Theoretische Physik I

Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Teil I Theoretische/klassische/analytische Mechanik

Motivation:

- tieferes Verständnis der Newtonschen Mechanik
- verschiedene (mathematische) Grundkonzepte
  ↳ Anwendung auf unterschiedliche Bereiche
    z.B. E-Dynamik, QM, ART aus Variationsprinzip

1) Newtonsche Mechanik

Newtonsche Axiome

1) Kräftefreier Körper (Masse) bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit

2) Kraft gleich Masse mal Beschleunigung

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \ddot{\vec{x}}$$

3) Actio = Reactio : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

⇒ Newtonsches Weltbild (Weltbild der nicht-relativistischen klassischen Mechanik):

- Materie: läßt sich durch (unzerstörbare) Massenpunkte eindeutig beschreiben

- Zeit: eindimensionaler Parameter zur Beschreibung von Bahnen / Trajektorien: passiv, unbeeinflußbar
- Raum: 3D "Bühne" der Physik unveränderlich, Beschreibung mit Koordinaten (z.B. kartesisches Koordinatensystem)

↳ Raum + Zeit sind absolut

- Bewegungen sind deterministisch

⇒ Limitierungen:

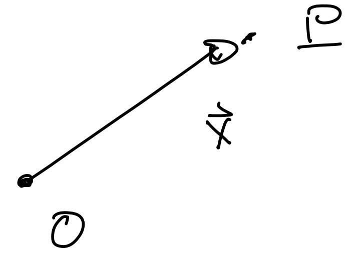
- Elementarteilchen sind ununterscheidbar
- QM: nicht deterministisch → probabilistisch
  u.a. Unschärferelation
- SRT: Zeit ist abhängig von Relativbewegung
- ART: Raum + Zeit werden durch Materie / Energie gekrümmt
  ↳ nicht absolut, sondern dynamisch (z.B. GW)
  Inhalt hat Einfluß auf "Bühne"

"Mathematisierung"

Zeit: $t \in \mathbb{R}$; Einheit Sekunde [s]

Raum: Beschreibung mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x, y, z)$
Dimension $|\vec{x}|$; Einheit Meter [m]

z.B. kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung in O



Änderung des Bezugssystems: "Beobachterwechsel"

a) Translation: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$

b) Rotation: $\vec{x}' = R\vec{x}$; R: Rotationsmatrix
(orthogonal: $R^T R = \mathbb{1}$)

⇒ Gruppe Koordinatentransformationen:

Euklidische Gruppe

auch allgemein: Koordinatentransformation: Verwendung einer anderen "Karte"; z.B. Kugelkoordinaten $\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \varphi)$ mit $|\vec{x}|$ = Länge aber θ, φ = Winkel

Inertialsystem

kartesisches Koordinatensystem, in dem keine äußeren Kräfte wirken und es gilt

$$\vec{a} = 0$$

Postuliertes Koordinatensystem: beschreibt Klasse von Koordinatensystemen, die durch die Euklidsche Gruppe + Geschwindigkeitstransformation ineinander überführt werden kann: Galilei-Gruppe

Transformation : $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{b} - \vec{v}t$; $\vec{b}, \vec{v}$ = konst.

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}}' = 0 = \ddot{\vec{x}}$$

Galileische Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Alle physikalischen Gesetze sind dort gleich. („Physik“ im fahrenden Zug = „Physik“ im ruhenden System)

Newtonsches Determiniertheitsprinzip

für jedes System mit N Massenpunkten sind die Bahnen vollständig bestimmt (determiniert) wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt alle Orte und Geschwindigkeiten gegeben sind, d.h. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \ldots \dot{\vec{x}}_N)$ gegeben

Newtonsche Bewegungsgleichung

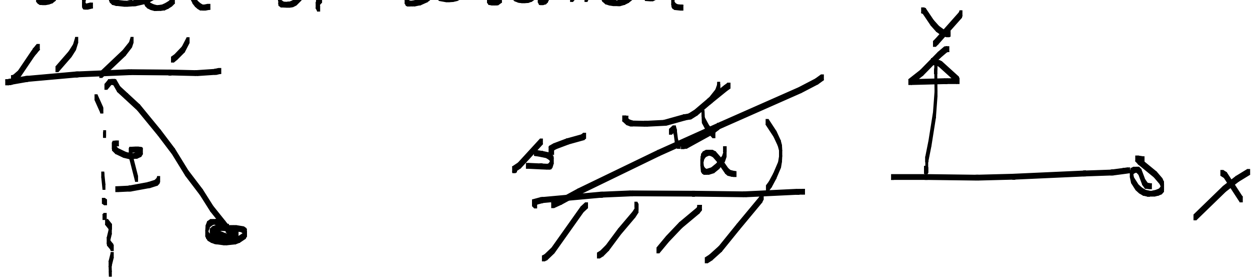
$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i \qquad \Rightarrow \text{Anfangswertproblem}$$

Lagrange-Mechanik

- Newtonsche Mechanik
  Bahnen/Trajektorien bestimmt durch Bewegungsgl.
  + Anfangswerte
- Lagrange-Mechanik
  Bahnen bestimmt durch "Randwerte" (auch z.B. kürzeste Strecke)

Zwangsbedingungen

Systeme oft eingeschränkt (geometrische Bedingungen)
z.B. Pendel o. Schlitten



Zwangskräfte i. A. nicht (im Detail) bekannt
(z.B. Auflagekraft o. Fadenspannung)

Formulierung mit

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i^{(ext.)} + \vec{Z}_i \leftarrow \text{Zwangskraft}$$

schwierig

- Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$
  nicht unabhängig
  z.B. Bahn auf schiefer Ebene : $y = tg\alpha\ x$

Terminologie / Klassifizierung von Zwangsbedingungen

- holonome Zwangsbedingung

$$f(\vec{x}, t) = 0$$

d.h. Formulierung mit Gleichung möglich

z.B. $y - tg\alpha\ x = 0$

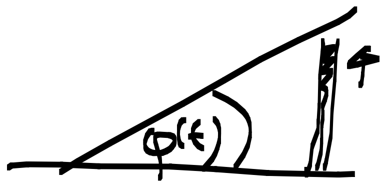
- nicht-holonome Zwangsbedingungen
  Formulierung mit Gleichung nicht möglich
  Elimination von redundanten Koordinaten nicht möglich
  z.B. Teilchen in Hohlkugel : $|\vec{x}| \leq R$

- skleronome ZB
  zeitunabhängige Zwangsbedingungen
  $f(\vec{x}) = 0$ holonome-skleronome ZB

  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

- rheonome ZB : $f(\vec{x}, t)$

  $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ z.B. schiefe Ebene zeitabhängig



Holonome Zwangsbedingungen

Freiheitsgrade für Systeme ohne ZB

$3N$ für N Teilchen

mit p holonome ZBs : Reduktion der Freiheitsgrade

$$f = 3N - p$$

$\Rightarrow$ Beschreibung mit f generalisierten Koordinaten

$q_1, q_2, \ldots, q_f$ möglich

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_f, t)$$

q_i unabhängig voneinander; d.h. $f(q_1, q_2, \ldots q_f) = 0$

kann nicht mehr formuliert werden

bilden Konfigurationsraum mit einem
f-dimensionalen Konfigurationsvektor $\underline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_f)$

⇒ generalisierte Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_f$$

mit Anfangswerte bei t_0 : $\underline{q}(t_0) = \underline{q}_0$ und $\underline{\dot{q}}(t_0) = \underline{\dot{q}}_0$

System mit Bewegungsgleichungen (müssen noch bestimmt werden) bestimmt

Bem.: q_i's nicht eindeutig ; unterschiedliche generalisierte Koordinaten möglich

q_i's : nicht notwendigerweise Längen (z.B. Winkel)

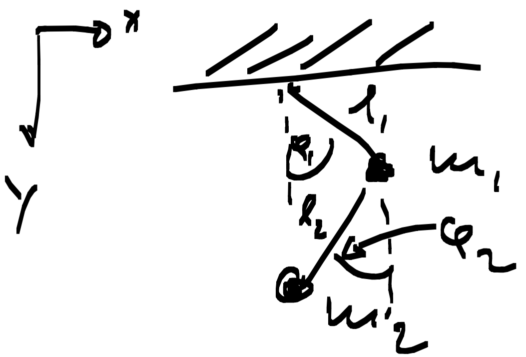
z.B. • Teilchen auf Kugeloberfläche fixiert; Radius R

