

# Theoretische Physik I

001

## Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

### Teil I      Theoretische / klassische / analytische Mechanik

Motivation:

- tieferes Verständnis der Newtonschen Mechanik
- verschiedene (mathematische) Grundkonzepte
  - ↳ Anwendung auf unterschiedliche Bereiche
  - z.B. E-Dynamik, QM, ART aus Variationsprinzip

#### 1) Newtonsche Mechanik

Newtonsche Axiome

- 1) Kräftefreien Körper (Masse) bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit

2) Kraft gleich Masse mal Beschleunigung

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

3) Actio = Reactio :  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

2) Newtonsches Weltbild (Weltbild der nicht-relativistischen klassischen Mechanik) :

- Materie : läßt sich durch (unzerstörbare) Massenpunkte eindeutig beschreiben
- Zeit : eindimensionaler Parameter zur Beschreibung von Bahnen / Trajektorien :  
passiv, unbeeinflussbar
- Raum : 3D "Bühne" der Physik  
unveränderlich, Beschreibung mit Koordinaten  
(z.B. kartesisches Koordinatensystem)

↳ Raum + Zeit sind absolut

- Bewegungen sind deterministisch

⇒) Limitierungen:

- Elementarteilchen sind ununterscheidbar
- QM: nicht deterministisch → probabilistisch  
u. a. Unschärferelation
- SRT: Zeit ist abhängig von Relativbewegung
- ART: Raum + Zeit werden durch Materie / Energie  
gekrümmert

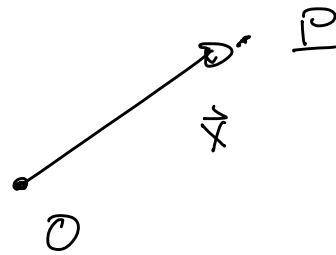
↳ nicht absolut, sondern dynamisch (z.B. GW)  
Inhalt hat Einfluß auf "Bühne"

"Mathematisierung"

Zeit:  $t \in \mathbb{R}$  ; Einheit Sekunde [s]

Raum: Beschreibung mit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{x} = (x, y, z)$   
Dimension  $|\vec{x}|$  ; Einheit Meter [m]

z.B. kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung  
in  $O$



004

Änderung des Bezugssystems: "Beobachterwechsel"

a) Translation:  $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$

b) Rotation:  $\vec{x}' = R \vec{x}$ ;  $R$ : Rotationsmatrix  
(orthogonal:  $R^T R = \mathbb{1}$ )

$\Rightarrow$  Gruppe Koordinatentransformationen:

Euklidische Gruppe

auch allgemein: Koordinatentransformation: Verwendung einer  
anderen "Karte"; z.B. Kugelkoordinaten  $\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \varphi)$   
wobei  $|\vec{x}| = \text{Länge}$  aber  $\theta, \varphi = \text{Winkel}$

# Inertialsystem

Inertiales Koordinatensystem, in dem keine äußeren Kräfte wirken und es gilt

$$\vec{a} = 0$$

Postuliertes Koordinatensystem: beschreibt Klasse von Koordinatensystemen, die durch die Euklidische Gruppe + Geschwindigkeitstransformation ineinander überführt werden kann: Galilei-Gruppe

$$\text{Transformation: } \vec{x}' = \vec{x} - \vec{b} - \vec{v}t ; \vec{b}, \vec{v} = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}' = 0 = \ddot{x}$$

Galileische Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Alle physikalischen Gesetze sind dort gleich. ("Physik" im fahrenden Zug = "Physik" im ruhenden System)

## Newton'sches Determiniertheitsprinzip

für jedes System mit  $N$  Massenpunkten sind die Bahnen vollständig bestimmt (determiniert) wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt alle Orte und Geschwindigkeiten gegeben sind, d. h.  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \dots, \dot{\vec{x}}_N)$  gegeben  
 Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i \quad \Rightarrow \text{Anfangswertproblem}$$

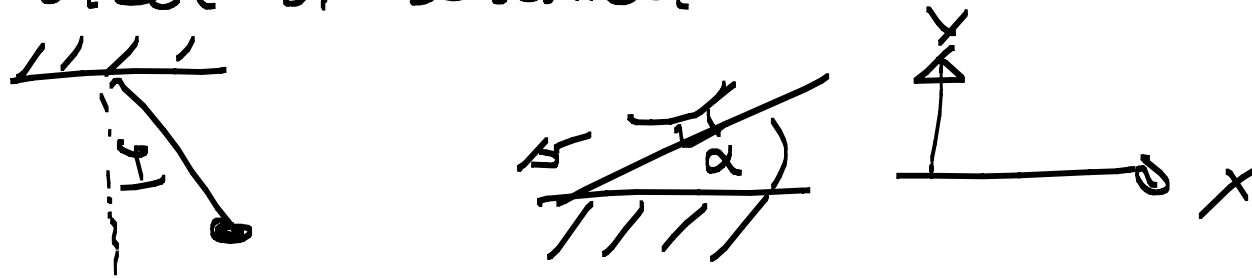
# Lagrange - Mechanik

- Newtonsche Mechanik  
Bahnen/Trajektorien bestimmt durch Bewegungsgl.  
+ Anfangswerte
- Lagrange - Mechanik  
Bahnen bestimmt durch "Randwerte" (auch z.B. kürzeste Strecke)

## Zwangsbedingungen

Systeme oft eingeschränkt (geometrische Bedingungen)

z.B. Pendel o. Schlitten



Zwangskräfte i. A. nicht (im Detail) bekannt  
(z.B. Auftriebskraft o. Fadenspannung)

Formulierung mit

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i(\text{ext.}) + \vec{N}_i \leftarrow \text{Zwangskraft}$$

schwierig

• Koordinaten des Ortsvektors  $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$

nicht unabhängig

z.B. Zahn auf schiefer Ebene:  $y = \tan \alpha \cdot x$

Terminologie / Klassifizierung von Zwangsbedingungen

• holonome Zwangsbedingung

$f(\vec{x}, t) = 0$  d.h. Formulierung mit  
Gleichung möglich

z.B.  $y - \tan \alpha \cdot x = 0$



- nicht-holonome Zwangsbedingungen  
Formulierung mit Gleichung nicht möglich  
Elimination von redundanten Koordinaten nicht möglich  
z. B. Teilchen in Hohlkugel:  $|\dot{\vec{x}}| \leq R$

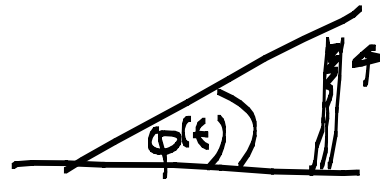
- skleronome ZB  
zeitunabhängige Zwangsbedingungen  
 $f(\vec{x}) = 0$  holonome-skleronome ZB

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

- rheonome ZB :  $f(\vec{x}, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$$

z. B. schiefe Ebene zeitabhängig



## Holonome Zwangsbedingungen

010

# Freiheitsgrade für Systeme ohne zB

$3N$  für  $N$  Teilchen

mit  $p$  holonome zBs: Reduktion der Freiheitsgrade

$$f = 3N - p$$

$\Rightarrow$  Beschreibung mit  $f$  generalisierten Koordinaten

$q_1, q_2, \dots, q_f$  möglich

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$$

$q_i$  unabhängig von einander; d.h.  $f(q_1, q_2, \dots, q_f) = 0$

kann nicht mehr formalisiert  
werden

bilden Konfigurationsraum mit einem  
 $f$ -dimensionalen Konfigurationsvektor  $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

⇒ generalisierte Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$$

mit Anfangswerte bei  $t_0$ :  $q(t_0) = \underline{q}_0$  und  $\dot{q}(t_0) = \underline{\dot{q}}_0$

