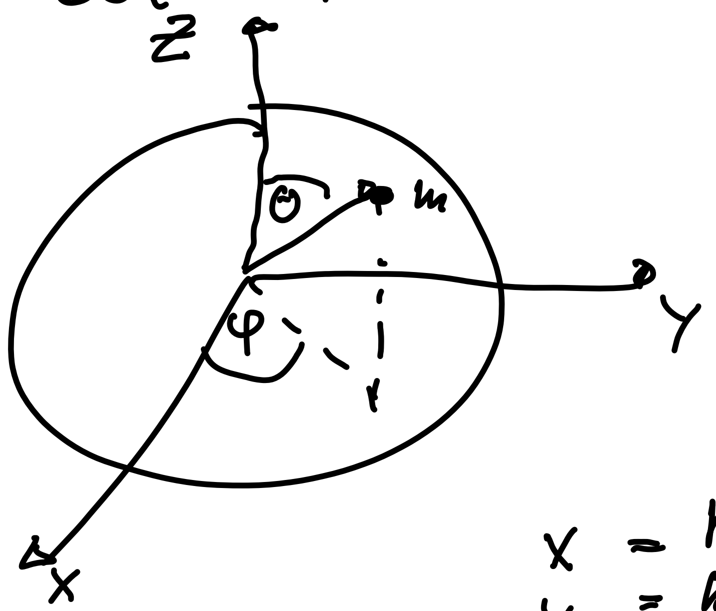
2) $$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k}\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k}\right)}_{=0}\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$ Lagrange-Gleichung forminvariant unter Koordinatentransformation!

Anwendungen

1) Teilchen auf Kugeloberfläche im Schwerefeld der Erde



Zwangsbedingung: holonom-skleronom

$r = |\vec{x}| = R$

generalisierte Koordinaten

θ : Polarwinkel : q_1

φ : Azimut : q_2

$$x = R \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = R \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = R \cos\theta$$

Kraft: $\vec{F}_a = -mg\vec{e}_z = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad q_1 \; q_2$

Lagrange-Funktion: $L = T - V = L(\theta, \varphi)$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2)$$

V aus generalisierter Kraft:

$$Q_1 = Q_\Theta = \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \Theta} = -mg(-k\sin\Theta) = mgk\sin\Theta$$

$$Q_2 = Q_\varphi = \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = 0$$

konservative Kraft: $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow V(\Theta) = -\int d\Theta\, Q_\Theta = -mgk\int d\Theta \sin\Theta = mgk(1+\cos\Theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{m}{2}k^2\left(\dot\Theta^2 + \sin^2\Theta\,\dot\varphi^2\right) - mgk(1+\cos\Theta)}$$

Lagrange-Gleichungen / Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = mk^2 \sin\Theta\cos\Theta\,\dot\varphi^2 + mgk\sin\Theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi$$ ist zyklische Koordinate

↳ Erhaltungsgröße

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\Theta} = mk^2\dot\Theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mk^2\sin^2\Theta\,\dot\varphi$$

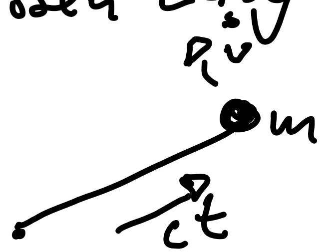
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \theta &: \ddot{\theta} - \left(\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}\right)\sin\theta = 0 \\ \varphi &: \frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\right) = 0 \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung ($\vec{\ell} = \vec{x} \times \vec{v}$)

Lösung liefert Bahn auf Kugeloberfläche
(nicht trivial, auf $\dot{\varphi} = 0$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta \quad \text{vgl. Pendel } \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \approx -\frac{g}{\ell}\theta$$
)

2) Teilchen an masseloser Stange, dessen Läng sich linear mit der Zeit ändert



Bewegung nur in x-y-Ebene

$z = 0$ holonom-skleronom

$|\vec{x}| = R + ct$ holonom-rheonom

c: konst. Längenänderung

mit Polarkoordinaten:

$$x(t) = r(t)\cos\varphi = (R+ct)\cos\varphi \quad ; \; q_1 = \varphi$$
$$y(t) = r(t)\sin\varphi = (R+ct)\sin\varphi$$