Zwangsbedingung : $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

↪ mögliche generalisierte Koordinaten :

Θ : Polarwinkel ; φ : Azimut-Winkel

- Doppelpendel in der Ebene



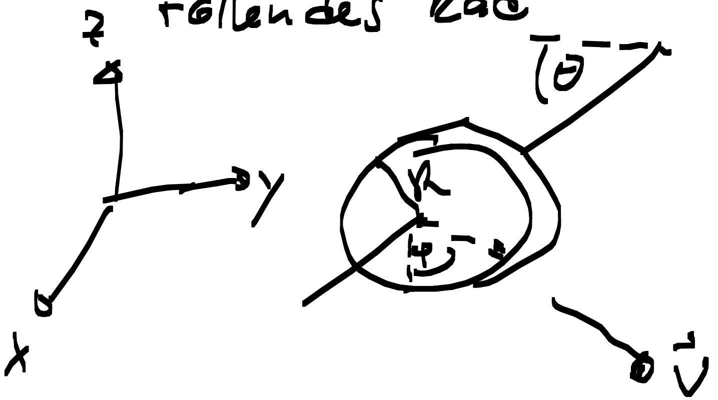
2-Körper Problem:
ursprünglich 6 Freiheitsgrade
4 holonome Zwangsbedingungen

$$z_1 = 0 = z_2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

- Bsp.: nicht-holonome Zwangsbedingung
  rollendes Rad



Beschreibung des Systems mit "Auflagepunkt" in der (x, y) Ebene und Winkel (φ, θ): 4 Freiheitsgrade (ignoriere $z = 0$)

holonome Zwangsbedingungen möglich?

↳ nein: Koordinaten sind unab. von einander

formal: "Rollen":

Geschwindigkeit Achse $(\dot{x}, \dot{y})$

= Geschwindigkeit Rad

v-Rad: $v = R\dot{\varphi}$

Richtung: $\begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = v\cos\Theta = R\dot{\varphi}\cos\Theta \Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R\cos(\Theta(t))$$

$$\dot{y} = v\sin\Theta = R\dot{\varphi}\sin\Theta \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} = R\sin(\Theta(t))$$

nicht integrabel, da $\Theta(t)$ unbekannt (hier: keine Bestimmungsgleichung für $\Theta(t)$)

d'Alembert Prinzip

Ziel: Aufstellen der Bewegungsgleichungen unter Einbeziehung der Zwangsbedingungen
↳ differentielle Formulierung der Lagrange-mechanik

Def.: virtuelle Verrückung $\delta \vec{x}_i$

infinitesimale Änderung der Orte (Koordinaten) eines mechanischen Systems bei festgehaltener Zeit t, die mit den Zwangsbedingungen im Einklang stehen
(virtuell = willkürlich, d.h. nicht durch physikalische Kräfte verursacht)

festgehaltene Zeit: $\delta t = 0$

mit $\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j + \underbrace{\cancel{\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}\,\delta t}}_{=0}$$

$= 0$ ← virtuell

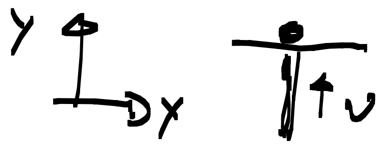
(Verwendung von δ genau wie Differential)

Anmerkung: für skleronome Zwangsbedingungen:

$\delta \vec{x}$ real ausführbar

für rheonome ZBs nicht real ausführbar

z.B.



Teilchen im Aufzug

$$d\vec{x} = (dx, dy) = (dx, v\,dt)$$ reale Verrückung

$$\delta \vec{x} = (\delta x, \delta y) = (\delta x, 0)$$ nicht real durchführbar

Def.: <u>Virtuelle Arbeit</u>

$$\delta W = -\sum_i^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x} \qquad i = 1, \dots, N \text{ Teilchen}$$

mit $\vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i$ $\qquad \vec{F}_a$: äußere Kraft

$\vec{Z}$: Zwangskraft

mit Newtonsche Bewegungsgl.:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i = m_i \vec{a}_i \quad ; \quad \vec{a}_i = \ddot{\vec{x}}_i$$

bzw. $\vec{F}_{ai} + \vec{Z}_i - m_i \ddot{\vec{x}} = 0$ $\qquad$ dynamisches Gleichgewicht

$$\Rightarrow \sum_i \left(\vec{F}_{ai} - m_i \ddot{\vec{x}}_i \right) \delta \vec{x}_i + \sum_i \vec{Z}_i \, \delta \vec{x}_i = 0$$

<u>d'Alembertsche Prinzip</u>: die von den Zwangskräften geleistete virtuelle Arbeit ist <u>null</u>; bzw. Zwangskräfte leisten <u>keine</u> virtuelle Arbeit

$$\boxed{\delta W_Z = -\sum_i \vec{Z}_i \,\delta \vec{x}_i = 0}$$

Bem.: skleronome Zwangsbedingungen: Zwangskräfte leisten keine reale Arbeit

theonom: ... können reale Arbeit leisten

auch d'Alembertsche Prinzip

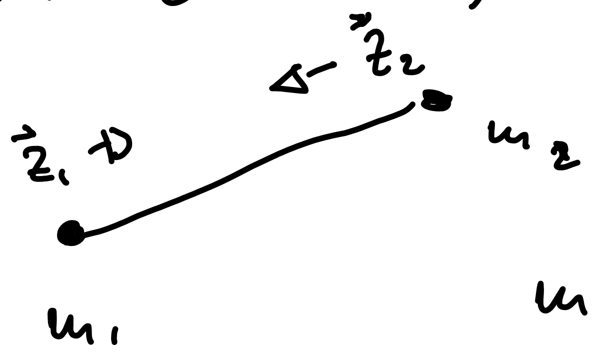
$$\boxed{\sum_i^N \left(\vec{F}_{a_i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i\right) \delta \vec{x}_i = 0}$$

Vorteil: Formulierung ohne (komplizierte) Zwangskräfte

aber: $\delta \vec{x}_i$ nicht unabhängig voneinander.

(z.B. holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{x}) = 0$)

Bsp.: $\delta W = 0$; kräftefreie Hantel



mit Ursprung bei m_1

$\delta \vec{x}_1 = \delta \vec{s}$ Verschiebung

m_2 kann relativ zu m_1 rotieren

$\delta \vec{x}_2 = \delta \vec{s} + \delta \vec{R}$

d'Alembertsche Prinzip:

$$\delta W_Z = 0 = -\vec{Z}_1 \delta \vec{s} - \vec{Z}_2 (\delta \vec{s} + \delta \vec{R})$$

$$= -\underbrace{(\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2)}_{=0} \delta \vec{s} - \underbrace{\vec{Z}_2 \delta \vec{R}}_{\vec{Z}_2 \perp \delta \vec{R}}$$

$= 0 \Rightarrow$ keine virtuelle (auch keine reale) Arbeit

Ziel: Bewegungsgleichungen mit generalisierten Koordinaten (unabhängige Koordinaten)

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \ldots, q_f, t) \quad ; \quad \underline{q} = (q_1, q_2, \ldots q_f)$$

Konfig.raum

$$\delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

(Einstein Summenkonvention: $\delta \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$)

virtuell: $\delta t = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \delta t = 0$$

1. Term aus Summe

$$\sum_i \vec{F}_{a,i} \delta \vec{x}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{f} Q_j \delta q_j$$

mit $Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$ generalisierte Kraftkomponenten

Bem.: $[Q_j] \neq$ Kraft i. A.

aber $[Q_j q_j] =$ Energie

mit <u>konservativen</u> Kräften

$$\vec{F}_{a,i} = -\vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N) \; ; \quad V: \text{Potential}$$

$$= -\sum_j (\vec{\nabla}_i q_j) \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = -\sum_i (\vec{\nabla}_i V) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

2. Term:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \, \delta \vec{x}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} m_i \left(\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} m_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 \right) \right] \delta q_j$$

$$= \sum_{j}^{f} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

mit $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^2$ kinetische Energie des N-Teilchen Systems

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0}$$

d'Alembertsche Prinzip

mit holonomen Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

q_j unabhängig voneinander

für konservatives System:

$V = V(\underline{q})$ unabhängig von $\underline{\dot q} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot q_j} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_j}(T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V)\right]\delta q_j = 0$$

Def.: $\boxed{L = T - V}$

$= L(\underline{q}, \underline{\dot q})$ Lagrange-Funktion

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0$$

holonom + konservativ

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Lagrange-Gleichung 2. Art

Lagrange-Bewegungsgleichung

Vergleich mit Newton:

- Energie (Skalar) vs. Kraft (Vektor)
- keine Zwangskräfte
- invariant unter beliebigen Koordinatentransformation
- Formulierung in rein differentieller Form

Koordinatentransformation:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{\tilde{x}} \quad ; \quad \vec{x} = \vec{x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

Beschleunigung: $\ddot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}})$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j}\frac{d\tilde{x}_j}{dt} \quad \text{(Summenkonvention)}$$

$$\ddot{x} = \underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_k}{dt} \frac{d\tilde{x}_j}{dt}}_{\text{zusätzlicher Term}} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d^2 \tilde{x}_j}{dt^2}$$

zusätzlicher Term → Newtonsche Bewegungsgl. nicht forminvariant

$$F_i = \tilde{F}_j \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i}$$ allgem. Transformation eines Vektors

Lagrange Gleichung unter Koordinatentransformation

$$\tilde{L}(\underline{\tilde{q}}, \underline{\dot{\tilde{q}}}, t) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$$

Skalar: Wert bleibt unter Koordinaten-trafo gleich (z.B. Temperatur)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

1) $$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j}$$

mit $$\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\right) \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\right)\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial q_j}$$

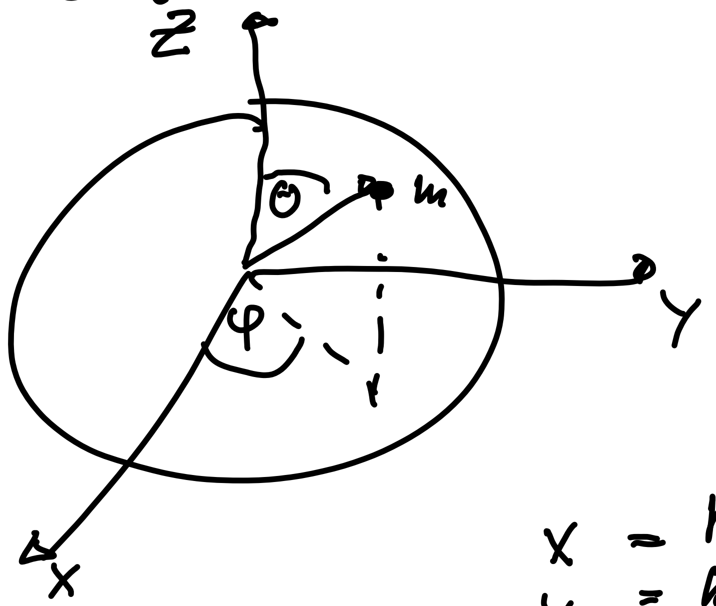
2) $$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k}\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k}\right)}_{=0}\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$ Lagrange-Gleichung forminvariant unter Koordinatentransformation!

Anwendungen

1) Teilchen auf Kugeloberfläche im Schwerefeld der Erde



Zwangsbedingung: holonom-skleronom

$r = |\vec{x}| = R$

generalisierte Koordinaten

θ : Polarwinkel : q_1

φ : Azimut : q_2

$x = R \sin\theta \cos\varphi$

$y = R \sin\theta \sin\varphi$

$z = R \cos\theta$

Kraft: $\vec{F}_a = -mg\vec{e}_z = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lagrange-Funktion: $L = T - V = L(\theta, \varphi)$ q_1 q_2

$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2)$

V aus generalisierter Kraft:

$$Q_1 = Q_\Theta = \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \Theta} = -mg(-R\sin\Theta) = mgR\sin\Theta$$

$$Q_2 = Q_\varphi = \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = 0$$

konservative Kraft: $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow V(\Theta) = -\int d\Theta\, Q_\Theta = -mgR\int d\Theta \sin\Theta = mgR(1+\cos\Theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{m}{2}R^2(\dot\Theta^2 + \sin^2\Theta\,\dot\varphi^2) - mgR(1+\cos\Theta)}$$

Lagrange-Gleichungen / Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = mR^2 \sin\Theta\cos\Theta\,\dot\varphi^2 + mgR\sin\Theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \text{ ist } \underline{\text{zyklische}} \text{ Koordinate}$$

↳ Erhaltungsgröße

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\Theta} = mR^2\dot\Theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mR^2\sin^2\Theta\,\dot\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\theta: \ \ddot{\theta} - \left(\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}\right)\sin\theta = 0 \\ &\varphi: \ \frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\right) = 0 \end{aligned}} \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung} \quad (\vec{\ell} = \vec{x} \times \vec{v})$$

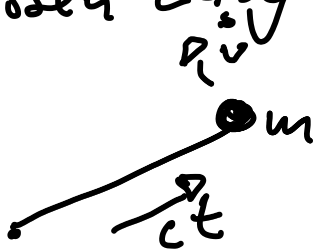
Lösung liefert Bahn auf Kugeloberfläche

(nicht trivial, auf $\dot{\varphi} = 0$

$\Rightarrow \ \ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta$ vgl. Pendel $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$

$\approx -\frac{g}{\ell}\,\theta$)

2) Teilchen an masseloser Stange, dessen Läng sich linear mit der Zeit ändert



Bewegung nur in x-y-Ebene

$z = 0$ holonom-skleronom

$|\vec{x}| = R + ct$ holonom-rheonom

c : konst. Längenänderung

mit Polarkoordinaten:

$x(t) = r(t)\cos\varphi = (R+ct)\cos\varphi$; $q_1 = \varphi$

$y(t) = r(t)\sin\varphi = (R+ct)\sin\varphi$

Lagrange-Funktion: $L = T - V$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\left(c^2 + (k+ct)^2\dot{\varphi}^2\right) \; ; \; V = 0$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \text{ zyklische Koordinate}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(k+ct)^2\dot{\varphi} \quad = \text{konst}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 = m(k+ct)\left((k+ct)\ddot{\varphi} + 2c\dot{\varphi}\right)$$

Lösung: triviale Lösung $\dot{\varphi} = 0$

aus $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = h \Rightarrow d\varphi = \frac{h/m}{(k+ct)^2}\,dt$

$$\hookrightarrow \varphi(t) = -\frac{1}{c}\,\frac{h/m}{(k+ct)}$$

Verallgemeinerte Potentiale / geschwindigkeitsabhängige Potentiale

Lagrange-Gleichung für holonome Systeme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

auch für nicht konservative Systeme

wenn $\boxed{Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}}$

mit verallgemeinertem Potential:

$$U = U(q_j, \dot{q}_j)$$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion

$$\boxed{L = T - U} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

verallgem. Lagrange-Funktion

Bsp.: Teilchen im Elektromagnetischen Feld

Kraft: $\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v}\times\vec{B})\right)$ in Gauß-cgs Einheiten

mit Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad ; \quad \vec{j} : \text{Stromdichte}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \rho : \text{Ladungsdichte}$$

$\Rightarrow$ $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$; $\vec{A}$ Vektorpotential

Induktion: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$

Lösung: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

in Lorentzkraft: $\vec{F} = e\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right)$

suche $U(\vec{x},\vec{v})$ mit $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{\nabla}_{\vec{v}}U - \vec{\nabla}U$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \rightarrow (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = e\left(-\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right) - \frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}\right)$$

$$\text{mit} \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{\nabla}_{\vec{v}}(\vec{A}\cdot\vec{v})$$

$$= e\left(-\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\vec{\nabla}_{\vec{v}}(\vec{A}\cdot\vec{v})\right)$$

$\Rightarrow$ <u>verallgemeinertes Potential</u>

$$\boxed{U(\vec{x},\vec{v}) = e\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}\right)}$$ für Lorentzkraft

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - e\left(\phi - \frac{1}{c}(\vec{A}\cdot\vec{v})\right)}$$