System mit Bewegungsgleichungen (müssen noch bestimmt werden) bestimmt

Bem.:  $q_i$ 's nicht eindeutig; unterschiedliche generalisierte Koordinaten möglich

$q_i$ 's: nicht notwendigerweise Längen  
(z.B. Winkel)

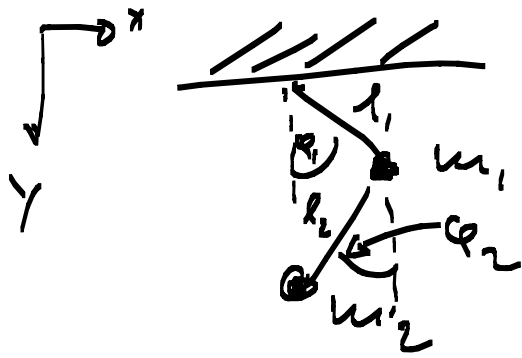
z.B. • Teilchen auf Kugeloberfläche fixiert; Radius  $R$

$$\text{Zwangsbedingung: } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

↳ mögliche generalisierte Koordinaten:

$\theta$ : Polarwinkel;  $\varphi$ : Azimut-Winkel

- Doppelpendel in der Ebene



2-Körper Problem:

ursprünglich 6 Freiheitsgrade  
4 holonome Zwangsbedingungen

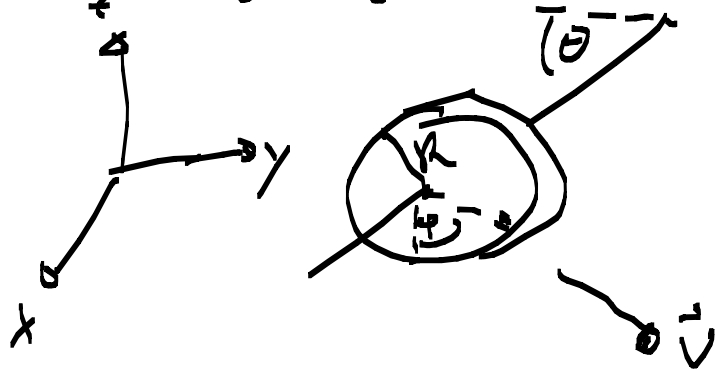
$$z_1 = 0 = z_2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

- Bsp.: nicht-holonome Zwangsbedingung

z rollendes Rad



Beschreibung des Systems  
mit "Auflagepunkt" in der  
(x, y) Ebene und Winkel  
(phi, theta) : 4 Freiheitsgrade  
(ignoriere z = 0)

holonome Zwangsbedingungen möglich?

Wahrheit: Koordinaten sind unabh. von einander

formal: "Rollen":

Geschwindigkeit Achse  $(\dot{x}, \dot{y})$

= Geschwindigkeit Rad

v-Rad:  $v = R\dot{\varphi}$

Richtung:  $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \dot{x} = v \cos\theta = R\dot{\varphi} \cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R \cos(\theta(t))$$

$$\dot{y} = v \sin\theta = R\dot{\varphi} \sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} = R \sin(\theta(t))$$

nicht integrierbar, da  $\theta(t)$  unbekannt (hier:  
keine Bestimmungsgleichung für  $\theta(t)$ )

# d'Alembert Prinzip

Ziel: Aufstellen der Bewegungsgleichungen unter  
 Einbeziehung der Zwangsbedingungen  
 ↳ differentielle Formulierung der Lagrange -  
 Mechanik

Def: virtuelle Verschiebung  $\delta \vec{x}_i$

infinitesimale Änderung der Orte (Koordinaten) eines  
 mechanischen Systems bei festgehaltener Zeit  $t$ ,  
 die mit den Zwangsbedingungen im Einklang stehen  
 (virtuell = willkürlich, d.h. nicht durch physikalische  
 Kräfte verursacht)

festgehaltene Zeit:  $\delta t = 0$

mit  $\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \delta t$$

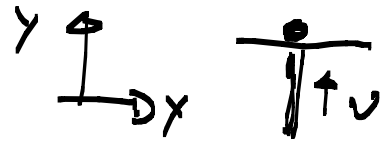
$\delta = 0 \leftarrow$  virtuell

(Verwendung von  $\delta$  genau wie Differential)

Anmerkung: für skleronome Zwangsbedingungen:  
 $\delta \vec{x}$  real ausführbar

für rheonome ZBs nicht real ausführbar

z.B.



Teilchen im Aufzug

$$d\vec{x} = (dx, dy) = (dx, v dt) \quad \text{reale Umrichtung}$$

$$\delta \vec{x} = (\delta x, \delta y) = (\delta x, 0) \quad \text{nicht real durchführbar}$$

Def.: Virtuelle Arbeit

$$\delta W = - \sum_i^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i \quad i = 1, \dots, N \quad \text{Teilchen}$$

$$\text{mit } \vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{z}_i \quad \vec{F}_a : \text{äußere Kraft}$$

$$\vec{z} : \text{Zwangskraft}$$

mit Newtonsche Bewegungsgl.:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{z}_i = m_i \vec{a}_i \quad ; \quad \vec{a}_i = \ddot{\vec{x}}_i$$

$$\text{bzw. } \vec{F}_{a,i} + \vec{z}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i = 0 \quad \text{dynamisches Gleichgewicht}$$

$$\Rightarrow \sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i + \sum_i \vec{z}_i \delta \vec{x}_i = 0$$

d'Alembert'sche Prinzip: die von den Zwangskräften geleistete virtuelle Arbeit ist null; bzw. Zwangskräfte leisten keine virtuelle Arbeit



$$\delta W_z = - \sum_i \vec{z}_i \delta \vec{x}_i = 0$$

Bem.: skleronome Zwangsbedingungen: Zwangskräfte leisten keine reale Arbeit

theonom: ... können reale Arbeit leisten

auch d'Alembert'sche Prinzip

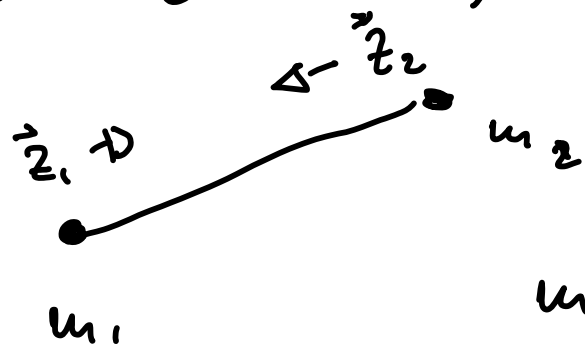
$$\sum_i^N (\vec{F}_{qi} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$$

Vorteil: Formulierung ohne (komplizierte) Zwangskräfte

aber:  $\delta \vec{x}_i$  nicht unabhängig voneinander.