Lagrange-Funktion: $L = \underline{\underline{T}} - V$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\left(c^2 + (k+ct)^2\dot{\varphi}^2\right) \quad ; \quad V = 0$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \text{ zyklische Koordinate}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(k+ct)^2\dot{\varphi} = \text{konst}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 = m(k+ct)\left((k+ct)\ddot{\varphi} + 2c\dot{\varphi}\right)$$

Lösung: triviale Lösung $\dot{\varphi} = 0$

aus $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = h \Rightarrow d\varphi = \frac{h/m}{(k+ct)^2}dt$

$$\hookrightarrow \varphi(t) = -\frac{1}{c}\frac{h/m}{(k+ct)}$$

Verallgemeinerte Potentiale / geschwindigkeitsabhängige Potentiale

Lagrange-Gleichung für holonome Systeme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

auch für nicht konservative Systeme

wenn $\boxed{Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}}$

mit verallgemeinerte Potential:

$$U = U(q_j, \dot q_j)$$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion

$$\boxed{L = T - U} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

verallgem. Lagrange-Funktion

Bsp.: Teilchen im Elektromagnetischen Feld

Kraft: $\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v}\times\vec{B})\right)$ in Gauß-cgs Einheiten

mit Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad ; \quad \vec{j}: \text{Stromdichte}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \rho: \text{Ladungsdichte}$$

$\Rightarrow$ $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$; $\vec{A}$ Vektorpotential

Induktion: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$

Lösung: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

in Lorentzkraft: $\vec{F} = e\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right)$

suche $U(\vec{x},\vec{v})$ mit $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{\nabla}_{\vec{v}}U - \vec{\nabla}U$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \rightarrow (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = e\left(-\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right) - \frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}\right)$$

$$\text{mit} \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{\nabla}_{\vec{v}}(\vec{A}\cdot\vec{v})$$

$$= e\left(-\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\vec{\nabla}_{\vec{v}}(\vec{A}\cdot\vec{v})\right)$$

$\Rightarrow$ verallgemeinertes Potential

$$\boxed{U(\vec{x},\vec{v}) = e\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}\right)}$$

für Lorentzkraft

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - e\left(\phi - \frac{1}{c}(\vec{A}\cdot\vec{v})\right)}$$

Systeme mit Reibung

- meist geschwindigkeitsabhängig
- nicht energieerhaltend

↪ $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ nicht möglich

↪ keine Lagrange-Funktion $L = T - V$

aber $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$ d'Alembertsches Prinzip für holonome Zwangsbedingungen

mit $\vec{F} = \vec{F}^{(k)} + \vec{F}^{(R)}$

$\vec{F}^{(k)} = -\vec{\nabla} V$ konservativer Anteil

$\vec{F}^{(R)}$: Reibungskraft

↪ $L = T - V$

$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_j^{(R)}$

Beispiel: Reibungskraft $\propto v$: Stokes'sche Reibung

↳ Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \beta_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m \quad ; \quad \beta_{lm}$$ Dissipations-koef. -Tensor

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0}$$ modifizierte Lagrange-Gleichung

$$\hookrightarrow \quad Q_j^{(2)} = - \sum_{k=1}^{f} \beta_{jk} \dot{q}_k$$

Energiedissipation

Gesamtenergie: $E = T + V = 2T - L$

mit skleronomen Zwangsbedingungen:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \mu_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m$$

konservatives System (bis auf Reibung)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right)$$

$\dot{q}_j \times$ Lagrange-Gleichung

$$\left(\begin{aligned} \dot{q}_j \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} &= 2D \\ \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= 2T \end{aligned} \right)$$

$$\underbrace{\dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}}_{2\dot{T} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j} - \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = -2D$$

$$\text{mit} \quad \dot{L} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \quad \rightarrow \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{L} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

$$\hookrightarrow \; 2\dot{T} - \dot{L} = -2D$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{E} = -2D}$$

Energiedissipation bei Reibung

Nicht-holonome Systeme

Lagrange – Multiplikatoren

- Zwangsbedingungen in der Form $f(\vec{x}, t) = 0$ nicht möglich
  ↳ Angabe von unabhängigen generalisierten Koordinaten nicht möglich

aber: Zwangsbedingungen in differentieller Form unter Umständen möglich, z.B. "rollende Rad"

$\Rightarrow$ Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Betrachte System mit $3N$ Freiheitsgraden
($N = \#$ Teilchen)