Systeme mit Reibung

- meist geschwindigkeitsabhängig
- nicht energieerhaltend

↪ $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ nicht möglich

↪ keine Lagrange-Funktion $L = T - V$

aber $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$ d'Alembertsches Prinzip für holonome Zwangsbedingungen

mit $\vec{F} = \vec{F}^{(k)} + \vec{F}^{(R)}$

$\vec{F}^{(k)} = -\vec{\nabla} V$ konservativer Anteil

$\vec{F}^{(R)}$: Reibungskraft

↪ $L = T - V$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_j^{(R)}$$

Beispiel: Reibungskraft $\propto v$: Stokes'sche Reibung

↳ Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \beta_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m \quad ; \quad \beta_{lm}$$

Dissipations-koef.-Tensor

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0}$$

modifizierte Lagrange-Gleichung

$$\hookrightarrow \quad Q_j^{(2)} = - \sum_{k=1}^{f} \beta_{jk} \dot{q}_k$$

<u>Energiedissipation</u>

Gesamtenergie: $E = T + V = 2T - L$

mit skleronomen Zwangsbedingungen:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \mu_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m$$

konservatives System (bis auf Reibung)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right)$$

$\dot{q}_j \times$ Lagrange-Gleichung

$$\left(\begin{array}{l} \dot{q}_j \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 2D \\ \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}}_{2\dot{T} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j} - \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = -2D$$

$$\text{mit} \quad \dot{L} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \rightarrow \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{L} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

$$\hookrightarrow 2\dot{T} - \dot{L} = -2D$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{E} = -2D}$$

Energiedissipation bei Reibung

Nicht-holonome Systeme

Lagrange-Multiplikatoren

- Zwangsbedingungen in der Form $f(\vec{x}, t) = 0$ nicht möglich

↳ Angabe von unabhängigen generalisierten Koordinaten nicht möglich

aber: Zwangsbedingungen in differentieller Form unter Umständen möglich, z.B. "rollende Rad"

$\Rightarrow$ Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Betrachte System mit 3N Freiheitsgraden
($N = \#$ Teilchen)

$\tilde{f}$: Anzahl Zwangsbedingungen, wobei

$f \leq \tilde{f}$: zB in differentieller Form :

$$\sum_{m=1}^{3N} g_{im}(x_1, \dots, x_{3N}, t)\, dx_m + h_i(x_1, \dots, x_{3N}, t)\, dt = 0$$

$$i = 1, \dots, f$$

verwende Anzahl holonomer Zwangsbed. $(\tilde{f} - f)$
zur Reduktion der Anzahl der Koordinaten:

$$n = 3N - (\tilde{f} - f)$$

↳ verwende n generalisierte Koordinaten: $q_1, \dots, q_n$

$$\Rightarrow \vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

aber q_j nicht unabhängig voneinander

umschreiben der differentiellen Zwangsbedingungen

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}(q_1, \dots, q_n, t)\, dq_m + b_i(q_1, \dots, q_n, t)\, dt = 0$$

vergleich mit rein holonomen System

$f = 0$ und es existieren $\tilde{f}$ Gleichungen

$$g_i(q_1, \ldots, q_n, t) = 0 \qquad i = 1 \ldots \tilde{f}$$

$$\Rightarrow \quad dg_i = 0 = \sum_m \frac{\partial g_i}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial g_i}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \quad a_{im} = \frac{\partial g_i}{\partial q_m} \; ; \quad b_i = \frac{\partial g_i}{\partial t}$$

partielle Ableitungen der Zwangsbedingungen

Lagrange-Gleichung für Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen ?

(aber in differentieller Form)

- für virtuelle Verrückungen ($\delta t = 0$) gilt:

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im} \, \delta q_m = 0 \qquad i = 1, \ldots, f$$

- mit Lagrange-Multiplikatoren:

  $\lambda_i \quad ; \quad i = 1, \dots, f$ unabhängig von $\underline{q}$ aber evtl. abhängig von t

  - verwendet für generelle Optimierungsprobleme mit Neben- (Zwangs-) Bedingungen

  - müssen noch bestimmt werden:

$$\sum_{i=1}^{f} \lambda_i \sum_{m}^{n} a_{im}\, \delta q_m = 0$$

- für konservative Systeme:

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right) \delta q_m = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$$

wg. $\tilde{f}$ Zwangsbedingungen: $n-f$ unabh. generalisierte Koordinaten

q_k : $k = 1, \dots, n-f$ unabh.

q_ℓ : $\ell = n-f+1, \dots, n$ abhängig

mit f Bestimmungsgleichungen für λ_i (frei wählbar)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im} \overset{!}{=} 0 \quad ; \quad m = n-f+1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{n} (\dots) \delta q_m = \sum_{m=1}^{n-f} (\dots) \delta q_m + \sum_{m=n-f+1}^{n} (\dots) \delta q_m = 0$$

wg. 1 Summand mit unabh. q_m und Bestimmungsgleichung für λ_i :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im}} \quad m = 1, \dots, n$$

Lagrange-Gleichung **1. Art**

n Gleichungungen $n+f$ Unbekannte:

n Koordinaten q_m

$+$ f Multiplikatoren λ_i

f Bestimmungsgleichungen gegeben durch differentiellen Zwangsbedingungen:

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}\,\dot{q}_m + b_i = 0 \quad ; \quad i = 1,\dots,f$$

physikalische Interpretation der λ_i's:

vgl. holonomes System $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m$

$\Rightarrow \quad Q_m = \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im}$: Komponenten einer generalisierten Kraft: hier gegeben durch Zwangskräfte

Zwangskräfte

für Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

N-Teilchen System

$$f_j(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t) = 0 \qquad j = 1, \ldots, f \qquad f: \# \text{ ZB}$$

verwende keine generalisierte Koordinaten, d.h. ZB's nicht zur Reduktion der Freiheitsgrade;

aber: nur $3N-f$ unabh. Koordinaten

$$df_j = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot d\vec{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 : \quad \text{reale Verschiebung}$$

für virtuelle Verrückung ($\delta t = 0$)

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot \delta \vec{x}_i = 0$$

mit f Lagrange-Multiplikatoren

$$\sum_{j=1}^{f} \sum_{i=1}^{N} (\nabla_i f_j) \lambda_j \, \delta \vec{x}_i = 0$$

mit d'Alembert'sches Prinzip:

$$\sum_i^N \left(\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i \right) \delta \vec{x}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i + \sum_{j=1}^f \lambda_j \left(\vec{\nabla}_i f_j \right) \right) \delta \vec{x}_i = 0$$

wähle λ_j so daß $(\ldots) = 0$

vgl. mit Newton

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i$$

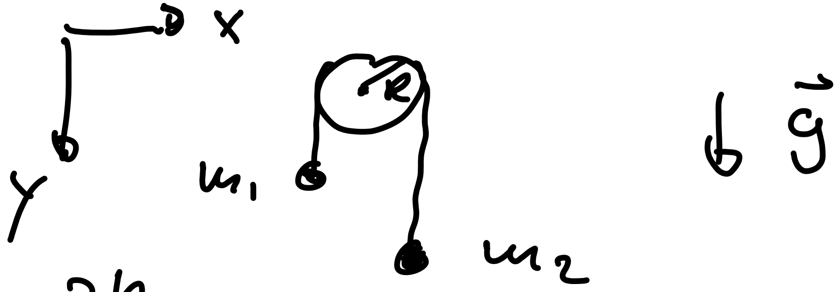
$$\Rightarrow \boxed{m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \sum_{j=1}^f \lambda_j \left(\vec{\nabla}_i f_j \right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{Z}_i = \sum_{j=1}^f \lambda_j \left(\vec{\nabla}_i f_j \right)}$$: Zwangskraft

Bestimmung der Zwangskräfte u. U. <u>einfacher</u> mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren

Beispiel: suche Fadenspannung

Atwoodsche Fallmaschine



zB

$z_1 = 0 = z_2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2R$

$y_1 + y_2 + \pi R = \ell$: wird hier nicht verwendet

↳ Anzahl generalisierter Koordinaten: $6 - 4 = 2$

$q_1 = y_1$; $q_2 = y_2$

$f(q_1, q_2) = 0 = q_1 + q_2 + \pi R - \ell$

↳ $\delta f = \delta q_1 + \delta q_2 = 0$

↳ $a_{11} = 1 = a_{12}$

ein Lagrange-Multiplikator: λ

aus generalisierter Kraft: $Q_m = \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im}$