(z.B. holonome Zwangsbedingung:  $f(\vec{x}) = 0$ )

Bsp.:  $\delta W = 0$ ; kräftefreie Hartel



mit Ursprung bei  $m_1$

$$\delta \vec{x}_1 = \delta \vec{s} \quad \text{Verschiebung}$$

$m_2$  kann relativ zu  $m_1$  rotieren

$$\delta \vec{x}_2 = \delta \vec{s} + \delta \vec{R}$$

d'Alembertsches Prinzip:

$$\delta W_2 = 0 = -\vec{z}_1 \delta \vec{s} - \vec{z}_2 (\delta \vec{s} + \delta \vec{R})$$

$$= - \underbrace{(\vec{z}_1 + \vec{z}_2)}_{=0} \delta \vec{s} - \underbrace{\vec{z}_2 \delta \vec{R}}_{\vec{z}_2 \perp \delta \vec{R}}$$

$= 0 \Rightarrow$  keine virtuelle (auch keine reale) Arbeit

Ziel: Bewegungsgleichungen mit generalisierten Koordinaten  
(unabhängige Koordinaten)

019

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) \quad ; \quad \underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f) \\ \text{Konfig. Raum}$$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (\text{Einstein Summenkonvention: } \delta \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j)$$

virtuell:  $\delta t = 0$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \delta t = 0$$

1. Term aus Summe

$$\sum_i \vec{F}_{a,i} \delta \vec{x}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j$$

$$\text{mit } Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$$

generalisierte  
Kraftkomponenten

Bem.:  $[Q_j] \neq$  Kraft i. A.

aber  $[Q_j q_j] =$  Energie

mit konserativen Kräften

$$\vec{F}_{a,i} = - \vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n); \quad V: \text{Potential}$$

$$= - \sum_j (\vec{\nabla}_i q_j) \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = - \sum_i (\vec{\nabla}_i V) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

2. Term:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i &= \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i,j} m_i \left( \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\
&= \sum_{i=1}^n m_i \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right) \right] \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j
\end{aligned}$$

mit  $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$  kinetische Energie des  $N$ -Teilchen Systems

$$\Rightarrow \left[ \sum_{j=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \right]$$

d'Alembertsche Prinzip

mit holonomen Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \right]$$

$q_j$  unabhängig  
von einander

für konservatives System:

$$V = V(\underline{q}) \quad \text{unabhängig von } \underline{\dot{q}} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T-V) \right] \delta q_j = 0$$

Def.:  $\left[ L = T - V \right]$

$$= L(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$$

Lagrange-Funktion

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

holonom + konservativ

$$\Rightarrow \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \right)$$

Lagrange - Gleichung

2. Art

Lagrange - Bewegungsgleichung

Vergleich mit Newton:

- Energie (Skalar) vs. Kraft (Vektor)

- keine Zwangskräfte

- invariant unter beliebiger Koordinatentransformation

- Formulierung in rein differentieller Form

Koordinatentransformation:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{\tilde{x}} ; \quad \vec{x} = \vec{x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

Beschleunigung:  $\ddot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}})$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_j}{dt} \quad (\text{Summenkonvention})$$

$$\ddot{x} = \underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial \tilde{x}_n \partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_n}{dt} \frac{d\tilde{x}_j}{dt}} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d^2 \tilde{x}_j}{dt^2}$$

zusätzlicher Term  $\rightarrow$  Newtonsche Bewegungsgl.  
nicht form invariant

$$\vec{F}_i = \vec{F}_j \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \quad \text{allgem. Transformation eines Vektor}$$

Lagrange Gleichung unter Koordinatentransformation

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{\dot{q}}, t) = L(q, \dot{q}, t)$$

Skalar: Wert bleibt  
unter Koordinaten-  
trafo gleich  
(z.B. Temperatur)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$1) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j}$$



$$\Rightarrow \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u} \right) \frac{\partial \tilde{q}_u}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u} \frac{\partial \dot{q}_u}{\partial q_j}$$

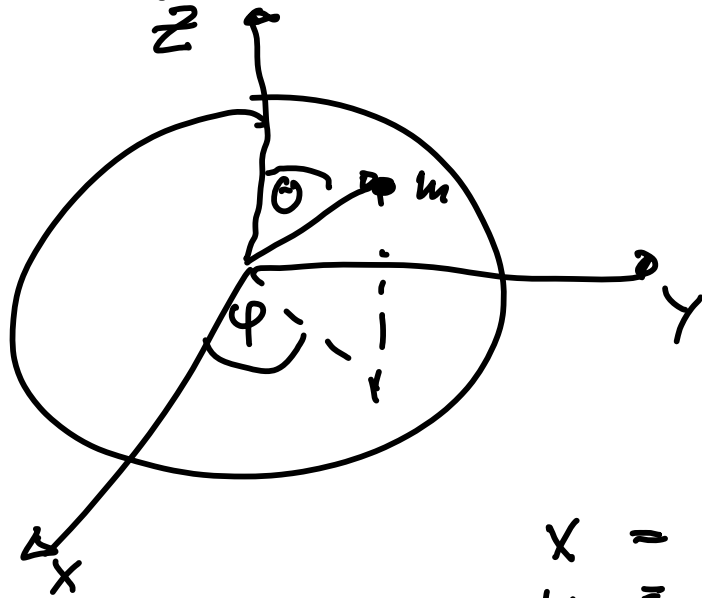
$$2) \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_u} \frac{\partial \tilde{q}_u}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_u} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_u}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 = \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_u} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_u} \right)}_{=0} \frac{\partial \tilde{q}_u}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$  Lagrange-Gleichung forminvariant unter  
Koordinatentransformation.  $\Rightarrow$

## Anwendungen

1) Teilchen auf Kugeloberfläche im Schwerfeld der Erde



Zwangsbedingung: holonom-skleronom  
 $r = |\vec{x}| = R$

generalisierte Koordinaten

$\Theta$ : Polarwinkel :  $q_1$

$\varphi$ : Azimut :  $q_2$

$$\begin{aligned} x &= R \sin \Theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \Theta \sin \varphi \\ z &= R \cos \Theta \end{aligned}$$

Kraft:  $\vec{F}_a = -mg \vec{e}_z = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   $q_1, q_2$

LaStange-Funktion:  $L = T - V = L(\Theta, \varphi)$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\Theta}^2 + \sin^2 \Theta \dot{\varphi}^2)$$

$V$  aus generalisierter Kraft:

$$Q_1 = Q_\theta = \frac{\partial V}{\partial \theta} = -mg(-k \sin \theta) = mgk \sin \theta$$

$$Q_2 = Q_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

konservative Kraft:  $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow V(\theta) = -\int d\theta Q_\theta = -mgk \int d\theta \sin \theta = mgk(1 + \cos \theta)$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} k^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgk(1 + \cos \theta)$$

Lagrange-Gleichungen / Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mk^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + mgk \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \text{ ist } \underline{\text{zyklische}} \text{ Koordinate}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mk^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mk^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

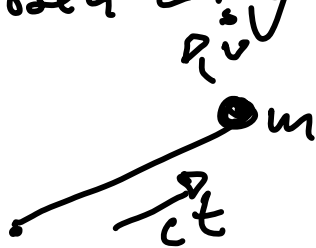
↳ Erhaltungsgröße

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Theta : \ddot{\Theta} - (\cos\Theta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}) \sin\Theta = 0 \\ \varphi : \frac{d}{dt} (\sin^2\Theta \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (\vec{L} = \vec{x} \times \vec{v})$$

Lösung liefert Bahn auf Kugeloberfläche  
(nicht trivial, auf  $\dot{\varphi} = 0$ )

$$\Rightarrow \ddot{\Theta} = \frac{g}{R} \sin\Theta \quad \text{vgl. Pendel} \quad \left. \begin{array}{l} \ddot{\Theta} = -\frac{g}{R} \sin\Theta \\ z = \frac{g}{R} \Theta \end{array} \right)$$

2) Teilchen an masseloser Stange,  
dessen Länge sich linear mit der Zeit ändert  
Bewegung nur in  $x$ - $y$ -Ebene  
 $z = 0$  holonom-skleronom



$$|\vec{x}| = R + ct \quad \text{holonom-rheonom}$$

$c$ : konst. Längenänderung

mit Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos\varphi = (R+ct) \cos\varphi & ; \quad \varphi_1 &= \varphi \\ y(t) &= r(t) \sin\varphi = (R+ct) \sin\varphi \end{aligned}$$