$\tilde{f}$: Anzahl Zwangsbedingungen, wobei

$f \leq \tilde{f}$: zB in differentieller Form:

$$\sum_{m=1}^{3N} g_{im}(x_1,\dots,x_{3N},t)\,dx_m + h_i(x_1,\dots,x_{3N},t)\,dt = 0$$

$$i = 1,\dots,f$$

verwende Anzahl holonomer Zwangsbed. $(\tilde{f}-f)$
zur Reduktion der Anzahl der Koordinaten:

$$n = 3N - (\tilde{f}-f)$$

↳ verwende n generalisierte Koordinaten: $q_1,\dots,q_n$

$$\Rightarrow \vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1,\dots,q_n,t)$$

aber q_j nicht unabhängig voneinander
umschreiben der differentiellen Zwangsbedingungen

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}(q_1,\dots,q_n,t)\,dq_m + b_i(q_1,\dots,q_n,t)\,dt = 0$$

vergleich mit rein holonomen System

$f = 0$ und es existieren $\tilde{f}$ Gleichungen

$$g_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \qquad i = 1 \dots \tilde{f}$$

$$\Rightarrow \quad dg_i = 0 = \sum_m \frac{\partial g_i}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial g_i}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow a_{im} = \frac{\partial g_i}{\partial q_m} \; ; \; b_i = \frac{\partial g_i}{\partial t}$$

partielle Ableitungen der Zwangsbedingungen

Lagrange-Gleichung für Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen ?

(aber in differentieller Form)

- für virtuelle Verrückungen ($\delta t = 0$) gilt:

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im} \, \delta q_m = 0 \qquad i = 1, \dots, f$$

- mit Lagrange - Multiplikatoren:

$\lambda_i \qquad ; \quad i = 1, \dots, f$ unabhängig von $\underline{q}$ aber evtl. abhängig von t

- verwendet für generelle Optimierungsprobleme mit Neben- (Zwangs-) Bedingungen

- müssen noch bestimmt werden:

$$\sum_{i=1}^{f} \lambda_i \sum_{m}^{n} a_{im} \delta q_m = 0$$

- für konservative Systeme:

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right) \delta q_m = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$$

wg. $\tilde{f}$ Zwangsbedingungen: $n-f$ unabh. generalisierte Koordinaten

q_k : $k = 1, \ldots, n-f$ unabh.

q_e : $e = n-f+1, \ldots, n$ abhängig

mit f Bestimmungsgleichungen für λ_i (frei wählbar)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im} \overset{!}{=} 0 \quad ; \quad m = n-f+1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{n} (\ldots)\delta q_m = \sum_{m=1}^{n-f} (\ldots)\delta q_m + \sum_{m=n-f+1}^{n} (\ldots)\delta q_m = 0$$

wg. 1 Summand mit unabh. q_m und Bestimmungsgleichung für λ_i:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im}} \quad m = 1, \ldots, n$$

Lagrange-Gleichung 1. Art

n Gleichungen $n+f$ Unbekannte:

n Koordinaten q_m

$+$ f Multiplikatoren λ_i

f Bestimmungsgleichungen gegeben durch differentiellen Zwangsbedingungen:

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}\dot{q}_m + b_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, f$$

physikalische Interpretation der λ_i's:

vgl. holonomes System $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m$

$\Rightarrow Q_m = \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im}$: Komponenten einer generalisierten Kraft: hier gegeben durch Zwangskräfte

Zwangskräfte

für Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

N- Teilchen System

$$f_j(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t) = 0 \qquad j = 1, \ldots, f \qquad f : \#\ ZB$$

verwende keine generalisierte Koordinaten, d.h. ZB's nicht zur Reduktion der Freiheitsgrade;

aber: nur $3N-f$ unabh. Koordinaten

$$df_j = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot d\vec{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 : \quad \text{reale Verschiebung}$$

für virtuelle Verrückung ($\delta t = 0$)