$Q_1 = \lambda = Q_2$ Fadenspannung

Lagrange-Funktion: $L = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2\right) + g\left(m_1 q_1 + m_2 q_2\right)$

LG6:

$$m_1 \ddot{q}_1 - g m_1 = \lambda$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - g m_2 = \lambda$$

+ Zwangsbedingung: $\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0$

3 Gleichungen für 3 Unbekannte (q_1, q_2, λ)

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$\Rightarrow \lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Fadenspannung: für $m_1 \gg m_2$

$$\lambda = -2g m_2$$

für $m_1 = m_2 \Rightarrow \lambda = -g m$

Beispiel: "rollendes Rad"

System mit nicht-holonomen ZB; aber Darstellung in differentieller Form

generalisierte Koordinaten:

x, y und φ, Θ

q_1, q_2 q_3 q_4

Zwangsbedingung Rollen:

$$\dot{x} - R\dot{\varphi}\cos\Theta = 0 \quad ; \quad \dot{y} - R\dot{\varphi}\sin\Theta = 0$$

mit $\sum_{m=1}^{n} a_{im}\dot{q}_m = 0$ $\quad$ n : 4 Koordinaten
$\quad i = 1,2$ Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \quad a_{11} = 1 \quad a_{12} = 0 \quad a_{13} = -R\cos\Theta \quad a_{14} = 0$$

$$a_{21} = 0 \quad a_{22} = 1 \quad a_{23} = -R\sin\Theta \quad a_{24} = 0$$

2 Lagrange-Multiplikatoren: λ_1, λ_2
4 generalisierte Kräfte $\left(Q_m = \sum_{i=1} \lambda_i a_{im} \right)$

$$Q_1 = \lambda_1 \quad Q_2 = \lambda_2 \quad Q_3 = -\lambda_1 R\cos\Theta - \lambda_2 R\sin\Theta \; ; \; Q_4 = 0$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\Theta}^2$$

$I_1 = \frac{1}{2}MR^2$ Trägheitsmoment: Drehung um Achse

$I_2 = \frac{1}{4}M\left(R^2 + \frac{1}{3}d^2\right)$; d : Scheibendicke

LGL:

$M\ddot{x} = \lambda_1$; $M\ddot{y} = \lambda_2$; $I_1\ddot{\varphi} = -\lambda_1 k\cos\Theta - \lambda_2 k\sin\Theta$; $I_2\ddot{\Theta} = 0$

+ 2 Zwangsbedingungen: 6 Gleichungen für 6 Unbekannte

1) $\Theta = \dot{\Theta}_0 t$; $\dot{\Theta} = \text{konst}$

2) $\lambda_1 = Mk(\ddot{\varphi}\cos(\dot{\Theta}_0 t) - \dot{\varphi}\dot{\Theta}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t))$

3) $\lambda_2 = Mk(\ddot{\varphi}\sin(\dot{\Theta}_0 t) + \dot{\varphi}\dot{\Theta}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t))$

4) $I_1\ddot{\varphi} = -Mk^2\ddot{\varphi} \rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \dot{\varphi}_0 = \text{konst.}$

5) $\dot{x} = k\dot{\varphi}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow x(t) = k\frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0}\sin(\dot{\Theta}_0 t) + x_0$

6) $\dot{y} = k\dot{\varphi}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow y(t) = -k\frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0}\cos(\dot{\Theta}_0 t) + y_0$

Zwangskräfte:

$Q_1 = -Mk\dot{\varphi}_0\dot{\Theta}_0\sin(\dot{\Theta}_0 t)$; $Q_2 = Mk\dot{\varphi}_0\dot{\Theta}_0\cos(\dot{\Theta}_0 t)$

$Q_3 = 0 = Q_4$

halten Rad in der "Spur"

Hamiltonsche Prinzip / Variationsprinzip

bisher: d'Alembert-Prinzip: Differentialprinzip
↳ Ableitung der Lagrange-Gleichungen (Bewegungsgleichungen) durch virtuelle Verrückungen

Hamilton-Prinzip: Integrationsprinzip

Bestimmung der Bewegungsgleichungen durch Variation aller möglichen Bahnen + Optimierung (Extremwertbestimmung)

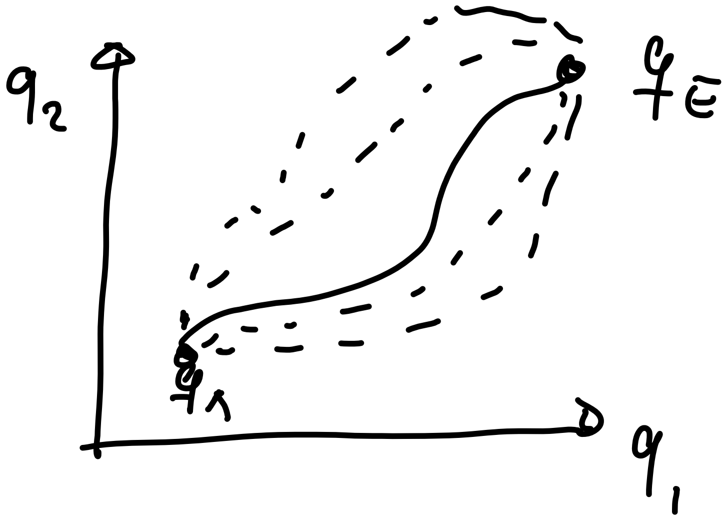
betrachte Bahnen im $\mathbb{R}^n$

mit $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ Konfigurationsvektor

Bahnen $t_A \leq t \leq t_E$; $t \to (q_1(t), \dots, q_n(t))$

mit Randwerten $\underline{q}(t_A) = \underline{q}_A$; $\underline{q}(t_E) = \underline{q}_E$

Bahnen im Konfigurationsraum



mit der Funktion : $L = L(q(t); \dot{q}(t), t)$

$= L(t)$

allgemein: $q(t)$ beliebige Funktionen

$\dot{q}(t)$ "Änderungsrate" von $q(t)$

und

$$S[L] = \int_{t_A}^{t_E} dt\, L(t)$$

hier: Wirkung, Wirkungsfunktional

Funktional (hier Abb von Funktionen in $\mathbb{R}$, allgem.: Abb. von Funktionen auf Funktionen)

$\Rightarrow$ Hamiltonsches Prinzip

Die Bewegung eines Systems erfolgt entlang einer Bahnkurve im Konfigurationsraum, die $S[L]$ stationär macht.

auch: Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\boxed{\delta S = 0} \rightarrow \text{Variationsrechnung}$$

S : stationär / extremal

Möglichkeit!
betrachte Bahnen mit kleiner Variation um Extremal-Bahn:

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0(t) + \alpha\, \underline{s}(t) = \underline{q}(t,\alpha)$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{q}}(t,\alpha) = \dot{\underline{q}}_0(t) + \alpha\, \dot{\underline{s}}(t)$$

mit Randbedingungen : $\underline{s}(t_*) = 0 = \underline{s}(t_E)$

$$\to \quad L = L\left(\underline{q}(t,\alpha), \dot{\underline{q}}(t,\alpha)\right)$$

$$\to \quad S(\alpha) = \int_{t_A}^{t_E} dt\, L\left(\underline{q}(t,\alpha), \dot{\underline{q}}(t,\alpha)\right)$$

S : stationär : $\delta S = \left.\frac{dS}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \delta\alpha = 0$

$$\left.\frac{dS}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\underline{\nabla}_q L)\cdot \underline{S} + (\underline{\nabla}_{\dot q} L)\cdot \dot{\underline{S}} \right]$$

$$\overset{\text{p. I}}{=} \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\underline{\nabla}_q L)\underline{S} - \frac{d}{dt}(\underline{\nabla}_{\dot q} L)\underline{S} \right] + \underbrace{(\underline{\nabla}_{\dot q} L)\cdot \underline{S}\Big|_{t_A}^{t_E}}_{\substack{=0 \\ \text{Randterm}}}$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\underline{\nabla}_q L) - \frac{d}{dt}(\underline{\nabla}_{\dot q} L) \right]\cdot \underline{S} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\underline{\nabla}_{\dot{\underline{q}}} L\right) - \underline{\nabla}_{\underline{q}} L = 0}$$

Euler-Gleichung der Variationsrechnung

+ Mechanik

↳ Euler-Lagrange-Gleichungen

(ELG oder ELDG)