Lagrange-Funktion:  $L = \underline{T} - V$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (c^2 + (R+ct)^2 \dot{\varphi}^2) ; V = 0$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \text{ zyklische Koordinate}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(R+ct)^2 \dot{\varphi} = \text{konst}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 = m(R+ct) ((R+ct) \ddot{\varphi} + 2c \dot{\varphi})$$

Lösung: triviale Lösung  $\dot{\varphi} = 0$

$$\text{aus } \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = h \Rightarrow d\varphi = \frac{h/m}{(R+ct)^2} dt$$

$$\omega \varphi(t) = -\frac{1}{c} \frac{h/m}{(R+ct)}$$

# Verallgemeinerte Potentiale

/ geschwindigkeitsabhängige Potentiale

030

Lagrange-Gleichung für holonome Systeme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

wenn

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

auch für nicht konservative Systeme

mit verallgemeinerte Potential:

$$U = U(q_j, \dot{q}_j)$$

=> Lagrange-Funktion

$$L = T - U$$

=>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

verallgem. Lagrange-Funktion

Bsp.: Teilchen im Elektromagnetischen Feld  
 Kraft:  $\vec{F} = e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right)$  in Gauß-Einheiten

mit Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad ; \quad \vec{j} : \text{Stromdichte}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad \rho : \text{Ladungsdichte}$$

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} ; \vec{A}$  Vektorpotential

In Substitution:  $\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$

Lösung:  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

in Lorentzkraft:  $\vec{F} = e \left( -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right)$

suche  $U(\vec{x}, \vec{v})$  mit  $\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} U - \vec{\nabla} U$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{A}) = (\vec{v} \cdot \vec{\partial}) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad (\vec{v} \cdot \vec{\partial}) \vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{v} \times (\vec{\partial} \times \vec{A}) = \vec{\partial}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = e \left( -\vec{\partial} \left( \phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \right)$$

$$\text{mit } \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{v} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{v})$$

$$= e \left( -\vec{\partial} \left( \phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{v} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right)$$

$\Rightarrow$  verallgemeinertes Potential

$$U(\vec{x}, \vec{v}) = e \left( \phi - \frac{1}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \right)$$

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e \left( \phi - \frac{1}{c} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right)$$

für  
Lorentzkraft



# Systeme mit Reibung

- meist geschwindigkeitsabhängig

- nicht energieerhaltend

↳  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$  nicht möglich

↳ keine Lagrange-Funktion  $L = T - V$

aber 
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

d'Alembertsches Prinzip  
für holonome Zwangs-  
bedingungen

mit 
$$\vec{F} = \vec{F}^{(k)} + \vec{F}^{(r)}$$

$$\vec{F}^{(k)} = -\vec{\nabla}V \text{ konservativer Anteil}$$

$$\vec{F}^{(r)}$$
 : Reibungskraft

↳  $L = T - V$

⇒ 
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(r)}$$

Beispiel: Reibungskraft  $\propto v$ : Stoches'sche Reibung  
 $\hookrightarrow$  Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2} \sum_{e,m} \beta_{em} \dot{q}_e \dot{q}_m ; \beta_{em} \text{ Dissipations-koef. - Tensor}$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right] \text{ modifizierte Lagrange-Gleichung}$$

$$\hookrightarrow Q_j^{(2)} = - \sum_{k=1}^f \beta_{jk} \dot{q}_k$$

Energie dissipation

Gesamtenergie:  $E = T + V = 2T - L$

mit skleronomen Zwangsbedingungen:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{e,m} \mu_{em} \dot{q}_e \dot{q}_m$$

Konservatives System (bis auf Reibung)

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad \left( \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \right)$$

$\dot{q}_j$  \* Lagrange - Gleichung

$$\dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = -2D$$

$$\left( \begin{array}{l} \dot{q}_j \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 2D \\ \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} = 2T \end{array} \right)$$

$$2\dot{T} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

$$\text{mit } \dot{L} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \rightarrow \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{L} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

$$\hookrightarrow 2\dot{T} - \dot{L} = -2D$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{E} = -2D}$$

Energie dissipation  
bei Reibung

# Nicht-holonome Systeme

## Lagrange - Multiplikatoren

- Zwangsbedingungen in der Form  $f(\vec{x}, t) = 0$   
nicht möglich

↳ Angabe von unabhängigen generalisierter Koordinaten  
nicht möglich

aber: Zwangsbedingungen in differentieller Form  
unter Umständen möglich, z.B. "rollende Rad"

⇒ Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

Betrachte System mit  $3N$  Freiheitsgraden  
( $N = \#$  Teilchen)

$\tilde{f}$  : Anzahl Zwangsbedingungen, wobei

$f \leq \tilde{f}$  : z.B. in differentieller Form:

$$\sum_{m=1}^{3N} g_{im}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dx_m + h_i(x_1, \dots, x_{3N}, t) dt = 0$$

$$i = 1, \dots, f$$

verwendete Anzahl holonomer Zwangsbed.  $(\tilde{f} - f)$   
 zur Reduktion der Anzahl der Koordinaten:

$$n = 3N - (\tilde{f} - f)$$

↳ verwende  $n$  generalisierte Koordinaten:  $q_1, \dots, q_n$

$$\Rightarrow \vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

aber  $q_j$  nicht unabhängig voneinander

umschreiben der differentiellen Zwangsbedingungen

$$\sum_{m=1}^n a_{im}(q_1, \dots, q_n, t) dq_m + b_i(q_1, \dots, q_n, t) dt = 0$$

Vergleich mit rein holonomem System

$f = 0$  und es existieren  $\tilde{f}$  Gleichungen

$$g_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad i = 1 \dots \tilde{f}$$

$$\Rightarrow dg_i = 0 = \sum_m \frac{\partial g_i}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial g_i}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow a_{im} = \frac{\partial g_i}{\partial q_m} ; b_i = \frac{\partial g_i}{\partial t}$$

partielle Ableitungen  
die zu ausgedrückten

Lagrange-Gleichung für Systeme mit nicht-holonomer  
Zwangsbedingungen?

(aber in differentieller Form)

- für virtuelle Verschiebungen ( $\delta t = 0$ ) gilt:

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \delta q_m = 0 \quad i = 1, \dots, \tilde{f}$$

- mit Lagrange-Multiplikatoren:

$$\lambda_i \quad ; \quad i = 1, \dots, f$$

unabhängig von  $q$   
aber evtl. abhängig  
von  $t$

- verwendet für generelle Optimierungsprobleme mit Neben- (Zwangs-) Bedingungen
- müssen noch bestimmt werden:

$$\sum_{i=1}^f \lambda_i \sum_m^n a_{im} \delta q_m = 0$$

- für konservative Systeme:

$$\sum_{m=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right) \delta q_m = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$$

wg.  $\tilde{f}$  Zwangsbedingungen:  $n - f$

unabh. generalisierte  
Koordinaten

$q_u : u = 1, \dots, u-f$  unabh.