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot \delta \vec{x}_i = 0$$

mit f Lagrange-Multiplikatoren

$$\sum_{j=1}^{f} \sum_{i=1}^{N} (\nabla_i f_j) \lambda_j \, \delta \vec{x}_i = 0$$

mit d'Alembert'sches Prinzip:

$$\sum_{i}^{N} \left(\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i \right) \delta \vec{x}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i + \sum_{j=1}^{f} \lambda_j \left(\vec{\nabla}_i f_j \right) \right) \delta \vec{x}_i = 0$$

wähle λ_j so daß $(\ldots) = 0$

vgl. mit Newton $m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i$

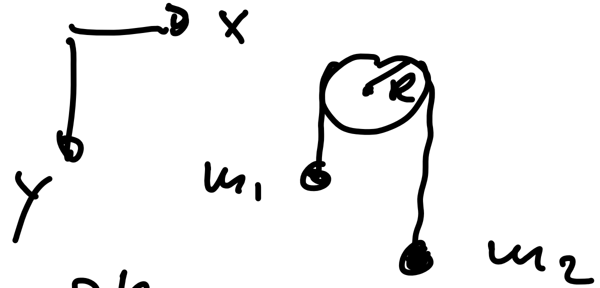
$$\Rightarrow \boxed{m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \sum_{j=1}^{f} \lambda_j \left(\vec{\nabla}_i f_j \right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{Z}_i = \sum_{j=1}^{f} \lambda_j \left(\vec{\nabla}_i f_j \right)} \quad : \text{Zwangskraft}$$

Bestimmung der Zwangskräfte u.U. <u>einfacher</u> mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren

Beispiel: suche Fadenspannung

Atwoodsche Fallmaschine



$\downarrow \vec{g}$

zB

$z_1 = 0 = z_2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2R$

$y_1 + y_2 + \pi R = \ell$: wird hier nicht verwendet

↳ Anzahl generalisierter Koordinaten: $6 - 4 = 2$

$q_1 = y_1$; $q_2 = y_2$

$f(q_1, q_2) = 0 = q_1 + q_2 + \pi R - \ell$

↳ $\delta f = \delta q_1 + \delta q_2 = 0$

↳ $a_{11} = 1 = a_{12}$

ein Lagrange-Multiplikator: λ

aus generalisierter Kraft: $Q_m = \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im}$

$Q_1 = \lambda = Q_2$ <u>Fadenspannung</u>

Lagrange-Funktion: $L = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2\right) + g\left(m_1 q_1 + m_2 q_2\right)$

LG6:

$m_1 \ddot{q}_1 - g m_1 = \lambda$

$m_2 \ddot{q}_2 - g m_2 = \lambda$

+ Zwangsbedingung: $\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0$

3 Gleichungen für 3 Unbekannte (q_1, q_2, λ)

$\Rightarrow \ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$

$\Rightarrow \lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Fadenspannung:
für $m_1 \gg m_2$
$\lambda = -2 g m_2$
für $m_1 = m_2 \Rightarrow \lambda = -g m$

Beispiel: "rollendes Rad"
System mit nicht-holonomen ZB; aber Darstellung in differentieller Form
generalisierte Koordinaten:

x, y und φ, Θ

q_1, q_2 $\quad q_3 \quad q_4$

Zwangsbedingung Rollen:

$$\dot{x} - R\dot{\varphi}\cos\theta = 0 \quad ; \quad \dot{y} - R\dot{\varphi}\sin\theta = 0$$

mit $\sum_{m=1}^{n} a_{im}\dot{q}_m = 0$ n : 4 Koordinaten
$i = 1,2$ Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \quad a_{11} = 1 \quad a_{12} = 0 \quad a_{13} = -R\cos\theta \quad a_{14} = 0$$

$$a_{21} = 0 \quad a_{22} = 1 \quad a_{23} = -R\sin\theta \quad a_{24} = 0$$

2 Lagrange-Multiplikatoren: λ_1, λ_2
4 generalisierte Kräfte $\left(Q_m = \sum_{i=1} \lambda_i a_{im} \right)$

$$Q_1 = \lambda_1 \quad Q_2 = \lambda_2 \quad Q_3 = -\lambda_1 R\cos\theta - \lambda_2 R\sin\theta \,;\; Q_4 = 0$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2$$

$I_1 = \frac{1}{2}MR^2$ Trägheitsmoment: Drehung um Achse

$I_2 = \frac{1}{4}M\left(R^2 + \frac{1}{3}d^2\right)$; d : Scheibendicke

LGL:

$M\ddot{x} = \lambda_1$; $M\ddot{y} = \lambda_2$; $I_1\ddot{\varphi} = -\lambda_1 R\cos\Theta - \lambda_2 R\sin\Theta$; $I_2\ddot{\Theta} = 0$

+ 2 Zwangsbedingungen: 6 Gleichungen für 6 Unbekannte

1) $\Theta = \dot{\Theta}_0 t$; $\dot{\Theta} = \text{konst}$

2) $\lambda_1 = MR(\ddot{\varphi}\cos(\dot{\Theta}_0 t) - \dot{\varphi}\dot{\Theta}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t))$