Möglichkeit 2

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt\, L = \int_{t_A}^{t_E} dt\, \delta L$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \left[\left(\underline{\nabla}_{\underline{q}} L\right) \delta \underline{q} + \left(\underline{\nabla}_{\dot{\underline{q}}} L\right) \delta \dot{\underline{q}} \right] \quad ; \quad \delta \dot{\underline{q}} = \frac{d}{dt} \delta \underline{q}$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \int_{t_A}^{t_E} dt \left[\left(\underline{\nabla}_{\underline{q}} L\right) \cdot \delta \underline{q} - \frac{d}{dt}\left(\underline{\nabla}_{\dot{\underline{q}}} L\right) \cdot \delta \underline{q} \right] + \underbrace{\cancel{\left(\underline{\nabla}_{\dot{\underline{q}}} L\right) \delta \underline{q} \Big|_{t_A}^{t_E}}}_{=0}$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \underbrace{\left[(\nabla_q L) - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot q} L) \right]}_{=0} \delta q$$

$= 0$ wg. unabhängig von δq

$\Rightarrow$ ELG

<u>Vergleich mit d'Alembert Prinzip</u>

d'Alembert Prinzip : $\sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$

mit $\ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}} \delta \vec{x}) - \dot{\vec{x}} \delta \dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}} \delta \vec{x}) - \frac{1}{2} \delta \dot{\vec{x}}^2$

Integration

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i (\vec{F}_{ai} - m_i \ddot{\vec{x}}) \delta \vec{x} = 0$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i \Big(\underset{①}{\vec{F}_{ai} \cdot \delta \vec{x}_i} - \underset{②}{\frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x})} + \underset{③}{\frac{m_i}{2} \delta \dot{\vec{x}}^2} \Big)$$

① $\sum_i \vec{F}_{a,i}\, \delta \vec{x}_i = \sum_j Q_j \,\delta q_j = -\sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j = -\delta V$ für konservative Systeme

② $\int_{t_A}^{t_E} dt \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{\vec{x}}_i \,\delta \vec{x}_i = \sum m_i \dot{\vec{x}}_i \,\delta x_i \Big|_{t_A}^{t_E}$

$= 0$ Start- und Endpunkte werden nicht variiert

③ $\sum_i \frac{m_i}{2} \delta \dot{x}_i^2 = \delta T$ $\quad T$: kinetische Energie

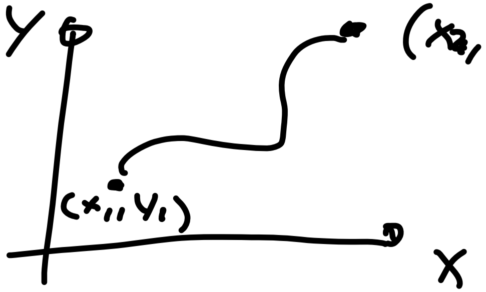
$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{t_A}^{t_E} dt\, (\delta T - \delta V) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt\, (T - V) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt\, L$$

$\Rightarrow$ L : Lagrange-Funktion

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{d'Alembertsches Prinzip ist \underline{äquivalent} zu Hamiltonschen Prinzip}}$

Variationsrechnung Beispiele

1) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene



Kurve: $y = y(x)$ gesucht
mit Parameter x

infinitesimales Wegelement: ds

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Wegstrecke: $S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} dx \sqrt{1 + y'^2}$

$\Rightarrow L = L(y, y') \overset{\text{hier}}{=} L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen: $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}\, y'\right)$$

$\Rightarrow$ Lösung: $y' = \text{const.} \Rightarrow y(x) = ax + b$

<u>Gerade</u>

2) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf Kugeloberfläche

Koordinaten: Θ, φ ; $R = \text{const.}$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= R^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta \, d\varphi^2)$$

und t : beliebiger Parameter ; z.B. Zeit : $\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt}$

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$

$$\Rightarrow S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \, R \left(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \, \dot{\varphi}^2\right)^{1/2}$$

$$\delta S = 0 = \int dt \tfrac{1}{2} R \left(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \, \dot{\varphi}^2\right)^{-1/2} \delta\left(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \, \dot{\varphi}^2\right)$$

($\rightarrow$ Geodätengleichung)

betrachte $\tilde{L} = \dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \, \dot{\varphi}^2 = L(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\varphi})$

$\Rightarrow$ EGL : Θ : $\ddot{\Theta} = \sin\Theta \cos\Theta \, \dot{\varphi}^2$

φ : $\ddot{\varphi} = -2 \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta} \dot{\Theta} \dot{\varphi}$

$\Big\}$ für $\Theta = \pi/2$

$\hookrightarrow \ddot{\varphi} = 0$

$\hookrightarrow \dot{\varphi} = \text{const}$

Bemerkung: unterschiedene Lagrange-Funktionen

z.B. Kugeloberfläche:

$$ds = R\, d\Theta \sqrt{1 + \sin^2\Theta\, \varphi'} \quad ; \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\Theta}$$

$\Rightarrow L(\varphi', \Theta)$ hier: Θ (Integrations)parameter $\hat{=}$ "Zeit"

$$ds = R\, d\varphi \sqrt{\Theta' + \sin^2\Theta}$$

$\Rightarrow L(\Theta, \Theta')$: ohne "Zeit"

<u>Geodätengleichung</u> (= extremale Bahnen in beliebiger Geometrie)

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i\, dx_j = g_{ij}\, dx_i\, dx_j \quad \begin{pmatrix}\text{Summen-}\\ \text{konvention}\end{pmatrix}$$

x_i : beliebige Koordinaten

g_{ij} : Metrik, metrischer Tensor
als Matrix darstellbar
z.B. $g_{ij} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\Theta)$; $\underline{x} = (r, \Theta, \varphi)$
$\Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\Theta + r^2 \sin^2\Theta\, d\varphi^2$

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{ij}\dot{x}_i \dot{x}_j} \quad ; \quad t: \text{beliebiger Parameter}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{1}{2}(g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j)^{-1/2} \, \delta(g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{1}{2}(\qquad)^{-1/2}\Big[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\delta x_k \dot{x}_i\dot{x}_j + g_{ij}\underbrace{\delta(\dot{x}_i\dot{x}_j)}_{\underbrace{\frac{\partial \dot{x}_i \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_k}}_{2 g_{kj}\dot{x}_j} \delta \dot{x}_k}\Big]$$

$$\delta \dot{x}_k = \frac{d}{dt}\delta x_k$$

part. Integration

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{1}{2}(\ldots)^{-1/2}\Big[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_i\dot{x}_j - 2\frac{d}{dt}(g_{kj}\dot{x}_j)\Big]\delta x_k$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(g_{kj}\dot{x}_j) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_i\dot{x}_j = 0}$$

Geodätengleichung

Bewegungsgleichung für Teilchen aber auch Licht in gegebener Geometrie (z. B. Planetenbahnen, Lichtbeugung)

Brachistochronenproblem
(gr. brachystos = kürzeste, chronos = Zeit)
schnellster Weg im Schwerefeld der Erde

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \rightarrow \text{extremal} : \delta S = 0$$

$$= \int_A^B \frac{ds}{v(s)}$$

aus Energieerhaltung

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g y = m g h$$

$$A : (0, h) \; ; \; B : (x_B, 0)$$

$$\Rightarrow v(y) = \sqrt{2g(h-y)}$$

mit $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$

$$S = \int_0^{x_B} dx \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} \Rightarrow \text{Lagrange-Funktion:}$$

$$L(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

ELG: $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(h-y)(1+y'^2)}}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g(h-y)(1+y'^2)}}\left[\frac{1}{2}\frac{y'^2}{2g(h-y)} + \frac{y''}{1+y'^2}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} \quad \frac{1}{h-y}$$

$$\Rightarrow \boxed{2(h-y)y'' = 1+y'^2} \quad \text{Euler DGL}$$

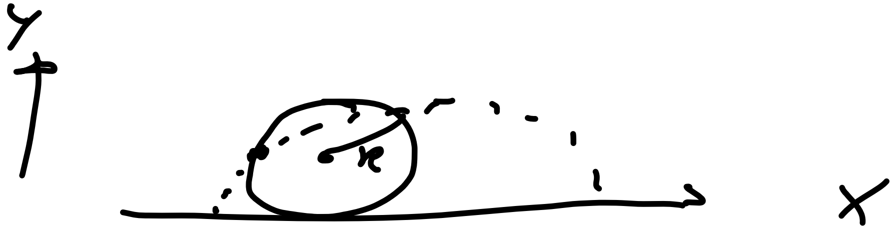
Lösung: $\frac{d}{dx}\left((h-y)(1+y'^2)\right) = 0$

$$\Rightarrow (h-y)(1+y'^2) = a = \text{const.}$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{a-(h-y)}{h-y} = \frac{a-\tilde{y}}{\tilde{y}} \quad ; \quad \tilde{y} = h-y$$