$q_e : e = u-f+1, \dots, u$  abhängig

mit  $f$  Bestimmungsgleichungen für  $\lambda_i$   
(frei wählbar)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L}{\partial q_u} - \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{iu} = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} u = u-f+1, \dots \\ u \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{u=1}^u (\dots) \delta q_u = \sum_{u=1}^{u-f} (\dots) \delta q_u + \sum_{u=u-f+1}^u (\dots) \delta q_u = 0$$

wg. 1 Summand mit unabh.  $q_u$  und Bestimmungsgleichung für  $\lambda_i$ :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L}{\partial q_u} = \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{iu}} \quad u = 1, \dots, u$$

Lagrange-Gleichung 1. Art



$n$  Gleichungen  $n + f$  Unbekannte :

$n$  Koordinaten  $q_m$

+  $f$  Multiplikatoren  $\lambda_i$

$f$  Bestimmungsgleichungen gegeben durch  
differentialen Zwangsbedingungen:

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \dot{q}_m + b_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, f$$

physikalische Interpretation  
vgl. holonomes System

der  $\lambda_i$ 's :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m$$

$$\Rightarrow Q_m = \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{im} \quad ;$$

Komponenten einer generalisierten  
Kraft : hier gegeben durch  
Zwangskräfte

## Zwangskräfte

für Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

$N$ -Teilchen System

$$f_j(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0 \quad j = 1, \dots, f \quad f: \# \text{ ZB}$$

Verwende keine generalisierte Koordinaten,  
d.h. ZB's nicht zur Reduktion der Freiheitsgrade;  
aber: nur  $3N - f$  unabh. Koordinaten

$$df_j = \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot d\vec{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0: \quad \text{reale Verschiebung}$$

für virtuelle Verschiebung ( $\delta t = 0$ )

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot \delta \vec{x}_i = 0$$

mit  $f$  Lagrange-Multiplikatoren

$$\sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \lambda_j \delta \vec{x}_i = 0$$

mit d'Alembert'sches Prinzip:

$$\sum_{i=1}^2 (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^2 \left( \vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i + \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{D}_i f_j) \right) \delta \vec{x}_i = 0$$

wähle  $\lambda_j$  so da  $\beta (\dots) = 0$

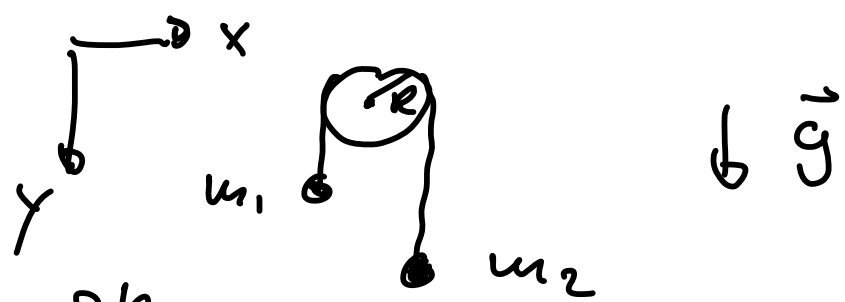
$$\Rightarrow \boxed{m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{D}_i f_j)}$$

vgl. mit Newton  
 $m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{Z}_i = \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{D}_i f_j)} : \text{Zwangskraft}$$

Bestimmung der Zwangskräfte u. U. einfacher mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren

Beispiel: Suche Fadenspannung  
Atwoodsche Fallmaschine



z.B.

$$z_1 = 0 = z_2; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2R$$

$Y_1 + Y_2 + \pi R = \ell$  : wird hier nicht verwendet

↳ Anzahl generalisierter Koordinaten:  $6 - 4 = 2$

$$q_1 = Y_1; \quad q_2 = Y_2$$

$$f(q_1, q_2) = 0 = q_1 + q_2 + \pi R - \ell$$

$$\hookrightarrow \delta f = \delta q_1 + \delta q_2 = 0$$

$$\hookrightarrow a_{11} = 1 = a_{12}$$

ein Lagrange-Multiplikator:  $\lambda$   
aus generalisierter Kraft:  $Q_{im} = \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{im}$

$$Q_1 = \lambda = Q_2 \quad \text{Fadenspannung}$$

$$\text{Lagrange-Funktion: } L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) + g (m_1 q_1 + m_2 q_2)$$

L G6:

$$m_1 \ddot{q}_1 - g m_1 = \lambda$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - g m_2 = \lambda$$

$$+ \text{Zwangsbedingung: } \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0$$

} 3 Gleichungen  
für 3 Unbekannte  
( $q_1, q_2, \lambda$ )

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$\Rightarrow \lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Fadenspannung:  
für  $m_1 \gg m_2$

$$\lambda = -2g m_2$$

für  $m_1 = m_2 \Rightarrow \lambda = -g m$

Beispiel: "rollendes Rad"

System mit nicht-holonomen ZB; aber Darstellung  
in differentieller Form

generalisierte Koordinaten:

$$\begin{array}{cc} x, y & \text{und} & \varphi, \Theta \\ q_1, q_2 & & q_3, q_4 \end{array}$$

Zwangsbedingung Rollen:

$$\dot{x} - R\dot{\varphi}\cos\Theta = 0 \quad ; \quad \dot{y} - R\dot{\varphi}\sin\Theta = 0$$

mit  $\sum_{m=1}^n a_{im}\dot{q}_m = 0$

$n$ : 4 Koordinaten  
 $i = 1, 2$  Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc} a_{11} = 1 & a_{12} = 0 & a_{13} = -R\cos\Theta & a_{14} = 0 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 1 & a_{23} = -R\sin\Theta & a_{24} = 0 \end{array}$$

2 Lagrange-Multiplikatoren:  $\lambda_1, \lambda_2$   
 4 generalisierte Kräfte ( $Q_m = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{im}$ )

$$Q_1 = \lambda_1 \quad Q_2 = \lambda_2 \quad Q_3 = -\lambda_1 R\cos\Theta - \lambda_2 R\sin\Theta; \quad Q_4 = 0$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\Theta}^2$$

$$I_1 = \frac{1}{2} M R^2 \quad \text{Trägheitsmoment: Drehung um Achse}$$

$$I_2 = \frac{1}{4} M (R^2 + \frac{1}{3} d^2) \quad ; \quad d: \text{Scheibendicke}$$

LGK:

$m\ddot{x} = \lambda_1$ ;  $m\ddot{y} = \lambda_2$ ;  $I_1\ddot{\varphi} = -\lambda_1 R \cos\Theta - \lambda_2 R \sin\Theta$ ;  $I_2\ddot{\Theta} = 0$   
 + 2 Zwangsbedingungen: 6 Gleichungen für 6 Unbekannte

1)  $\Theta = \dot{\Theta}_0 t$  ;  $\ddot{\Theta} = \text{konst}$

2)  $\lambda_1 = mR(\ddot{\varphi} \cos(\dot{\Theta}_0 t) - \dot{\varphi} \dot{\Theta}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t))$

3)  $\lambda_2 = mR(\ddot{\varphi} \sin(\dot{\Theta}_0 t) + \dot{\varphi} \dot{\Theta}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t))$

4)  $I_1\ddot{\varphi} = -mR^2\ddot{\varphi} \rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \dot{\varphi}_0 = \text{konst.}$

5)  $\dot{x} = R\dot{\varphi}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow x(t) = R \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0} \sin(\dot{\Theta}_0 t) + x_0$

6)  $\dot{y} = R\dot{\varphi}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow y(t) = -R \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0} \cos(\dot{\Theta}_0 t) + y_0$

Zwangskräfte:

$Q_1 = -mR\dot{\varphi}_0 \dot{\Theta}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t)$ ;  $Q_2 = mR\dot{\varphi}_0 \dot{\Theta}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t)$

haben beide in der "Spur"  
 $Q_3 = 0 = Q_4$

# Hamiltonsche Prinzip / Variationsprinzip

048

bisher: d'Alembert-Prinzip: Differentialprinzip  
↳ Ableitung der Lagrange-Gleichungen  
(Bewegungsgleichungen) durch virtuelle  
Umrichtungen

Hamilton-Prinzip: Integrationsprinzip

Bestimmung der Bewegungsgleichungen durch  
Variation aller möglichen Bahnen + Optimierung  
(Extremwertbestimmung)