3) $\lambda_2 = MR(\ddot{\varphi}\sin(\dot{\Theta}_0 t) + \dot{\varphi}\dot{\Theta}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t))$

4) $I_1\ddot{\varphi} = -MR^2\ddot{\varphi} \rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \dot{\varphi}_0 = \text{konst.}$

5) $\dot{x} = R\dot{\varphi}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow x(t) = R\frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0}\sin(\dot{\Theta}_0 t) + x_0$

6) $\dot{y} = R\dot{\varphi}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow y(t) = -R\frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0}\cos(\dot{\Theta}_0 t) + y_0$

Zwangskräfte:

$Q_1 = -MR\dot{\varphi}_0\dot{\Theta}_0\sin(\dot{\Theta}_0 t)$; $Q_2 = MR\dot{\varphi}_0\dot{\Theta}_0\cos(\dot{\Theta}_0 t)$

$Q_3 = 0 = Q_4$

halten Rad in der "Spur"

Hamiltonsche Prinzip / Variationsprinzip

bisher : d'Alembert-Prinzip : Differentialprinzip
↳ Ableitung der Lagrange-Gleichungen (Bewegungsgleichungen) durch virtuelle Verrückungen

Hamilton-Prinzip : Integrationsprinzip

Bestimmung der Bewegungsgleichungen durch Variation aller möglichen Bahnen + Optimierung (Extremwertbestimmung)

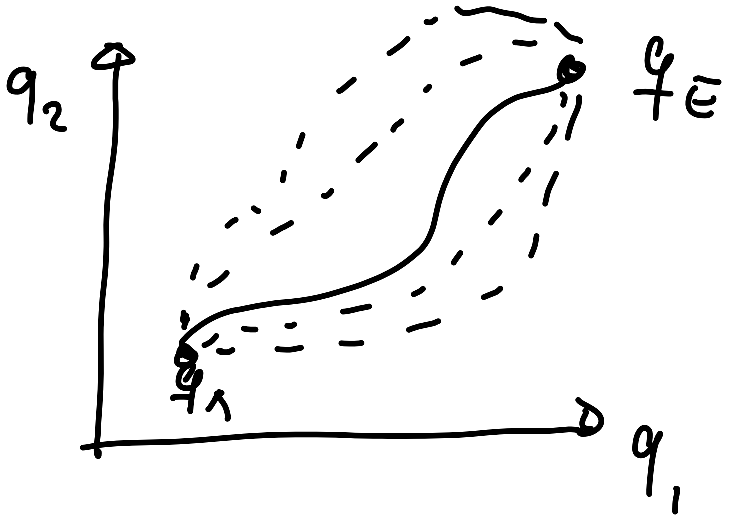
betrachte Bahnen im $\mathbb{R}^n$

mit $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ Konfigurationsvektor

Bahnen $t_A \le t \le t_E$; $t \mapsto (q_1(t), \dots, q_n(t))$

mit Randwerten $\underline{q}(t_A) = \underline{q}_A$; $\underline{q}(t_E) = \underline{q}_E$

Bahnen im Konfigurationsraum



mit der Funktion : $L = L(q(t); \dot{q}(t), t)$

$= L(t)$

allgemein: $q(t)$ beliebige Funktionen

$\dot{q}(t)$ "Änderungsrate" von $q(t)$

und

$$S[L] = \int_{t_A}^{t_E} dt\, L(t)$$

hier: Wirkung, Wirkungsfunktional

Funktional (hier Abb von Funktionen in $\mathbb{R}$, allgem.: Abb. von Funktionen auf Funktionen)

$\Rightarrow$ Hamiltonsches Prinzip

Die Bewegung eines Systems erfolgt entlang einer Bahnkurve im Konfigurationsraum, die $\mathcal{S}[L]$ stationär macht.

auch: Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\boxed{\delta \mathcal{S} = 0} \to \text{Variationsrechnung}$$

$\mathcal{S}$: stationär / extremal

Möglichkeit !

betrachte Bahnen mit kleiner Variation um Extremal-Bahn :