Lösung: Teil einer Zykloidenbahn:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2R-y}{y}$$



$$x = R(\varphi + \sin\varphi)$$

$$y = R(1 + \cos\varphi)$$

Bemerkung: wenn $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ $\quad t =$ Parameter zur Beschreibung des Problems (s.o. $t = x$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \iff \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{const}}$$

Bsp. kürzeste Strecke in der Ebene:

$$ds = dx\sqrt{1+y'^2} \rightarrow L(y') \text{ bzw. } \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

aus $y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = \text{const} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$

Lösung $\Rightarrow y(x) = ax + b$

Variationsrechnung mit Nebenbedingung

Hamiltonsche Prinzip <=> Lagrange-Gl. 1. Art

betrachte System mit f nicht-holonomen Zwangsbedingungen, die sich in differentieller Form darstellen lassen:

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}(q_1 \dots q_n, t)\dot{q}_m + b_i = 0 \qquad i = 1 \dots f$$

mit Hamiltonschen Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m = 0$$

q_m's nicht unabh. voneinander $\rightarrow (\dots) \neq 0$

mit HP: Endpunkte bleiben unverrückt: $\delta t = 0$

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}\,\delta q_m = 0$$

mit Lagrange-Multiplikatoren λ_i: $\int dt \sum a_{im} \lambda_i = 0$

$$\Rightarrow \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^{f} a_{im}\lambda_i \right) \delta q_m = 0$$

wähle λ_i so daß $(\ldots) = 0$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{f} a_{im}\lambda_i}$$

Lagrange-Gl. 1. Art

n Gleichungen (q_m) für $n+f$ Unbekannte

$+ f$ Gleichungen aus Zwangsbedingungen

betrachte Systeme mit Nebenbedingungen bzw.
holonome Zwangsbedingungen

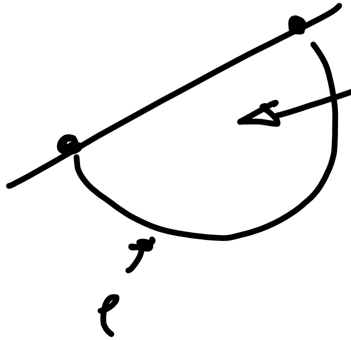
$$g_i(\underline{q},t) = 0 \Rightarrow dg_i = 0 \Rightarrow a_{im} = \frac{\partial g_i}{\partial q_m}$$

$\Rightarrow$ modifizierte Grundfunktion bzw. mod. Lagrange-Funktion

$$\tilde{L}(\underline{q},\underline{\dot{q}},t) = L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t) + \sum_{i=1}^{f} \lambda_i g_i(\underline{q},t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_m} = 0}$$

Bsp. Isoperimetrisches Problem



max. Fläche ?

$\leftarrow L = L(y)$

Fläche $\quad F = \int_{x_1}^{x_2} dx\, y \quad ; \; y = y(x)$

Nebenbedingung: $\quad l = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{g}$

$$\Rightarrow \tilde{L} = y + \lambda \sqrt{1+y'^2} = L(y, y')$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \tilde{L} - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = \text{const} = h$$

Lösung: $x_1 = 0 \quad \Rightarrow \left(x - \sqrt{\lambda^2 - h^2}\right)^2 + (y - h)^2 = \lambda^2$

Kreisbogen mit $x_2 = 2\sqrt{\lambda^2 - h^2}$

- Variationsrechnung mit Nebenbedingung

allgemein:

$$G = \int_{t_A}^{t_E} dt\, G(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \text{const.}$$

(z.B. Isoperimetrische Probleme, "gleicher Umfang")

mit modifizierter Grundfunktion / modifizierte Lagrange-Funktion

$$\tilde{L} = L + \sum_{i=1}^{f} \lambda_i\, G_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \quad ; f: \text{Anzahl der Nebenbed.}$$

⇒ Lösung des Problem

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \underline{\dot{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \underline{q}} = 0$$

Euler-Gleichung mit modifizierter Grundfunktion

n Gleichungen ($\underline{q} = (q_1, \dots q_n)$) für $n+f$ Unbekannte ($\lambda_i : i = 1..f$) + Nebenbedingungen

Erhaltungssätze / Noether Theorem

allgemein mechanische Systeme
Änderung von $\underline{q}$ und $\underline{\dot{q}}$
mit $\underline{q} = (q_1 \dots q_n)$; $\underline{\dot{q}} = (\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)$; $2n$ Größen

Integral der Bewegung / Bewegungsintegral

$$I_n = I_n(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = c_n = \text{konstant}$$

entlang Trajektorie, die durch ELG (Newtonschen Bewegungsgleichungen) bestimmt ist.

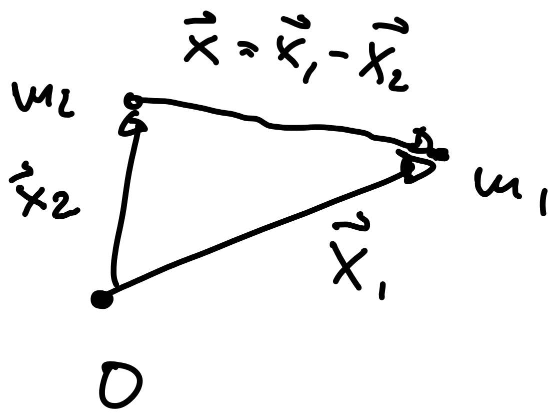
Bsp.: zyklische Koordinate $\to I_n$

zyklische Koordinate : $\frac{\partial L}{\partial q_n} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} I_n \; ; \; I_n = \text{const.}$$

abhängig von der Wahl des Koordinatensystems
$\leadsto$ wähle Koordinatensystem, so daß I_n's einfach gefunden werden können

anschaulich: Kepler-Problem / 2-Körper-Problem



Potential nur vom Abstand abhängig: $V = V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$

mit Gesamtmasse: $M = m_1 + m_2$

reduzierte Masse: $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Schwerpunkt: $\vec{R} = \frac{1}{M}(m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2) = (X, Y, Z_1)$

(q_1, q_2, q_3)

relative Koordinate: $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$(r, \theta, \varphi) = (q_4, q_5, q_6)$$

$$\Rightarrow L = \frac{M}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{\mu}{2}\left(\dot{q}_4^2 + q_4^2(\dot{q}_5^2 + \sin^2 q_5\, \dot{q}_6^2)\right) - V(q_4)$$

zyklische Koordinaten: q_1, q_2, q_3, q_6

$$\Rightarrow p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = M\dot q_1 = M\dot X = \text{const} = I_1$$

$$p_2 = M\dot q_2 = M\dot Y \; ; \; p_3 = M\dot q_3 = M\dot Z$$

→ Impulserhaltung des Schwerpunkts

$$p_6 = \frac{\partial L}{\partial \dot q_6} = r^2 \sin^2\Theta\,\dot\varphi = I_6 \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung}$$

p's : generalisierte Impulse

vgl.: in kartesischen Koordinaten

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dot z_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot x_2^2 + \dot y_2^2 + \dot z_2^2\right) - V(|\vec x_1 - \vec x_2|)$$

⇒ <u>keine</u> zyklische Koordinate

<u>Noether Theorem</u>

Frage nach "Symmetrien" eines Systems und Zusammenhang mit Erhaltungssätzen

betrachte zyklische Koordinate:

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = 0 \Rightarrow p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = \text{const.}$$

Interpretation : zyklische Koordinate

$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ ist invariant unter Koordinatentransformation

$$q_k \to Q_k(\lambda) = q_k + \lambda$$

Translation $\to$ Symmetrie (entlang Richtung q_k)

und $Q_j(\lambda) = q_j$ für $j \neq k$

$$\Rightarrow \underline{\dot{Q}} = \underline{\dot{q}}$$

$$\Rightarrow L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) \iff \frac{\partial L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t)}{\partial \lambda} = 0$$