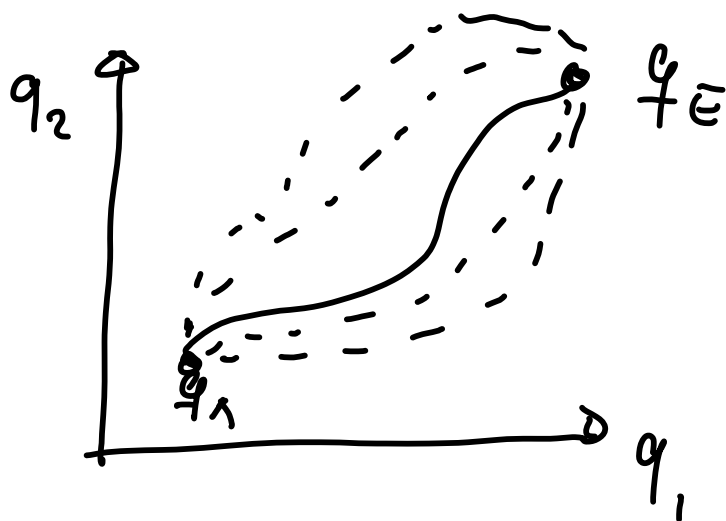
betrachte Bahnen im  $\mathbb{R}^n$

mit  $q = (q_1, \dots, q_n)$  Konfigurationsvektor

Bahnen  $t_A \leq t \leq t_E$ ;  $t \mapsto (q_1(t), \dots, q_n(t))$

mit Randwerten  $q(t_A) = q_A$ ;  $q(t_E) = q_E$





mit der Funktion :  $L = L(q(t); \dot{q}(t), t)$

allgemein :  $q(t)$  beliebige Funktionen  $= L(t)$

$\dot{q}(t)$  "Änderungsrate" von  $q(t)$

und

$$S[L] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t)$$

hier : Wirkung,  
Wirkungsfunktional

Funktional (hier  
Abb von Funktionen in  $\mathbb{R}$ ,  
allgem. : Abb. von  
Funktionen auf Funktionen)

## => Hamiltonsches Prinzip

Die Bewegung eines Systems erfolgt entlang einer Bahnkurve im Konfigurationsraum, die  $S[L]$  stationär macht.

auch: Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\boxed{\delta S = 0} \rightarrow \text{Variationstechnik}$$

$S$ : stationär / extremal

Möglichkeit 1

betrachte Bahnen mit kleiner Variation um  
Extremal-Bahn:

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0(t) + \alpha \underline{s}(t) = \underline{q}(t, \alpha)$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{q}}(t, \alpha) = \dot{\underline{q}}_0(t) + \alpha \dot{\underline{s}}(t)$$

mit Randbedingungen:  $\underline{s}(t_*) = 0 = \underline{s}(t_e)$

$$\rightarrow L = L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha))$$

$$\rightarrow S(\alpha) = \int_{t_A}^{t_E} dt L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha))$$

$$S: \text{stationär} \quad : \quad \delta S = \left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_A}^{t_E} dt \left[ (\underline{\partial}_q L) \cdot \underline{s} + (\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \cdot \underline{\dot{s}} \right]$$

$$\text{p. I} \quad = \int_{t_A}^{t_E} dt \left[ (\underline{\partial}_q L) \underline{s} - \frac{d}{dt} (\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \underline{s} \right] + \underbrace{(\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \cdot \underline{s}}_{=0} \Big|_{t_A}^{t_E}$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \left[ (\underline{\partial}_q L) - \frac{d}{dt} (\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \right] \cdot \underline{s}$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

Randterm

$$\Rightarrow \left[ \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) - \nabla_q L = 0 \right]$$

Euler-Gleichung der Variationsrechnung  
+ Mechanik

↳ Euler-Lagrange-Gleichungen

(ELG oder ELDG)

Möglichkeit 2

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} L dt = \int_{t_A}^{t_E} \delta L dt$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} \left[ (\nabla_q L) \delta q + (\nabla_{\dot{q}} L) \delta \dot{q} \right] dt ; \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$$

$$\stackrel{\text{sp. I}}{=} \int_{t_A}^{t_E} \left[ (\nabla_q L) \delta q - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) \delta q \right] dt + \cancel{(\nabla_{\dot{q}} L) \delta q} \Big|_{t_A}^{t_E}$$

$\leftarrow = 0$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \underbrace{\left[ (\nabla_q L) - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) \right]}_{=0} \delta q$$

= 0      wg. unabhängig von  $\delta q$

$\Rightarrow$  ELG

Vergleich mit d'Alembert Prinzip

d'Alembert Prinzip :  $\sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$

mit  $\ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x} = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{x}} \delta \vec{x}) - \dot{\vec{x}} \delta \dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{x}} \delta \vec{x}) - \frac{1}{2} \delta \dot{\vec{x}}^2$

Integration

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i \left( \underbrace{\vec{F}_{a,i} \cdot \delta \vec{x}_i}_{(1)} - \underbrace{\frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x})}_{(2)} + \underbrace{\frac{m_i}{2} \delta \dot{\vec{x}}_i^2}_{(3)} \right)$$

$$\textcircled{1} \quad \sum_i \vec{F}_{e_i} \delta \vec{x}_i = \sum_j Q_j \delta q_j = - \sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j = - \delta U$$

für konservativ  
e System

$$\textcircled{2} \quad \int_{t_A}^{t_E} dt \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i \Big|_{t_A}^{t_E}$$

= 0

Start- und Endpunkte  
werden nicht variiert

$$\textcircled{3} \quad \sum_i \frac{m_i}{2} \delta \dot{x}_i^2 = \delta T \quad T: \text{kinetische Energie}$$

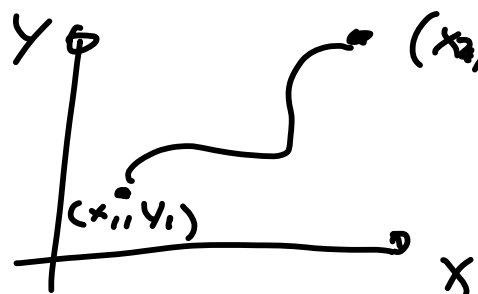
$$\Rightarrow 0 = \int_{t_A}^{t_E} dt (\delta T - \delta U) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt (T - U) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt L$$

$\Rightarrow L$  : Lagrange-Funktion

$\Rightarrow$  d'Alembert'sches Prinzip ist äquivalent zu  
Hamilton'schen Prinzip

# Variationsrechnung Beispiele

1) Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene



Kurve:  $y = y(x)$  gesucht  
mit Parameter  $x$

infinitesimales Wegsegment:  $ds$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\text{Wegstrecke: } \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\Rightarrow L = L(y, y') \stackrel{\text{hier}}{=} L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\Rightarrow \text{Euler-Lagrange-Gleichungen: } \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} y' \right)$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } y' = \text{const.} \Rightarrow y(x) = ax + b$$

Gerade

2) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf  
Kugeloberfläche

Koordinaten:  $\Theta, \varphi$  ;  $R = \text{const.}$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= R^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2)$$

und  $t$ : beliebiger Parameter; z.B. Zeit :  $\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt}$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt R (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)^{1/2}$$

$$\delta S = 0 = \int dt \frac{1}{2} R (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)^{-1/2} \delta (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)$$

( $\rightarrow$  Geodätengleichung)

betrachte  $\tilde{L} = \dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2 = L(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\varphi})$

$$\Rightarrow \text{EGL: } \left. \begin{array}{l} \Theta: \ddot{\Theta} = \sin\Theta \cos\Theta \dot{\varphi}^2 \\ \varphi: \ddot{\varphi} = -2 \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta} \dot{\Theta} \dot{\varphi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } \Theta = \pi/2 \\ \omega \ddot{\varphi} = 0 \\ \omega \dot{\varphi} = \text{const.} \end{array}$$



Bemerkung: unterschiedliche Lagrange-Funktionen

z.B. Kugeloberfläche:

$$ds = R d\theta \sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'} \quad ; \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta}$$