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0(t) + \alpha\, \underline{s}(t) = \underline{q}(t,\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\underline{q}}(t,\alpha) = \dot{\underline{q}}_0(t) + \alpha\, \dot{\underline{s}}(t)$$

mit Randbedingungen : $\underline{s}(t_*) = 0 = \underline{s}(t_E)$

$\rightarrow L = L(\underline{q}(t,\alpha), \dot{\underline{q}}(t,\alpha))$

$\rightarrow S(\alpha) = \int_{t_A}^{t_E} dt \, L(\underline{q}(t,\alpha), \dot{\underline{q}}(t,\alpha))$

S : stationär : $\delta S = \left.\frac{dS}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \delta\alpha = 0$

$$\left.\frac{dS}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\underline{\nabla}_q L)\cdot\underline{s} + (\underline{\nabla}_{\dot{q}} L)\cdot\dot{\underline{s}} \right]$$

$$\overset{\text{p. I}}{=} \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\underline{\nabla}_q L)\underline{s} - \frac{d}{dt}(\underline{\nabla}_{\dot{q}} L)\underline{s} \right] + \underbrace{(\underline{\nabla}_{\dot{q}} L)\cdot\underline{s}\Big|_{t_A}^{t_E}}_{=0}$$

Randterm

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\underline{\nabla}_q L) - \frac{d}{dt}(\underline{\nabla}_{\dot{q}} L) \right]\cdot \underline{s}$$

$$\overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\underline{\nabla}_{\dot{q}} L\right) - \underline{\nabla}_q L = 0}$$

Euler-Gleichung der Variationsrechnung

+ Mechanik

↳ Euler-Lagrange-Gleichungen

(ELG oder ELDG)

Möglichkeit 2

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt\, L = \int_{t_A}^{t_E} dt\, \delta L$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \left[\left(\underline{\nabla}_q L\right) \delta \underline{q} + \left(\underline{\nabla}_{\dot{q}} L\right) \delta \underline{\dot{q}} \right] \quad ; \quad \delta \underline{\dot{q}} = \frac{d}{dt} \delta \underline{q}$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} \int_{t_A}^{t_E} dt \left[\left(\underline{\nabla}_q L\right) \cdot \delta \underline{q} - \frac{d}{dt}\left(\underline{\nabla}_{\dot{q}} L\right) \cdot \delta \underline{q} \right] + \underbrace{\cancel{\left(\underline{\nabla}_{\dot{q}} L\right) \delta \underline{q} \Big|_{t_A}^{t_E}}}_{= 0}$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \underbrace{\left[(\nabla_q L) - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot q} L) \right]}_{=0} \delta q$$

wg. unabhängig von δq

$\Rightarrow$ ELG

Vergleich mit d'Alembert Prinzip

d'Alembert Prinzip : $\sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$

mit $\ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}} \delta \vec{x}) - \dot{\vec{x}} \delta \dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}} \delta \vec{x}) - \frac{1}{2} \delta \dot{\vec{x}}^2$

Integration

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i (\vec{F}_{ai} - m_i \ddot{\vec{x}}) \delta \vec{x} = 0$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i \Big(\underset{①}{\vec{F}_{ai} \cdot \delta \vec{x}_i} - \underset{②}{\frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x})} + \underset{③}{\frac{m_i}{2} \delta \dot{\vec{x}}^2} \Big)$$

① $\sum_i \vec{F}_{a,i}\,\delta\vec{x}_i = \sum_j Q_j\,\delta q_j = -\sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j}\,\delta q_j = -\delta V$

für konservative Systeme

② $\int_{t_A}^{t_E} dt\, \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{\vec{x}}_i\, \delta\vec{x}_i = \sum m_i \dot{\vec{x}}_i\, \delta x_i \Big|_{t_A}^{t_E}$

$= 0$ Start- und Endpunkte werden nicht variiert

③ $\sum_i \frac{m_i}{2} \delta \dot{x}_i^2 = \delta T$ $\quad T$: kinetische Energie

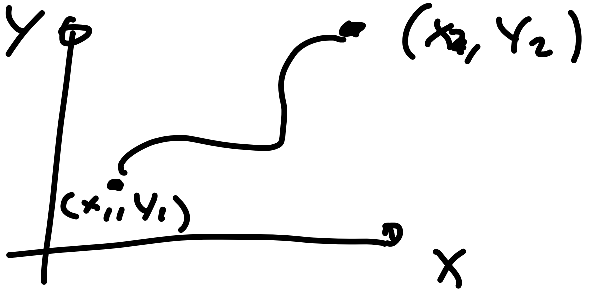
$\Rightarrow \quad 0 = \int_{t_A}^{t_E} dt\,(\delta T - \delta V) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt\,(T - V) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt\, L$