$\Rightarrow L(\varphi', \theta)$  hier:  $\theta$  (Integrations)parameter  $\stackrel{!}{=} \text{"Zeit"}$

$$ds = R d\varphi \sqrt{\theta' + \sin^2 \theta}$$

$\Rightarrow L(\theta, \theta')$  : ohne "Zeit"

Geodätengleichung (= extreme Bahnen in beliebiger Geometrie)

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j = g_{ij} dx_i dx_j \quad (\text{Summenkonvention})$$

$x_i$  : beliebige Koordinaten

$g_{ij}$  : Metrik, metrischer Tensor  
als Matrix darstellbar

z.B.  $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$  ;  $\underline{x} = (r, \theta, \varphi)$

$$\Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j} \quad ; \quad t : \text{beliebiger Parameter}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} (g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j)^{-1/2} \delta (g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} ( \quad )^{-1/2} \left[ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_u} \delta x_u \dot{x}_i \dot{x}_j + \underbrace{g_{ij} \delta (\dot{x}_i \dot{x}_j)}_{\frac{\partial \dot{x}_i \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_u} \delta \dot{x}_u} \right]$$

$\frac{\partial \dot{x}_i \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_u} \delta \dot{x}_u$   
 $\uparrow$   
 $\frac{d}{dt} \delta x_u$

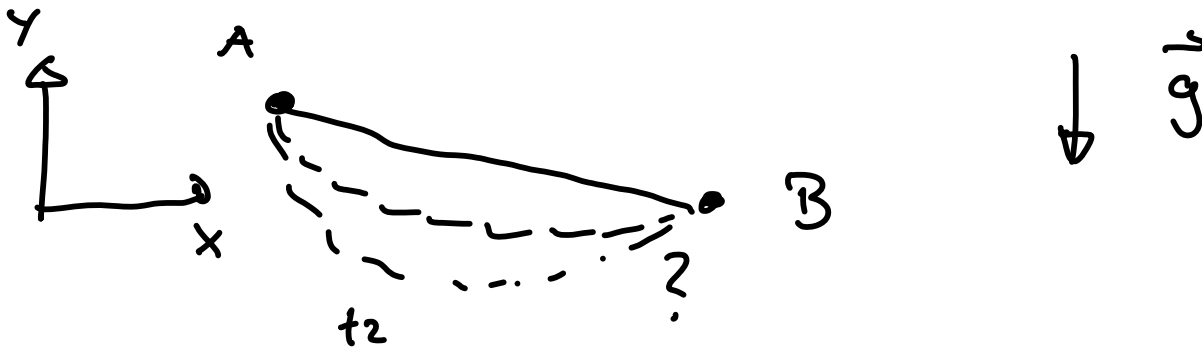
part. Integration

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} ( \dots )^{-1/2} \left[ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_u} \dot{x}_i \dot{x}_j - 2 \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{x}_j) \right] \delta x_u$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{x}_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_u} \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 \right] \text{ Geodäten-Gleichung}$$

Bewegungsgleichung für Teilchen aber auch Licht  
in gegebener Geometrie (z.B. Planetenbahnen,  
Lichtbrechung)

Brachistochronenproblem  
(gr. brachyistos = kürzeste, chronos = Zeit)  
schnellster Weg im Schwerfeld der Erde



$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \quad \rightarrow \quad \text{extremal: } \delta S = 0$$

aus Energieerhaltung

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgy = mgh$$

$$A: (0, h); \quad B: (x_B, 0)$$

$$\Rightarrow v(y) = \sqrt{2g(h-y)}$$

$$\text{mit } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$S = \int_0^{x_B} dx \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} \Rightarrow \text{Lagrange-Funktion:}$$

$$L(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

$$\text{ELG: } \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(h-y)}(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g(h-y)}(1+y'^2)^{3/2}} \left[ \frac{1}{2} \frac{y'^2}{2g(h-y)} + \frac{y''}{1+y'^2} \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(h-y)}} \cdot \frac{1}{h-y}$$

$$\Rightarrow \boxed{2(h-y)y'' = 1+y'^2} \quad \text{Euler DGL}$$

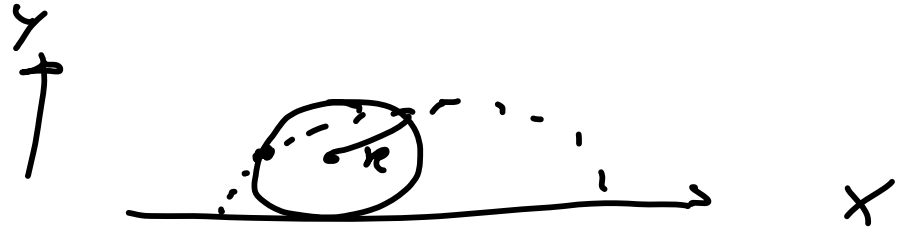
$$\text{Lösung: } \frac{d}{dx} \left( (h-y)(1+y'^2) \right) = 0$$

$$\Rightarrow (h-y)(1+y'^2) = a = \text{const.}$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{a-(h-y)}{h-y} = \frac{a-\tilde{y}}{\tilde{y}} \quad ; \quad \tilde{y} = h-y$$

Lösung: Teil einer Zykloidenbahn:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2R-y}{y}$$



$$x = R(\varphi + \sin\varphi)$$

$$y = R(1 + \cos\varphi)$$

Bemerkung: wenn  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$   $t =$  Parameter zur Beschreibung des Problems (s.o.  $t = x$ )

$$\Rightarrow \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{const} \right]$$

Bsp. kürzeste Strecke in der Ebene:

$$ds = dx \sqrt{1+y'^2} \rightarrow L(y') \text{ bzw. } \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\text{aus } y' \frac{\partial L}{\partial y'} = L = \text{const} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\text{Lösung } \Rightarrow y(x) = ax + b$$

# Variationsrechnung mit Nebenbedingung

Hamiltonsche Prinzip  $\Leftrightarrow$  Lagrange-GL. 1. Art

betrachte System mit  $f$  nicht-holonomen Zwangsbedingungen die sich in differentieller Form darstellen lassen:

$$\sum_{m=1}^n a_{im}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_m + b_i = 0 \quad i=1, \dots, f$$

mit Hamiltonschen Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m = 0$$

$q_m$ 's nicht unabh. voneinander  $\rightarrow (\dots) \neq 0$

mit HP: Endpunkte bleiben unverändert:  $\delta t = 0$

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \delta q_m = 0$$

mit Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_i$ :  $\int dt \sum a_{im} \lambda_i = 0$

$$\Rightarrow \int_{t_A}^{t_B} \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^f a_{im} \lambda_i \right) \delta q_m = 0$$

wähle  $\lambda_i$  so daß  $(\dots) = 0$

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^f a_{im} \lambda_i \right) \quad \text{Lagrange-Gl. 1. Art}$$

$n$  Gleichungen ( $q_m$ ) für  $n+f$  Unbekannte  
 +  $f$  Gleichungen aus Zwangsbedingungen

betrachte Systeme mit Nebenbedingungen bzw.  
 holonome Zwangsbedingungen

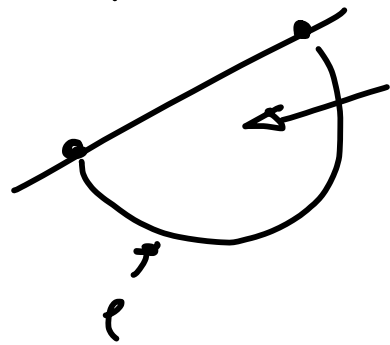
$$g_i(\underline{q}, t) = 0 \Rightarrow dg_i = 0 \Rightarrow a_{im} = \frac{\partial g_i}{\partial q_m}$$

$\Rightarrow$  modifizierte Grundfunktion bzw. mod. Lagrange-Funktion

$$\tilde{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + \sum_{i=1}^f \lambda_i g_i(\underline{q}, t)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_m} = 0 \right)$$

Bsp. Isoperimetrisches Problem



max. Fläche?

Fläche

$$F = \int_{x_1}^{x_2} dx y \quad ; \quad y = y(x)$$

$$L = L(y)$$

Nebenbedingung:  $l = \int_{p_1}^{p_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_g$

$$\Rightarrow \tilde{L} = y + \lambda \sqrt{1+y'^2} = L(y, y')$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{L} - y' \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'} = \text{const} = h$$

Lösung:  $x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - \sqrt{\lambda^2 - h^2})^2 + (y - h)^2 = \lambda^2$

Kreisbogen mit  $x_2 = 2\sqrt{\lambda^2 - h^2}$



• Variationsrechnung mit Nebenbedingung

allgemein:  $t \in \mathbb{R}$

$$Q = \int_{t_k}^{t_E} G(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) dt = \text{const.}$$

(z.B. Isoperimetrische Probleme, "gleicher Umfang")

mit modifizierter Grundfunktion / modifizierte Lagrange-Funktion

$$\tilde{L} = L + \sum_{i=1}^f \lambda_i G_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \quad ; f: \text{Anzahl der Nebenbed.}$$

⇒ Lösung des Problem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \underline{\dot{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \underline{q}} = 0$$

Euler-Gleichung mit modifizierter Grundfunktion

$n$  - Gleichungen ( $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ) für  $n+f$  Unbekannte ( $\lambda_i : i = 1 \dots f$ ) + Nebenbedingungen

# Erhaltungssätze / Noether Theorem

allgemein mechanische Systeme

Änderung von  $\underline{q}$  und  $\underline{\dot{q}}$

mit  $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ;  $\underline{\dot{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ ;  $2n$  Größen

## Integral der Bewegung / Bewegungsintegral

$$I_n = \bar{I}_n(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = C_n = \text{konstant}$$

entlang Trajektorie, die durch ELG (Newtonschen Bewegungsgleichungen) bestimmt ist.

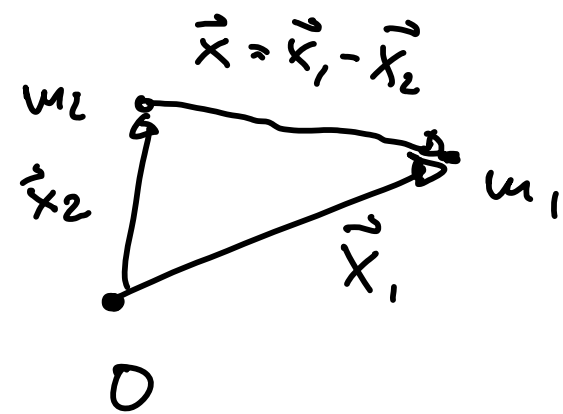
Bsp.: zyklische Koordinate  $\rightarrow \bar{I}_n$

$$\text{zyklische Koordinate: } \frac{\partial L}{\partial q_n} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{I}_n; \bar{I}_n = \text{const.}$$

abhängig von der Wahl des Koordinatensystems  
 $\hookrightarrow$  wähle Koordinatensystem, so daß  $\bar{I}_n$ 's einfach gefunden werden können

anschaulich: Kepler-Problem / 2-Körper-Problem



Potential nur von Abstand abhängig:  $V = V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$

mit Gesamtmasse:  $M = m_1 + m_2$

reduzierte Masse:  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Schwerpunkt:  $\vec{k} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2) = (X, Y, Z)$

relative Koordinate:  $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = r \begin{pmatrix} \sin\Theta \cos\varphi \\ \sin\Theta \sin\varphi \\ \cos\Theta \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3)$

$(r, \Theta, \varphi) = (q_4, q_5, q_6)$

$$\Rightarrow L = \frac{M}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{\mu}{2} (\dot{q}_4^2 + q_4^2 (\dot{q}_5^2 + \sin^2 q_5 \dot{q}_6^2)) - V(q_4)$$

zyklische Koordinaten:  $q_1, q_2, q_3, q_6$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = M \dot{q}_1 = M \dot{x} = \text{const} = \bar{I}_1$$

$$p_2 = M \dot{q}_2 = M \dot{y}; \quad p_3 = M \dot{q}_3 = M \dot{z}$$

$\rightarrow$  Impulserhaltung des Schwerpunkts

$$p_6 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_6} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = I_c \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung}$$

$p_i$ 's : generalisierte Impulse

vgl.: in kartesischen Koordinaten

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

$\Rightarrow$  keine zyklische Koordinate

### Noether Theorem

Frage nach "Symmetrien" eines Systems und

Zusammenhang mit Erhaltungssätzen

betrachte zyklische Koordinate:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_u} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_u} = 0 \Rightarrow p_u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_u} = \text{const.}$$

Interpretation : zyklische Koordinate

$L(q, \dot{q}, t)$  ist invariant unter Koordinatentransformation

$$q_k \rightarrow Q_k(\lambda) = q_k + \lambda$$

Translation  $\rightarrow$  Symmetrie (entlang Richtung  $q_k$ )

$$\text{und } Q_j(\lambda) = q_j \text{ für } j \neq k$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{Q}} = \underline{\dot{q}}$$

$$\Rightarrow L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) \Leftrightarrow \frac{\partial L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t)}{\partial \lambda} = 0$$

Verallgemeinerung : beliebige Koordinatentransformation

$$Q_i(\lambda) = Q_i(q, t) ; \lambda \in \mathbb{R} ; \text{ d.h. einparametrische Schar von Koordinatentransfo}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_i(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \quad i = 1 \dots n$$

$$\text{mit } Q_i(0) = q_i ; \dot{Q}_i(0) = \dot{q}_i \quad \text{für } \lambda = 0 \text{ sind } Q_i \text{ und } q_i \text{ identisch}$$

Def.: Transformation ist Symmetrie - Transformation

von  $L = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$  falls

$$\left. \frac{\partial L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0$$

d.h.  $L$  ist invariant unter einparametrischen Koordinatentransformation

Bsp.: 1) zylindrische Koordinate

2) Drehung in Ebene

$$X(\lambda) = x \cos \lambda + y \sin \lambda \quad \rightarrow \quad \dot{X} = -x \sin \lambda + y \cos \lambda$$

$$Y(\lambda) = y \cos \lambda - x \sin \lambda \quad \dot{Y} = -y \sin \lambda - x \cos \lambda$$

mit  $L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r) \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2$

$$= \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - V(\rho) \quad ; \quad \rho^2 = X^2 + Y^2$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial L(X, \dot{X}, Y, \dot{Y})}{\partial \lambda} = 0$$

hier: keine Abhängigkeit von  $\lambda$

# Noether Theorem

071

sei  $L$  invariant unter Symmetrietransformationen  
dann ist  $I$  Konstante der Bewegung

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\lambda=0}$$

Beweis:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

(gilt für einparametrische Symmetrietransf.)

mit ELG:  $\partial L / \partial q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{dt} I \Rightarrow I \text{ konstante der Bewegung}$$

Bsp. 1) zylindrische Koordinate

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} = \begin{cases} 0 & i \neq h \\ 1 & i = h \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \sum_i \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = p_h = \text{const.}$$

2) Drehung

$$\left. \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = Y \quad ; \quad \left. \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = -X$$

$$I = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = y m \dot{x} - x m \dot{y}$$

$$= -m (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})_z = -L_z$$

z-komponente  
Drehimpuls