$\Rightarrow$ L : Lagrange-Funktion

$\Rightarrow$ d'Alembertsches Prinzip ist äquivalent zu Hamiltonschen Prinzip

Variationsrechnung Beispiele

1) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene



Kurve: $y = y(x)$ gesucht mit Parameter x

infinitesimales Wegelement: ds

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Wegstrecke: $$S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\Rightarrow L = L(y, y') \overset{\text{hier}}{=} L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen: $$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}\, y'\right)$$

$\Rightarrow$ Lösung: $y' = \text{const.} \Rightarrow y(x) = a x + b$

<u>Gerade</u>

2) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf Kugeloberfläche

Koordinaten: Θ, φ ; $R = \text{const.}$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= R^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\varphi^2)$$

und t : beliebiger Parameter ; z.B. Zeit : $\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt}$

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$

$$\Rightarrow S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt\, R\left(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2\right)^{1/2}$$

$$\delta S = 0 = \int dt \tfrac{1}{2} R\left(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2\right)^{-1/2} \delta\left(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

($\rightarrow$ Geodätengleichung)

betrachte $\tilde{L} = \dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2 = L(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\varphi})$

$$\Rightarrow \text{EGL}: \quad \left.\begin{array}{ll} \Theta: & \ddot{\Theta} = \sin\Theta\cos\Theta\,\dot{\varphi}^2 \\ \varphi: & \ddot{\varphi} = -2\,\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\,\dot{\Theta}\dot{\varphi} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{für } \Theta = \pi/2 \\ \hookrightarrow \ddot{\varphi} = 0 \\ \hookrightarrow \dot{\varphi} = \text{const} \end{array}$$

Bemerkung: unterschiedene Lagrange-Funktionen

z.B. Kugeloberfläche:

$$ds = R\, d\Theta \sqrt{1 + \sin^2\Theta\, \varphi'} \quad ; \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\Theta}$$

$\Rightarrow L(\varphi', \Theta)$ hier: Θ (Integrations)parameter $\hat{=}$ "Zeit"

$$ds = R\, d\varphi \sqrt{\Theta' + \sin^2\Theta}$$

$\Rightarrow L(\Theta, \Theta')$: ohne "Zeit"

<u>Geodätengleichung</u> (= extremale Bahnen in beliebiger Geometrie)

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i\, dx_j = g_{ij}\, dx_i\, dx_j \quad \text{(Summenkonvention)}$$

x_i : beliebige Koordinaten

g_{ij} : Metrik, metrischer Tensor als Matrix darstellbar

z.B. $g_{ij} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2\Theta)$; $\underline{x} = (r, \Theta, \varphi)$

$$\Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\Theta + r^2 \sin^2\Theta\, d\varphi^2$$

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{ij}\dot{x}_i \dot{x}_j} \quad ; \quad t : \text{beliebiger Parameter}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \tfrac{1}{2} \left(g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \right)^{-1/2} \delta \left(g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \tfrac{1}{2} \left(\quad \right)^{-1/2} \Big[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \delta x_k \dot{x}_i \dot{x}_j + g_{ij} \underbrace{\delta(\dot{x}_i \dot{x}_j)}_{\underbrace{\frac{\partial \dot{x}_i \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_k}}_{2 g_{kj} \dot{x}_j} \delta \dot{x}_k} \Big]$$

$$\delta \dot{x}_k = \frac{d}{dt} \delta x_k$$

part. Integration

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \tfrac{1}{2} \left(\ldots \right)^{-1/2} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_i \dot{x}_j - 2 \frac{d}{dt} \left(g_{kj} \dot{x}_j \right) \right] \delta x_k$$

$$\Rightarrow \boxed{ \frac{d}{dt} \left(g_{kj} \dot{x}_j \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 } \quad \text{Geodäten-gleichung}$$

Bewegungsgleichung für Teilchen aber auch Licht in gegebener Geometrie (z.B. Planetenbahnen, Lichtbeugung)

Brachistochronenproblem
(gr. brachystos = kürzeste, chronos = Zeit)
schnellster Weg im Schwerefeld der Erde

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \rightarrow \text{extremal}: \quad \delta S = 0$$

$$= \int_A^B \frac{ds}{v(s)}$$

aus Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh$$

$$A: (0, h) \; ; \; B: (x_B, 0)$$

$$\Rightarrow v(y) = \sqrt{2g(h-y)}$$

mit $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$

$$S = \int_0^{x_B} dx \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} \Rightarrow \text{Lagrange-Funktion:}$$

$$L(y,y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

$$\text{ELG}: \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(h-y)(1+y'^2)}}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g(h-y)(1+y'^2)}}\left[\frac{1}{2}\frac{y'^2}{2g(h-y)} + \frac{y''}{1+y'^2}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}}\ \frac{1}{h-y}$$

$$\Rightarrow \boxed{2(h-y)y'' = 1+y'^2} \text{ Euler DGL}$$

$$\text{Lösung:} \quad \frac{d}{dx}\left((h-y)(1+y'^2)\right) = 0$$

$$\Rightarrow (h-y)(1+y'^2) = a = \text{const.}$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{a-(h-y)}{h-y} = \frac{a-\tilde{y}}{\tilde{y}} \quad ; \quad \tilde{y} = h-y$$

Lösung: Teil einer Zykloidenbahn:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2R-y}{y}$$

$$x = R(\varphi + \sin\varphi)$$
$$y = R(1 + \cos\varphi)$$

Bemerkung:
wenn $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ $\quad t$ = Parameter zur Beschreibung des Problems (s.o. $t = x$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \iff \dot q \frac{\partial L}{\partial \dot q} - L = \text{const}}$$

Bsp. kürzeste Strecke in der Ebene:

$$ds = dx\sqrt{1+y'^2} \rightarrow L(y') \text{ bzw. } \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

aus $y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = \text{const} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$

Lösung $\Rightarrow$ $y(x) = ax + b$

Variationsrechnung mit Nebenbedingung

Hamiltonsche Prinzip <=> Lagrange-Gl. 1. Art

betrachte System mit f nicht-holonomen Zwangsbedingungen, die sich in differentieller Form darstellen lassen:

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}(q_1 \dots q_n, t)\dot{q}_m + b_i = 0 \qquad i = 1 \dots f$$

mit Hamiltonschen Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m = 0$$

q_m's nicht unabh. voneinander → $(\dots) \neq 0$

mit HP: Endpunkte bleiben unverrückt: $\delta t = 0$

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}\,\delta q_m = 0$$

mit Lagrange-Multiplikatoren λ_i: $\int dt \sum a_{im} \lambda_i = 0$

$$\Rightarrow \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m} + \sum_{i=1}^{f} a_{im}\lambda_i \right)\delta q_m = 0$$

wähle λ_i so daß $(\ldots) = 0$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{f} a_{im}\lambda_i}$$

Lagrange-Gl. 1. Art

n Gleichungen (q_m) für $n+f$ Unbekannte

$+ f$ Gleichungen aus Zwangsbedingungen

betrachte Systeme mit Nebenbedingungen bzw. holonome Zwangsbedingungen

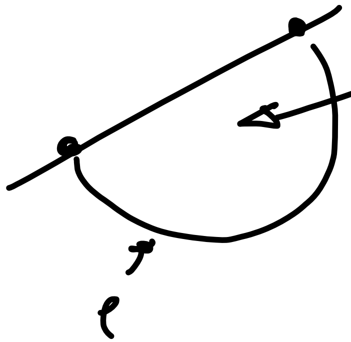
$$g_i(\underline{q},t) = 0 \Rightarrow dg_i = 0 \Rightarrow a_{im} = \frac{\partial g_i}{\partial q_m}$$

$\Rightarrow$ modifizierte Grundfunktion bzw. mod. Lagrange-Funktion

$$\tilde L(\underline{q},\underline{\dot q},t) = L(\underline{q},\underline{\dot q},t) + \sum_{i=1}^{f} \lambda_i g_i(\underline{q},t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial \tilde L}{\partial q_m} = 0}$$

Bsp. Isoperimetrisches Problem



$L = L(y)$

Fläche $F = \int_{x_1}^{x_2} dx\, y \quad ; y = y(x)$

Nebenbedingung : $\ell = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{g}$

$\Rightarrow \quad \tilde{L} = y + \lambda \sqrt{1+y'^2} = L(y, y')$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{L} - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = \text{const} = h$

Lösung : $x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x - \sqrt{\lambda^2 - h^2}\right)^2 + (y-h)^2 = \lambda^2$

Kreisbogen mit $x_2 = 2\sqrt{\lambda^2 - h^2}$