Verallgemeinerung : beliebige Koordinatentransformation

$Q_i(\lambda) = Q_i(\underline{q}, t)$; $\lambda \in \mathbb{R}$; d.h. einparametrige Schar von Koordinatentrafo

$$\Rightarrow \dot{Q}_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \qquad i = 1 \ldots n$$

mit $Q_i(0) = q_i$; $\dot{Q}_i(0) = \dot{q}_i$ — für $\lambda = 0$ sind Q_i und q_i identisch

Def.: Transformation ist Symmetrie-Transformation von $L = L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$ falls

$$\left.\frac{\partial L(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = 0$$

d.h. L ist invariant unter einparametrigen Koordinatentransformation

Bsp.: 1) zyklische Koordinate

2) Drehung in Ebene

$$X(\lambda) = x\cos\lambda + y\sin\lambda \quad \rightarrow \quad \dot{X} = -x\sin\lambda + y\cos\lambda$$

$$Y(\lambda) = y\cos\lambda - x\sin\lambda \qquad \dot{Y} = -y\sin\lambda - x\cos\lambda$$

mit $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r) \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2$

$$= \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - V(R) \quad ; \quad R^2 = X^2 + Y^2$$

$$\rightarrow \frac{\partial L(X, \dot{X}, Y, \dot{Y})}{\partial \lambda} = 0$$

hier: keine Abhängigkeit von λ

Noether Theorem

sei L invariant unter Symmetrietransformation

dann ist I Konstante der Bewegung

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\lambda=0}$$

Beweis:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

(gilt für einparametrige Symmetrietransf.)

mit ELG: $\partial L / \partial q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{dt} I \quad \Rightarrow \quad I \text{ konstante der Bewegung}$$

Bsp.: 1) zyklische Koordinate

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad I = \sum_i \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k = \text{const.}$$

2) Drehung

$$\left.\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = y \quad ; \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = -x$$

$$I = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = y m \dot{x} - x m \dot{y}$$

$$= -m(\vec{x} \times \dot{\vec{x}})_z = -L_z$$ z-Komponente Drehimpuls

Allgemein: Homogenität des Raums:

Ursprung nicht ausgezeichnet

$\rightarrow$ Symmetrietransformation möglich

hier: Translation

$\vec{x}_i \rightarrow \vec{Q}_i = \vec{x}_i + \lambda \vec{n}$; $\vec{n}$ beliebige Richtung z.B. N-Körper-Wechselwirkung nur abhängig von Abständen $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$:

$$U(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) = U(|\vec{Q}_i - \vec{Q}_j|)$$

Noether-Konstante / Noether-Ladung:

$$\frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} = \vec{n} \quad ; \quad T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \dot{\vec{x}}_i^2$$

$$I = \sum_i^N \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i}\bigg|_{\lambda=0} = \sum_i \vec{n} \cdot (m_i \dot{\vec{x}}_i)$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \sum_i^N m_i \dot{\vec{x}}_i$$ Gesamtlinear-Impuls = Erhaltungsgröße

$$\hookrightarrow \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i$$ Schwerpunkt: $\ddot{\vec{R}} = 0$

- Homogenität des Raums
  $\Leftrightarrow$ Gesamtimpulserhaltung
  $\Leftrightarrow$ System (L) translationsinvariant
  (=Symmetrietransformation)

- Isotropie des Raums

↳ L invariant unter Drehung : $\vec{Q}_i = D\vec{x}_i$

D: Drehmatrix : $D = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hier: um z-Achse

$$I = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i}\Big|_{\lambda=0} \quad ; \quad \frac{\partial D}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(-y_i \dot{x}_i + x_i \dot{y}_i\right) = \sum_i L_{z,i}$$

$= L_z$ z-Komponente des Gesamtdrehimpuls → erhalten

Drehrichtung beliebig ⇒ $\vec{L}$ Gesamtdrehimpuls erhalten

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ Isotropie des Raums} \\ \Leftrightarrow \text{ Gesamtdrehimpulserhaltung} \\ \Leftrightarrow \text{ System invariant unter Drehung} \\ \quad (= \text{Symmetrie-Transformation}) \end{array}}$$

- Homogenität der Zeit

betrachte $\underline{q}(t)$: Lösung der ELG

mit $\underline{q}(t_A) = \underline{q}_A$ und $\underline{q}(t_E) = \underline{q}_E$

System "zeitlich homogen": invariant unter Zeittranslation : $t \to t + \Delta t$

$\Leftrightarrow \underline{q}(t_A + \Delta t) = \underline{q}_A \; ; \; \underline{q}(t_E + \Delta t) = \underline{q}_E$

$\Rightarrow$ L kann nicht explizit von der Zeit t abhängig sein, da $q(t)$ aus L gewonnen wird:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L}$$

konstante entlang ELG-Bahn

Integral der Bewegung

Beweis:

$$\frac{d}{dt}H = \sum_i \left(\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right)$$

$$= \sum_i \dot{q}_i \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)}_{\text{ELG } = 0}$$

$\Rightarrow H = \text{const}$

$H = ?$ Lagrange-Fkt: $L = T - V$

+ skleronome Zwangsbedingungen

+ konservativ

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \mu_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j$$

da $\dot{\vec{x}} = \sum_i \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}}_{=0}$

konservativ: $V = V(\underline{q})$

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

$$H = 2T - L = T + V \quad \text{Gesamtenergie}$$

<u>Eichtransformation</u>

$$L \to \tilde{L} = \alpha L + \frac{d}{dt} f(\underline{q}, t) \qquad ; \alpha = \text{const}$$

$\tilde{L}$ erfüllt gleiche ELG wie $L = L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$

$f = f(\underline{q}, t)$: Eichfunktion

- $\tilde{L} = \alpha L$ offensichtlich, da ELG linear in L
- $\tilde{L} = L + \frac{d}{dt} f(\underline{q}, t)$

aus Variationsprinzip: $\delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt\, L = 0$

$$\delta \tilde{S} = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt \frac{d}{dt} f = \delta \left[f(\underline{q}_E, t_E) - f(\underline{q}_A, t_A) \right] = 0$$

keine Variation

aus ELG:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{d}{dt}f\right) - \frac{\partial}{\partial q}\frac{d}{dt}f$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\dot q + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\dot q + \frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q} - \dot q \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\dot q + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \dot q \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot q} - \frac{\partial \tilde L}{\partial q} = 0}$$

"Physik" unabhängig von Eichtransformation

Symmetrie - Transformation

$$\tilde L(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t) = L(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t) + \frac{d}{dt} f(\underline{Q}, t)$$

$$= L(\underline{q}(\underline{Q}, t), \dot{\underline{q}}(\underline{Q}, t), t)$$

$Q_i = Q_i(\underline{q}, t, \lambda)$ einparametrige Transformation

$\Rightarrow$ Noether-Konstante / Ladung

$$\boxed{J(\underline{q},\dot{\underline{q}},t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i(\underline{Q},t)}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bigg|_{\lambda=0} - \frac{\partial f(\underline{Q},t)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0}}$$

$\frac{d}{dt} J = 0$

Symmetrie-Transformation: $\frac{\partial L(\underline{Q},\dot{\underline{Q}},t)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial L(q(\underline{Q},t),\dot{q}(\underline{Q},t),t)}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{d}{dt} f(\underline{Q},t) \quad \text{bei: } \lambda=0$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{q}(\underline{Q},t)}{\partial \lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}}\right)}_{\text{siehe Noether-Theorem}} - \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \lambda}\frac{\partial}{\partial \dot{\underline{Q}}}\frac{d}{dt} f(\underline{Q},t)\right)}_{\text{ELG + Eichfunktion}}$$

$$= \quad '' \quad - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{\underline{Q}}}\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{Q}}\dot{\underline{Q}} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial \underline{Q}}}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\frac{\partial f}{\partial \underline{Q}} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \underline{q}(\underline{Q},t)}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} - \frac{\partial f(\underline{Q},t)}{\partial \lambda} \right] \Bigg|_{\lambda=0}$$

Bsp. Galilei - Transformation
im kräftefreien Fall

$$\vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}(\lambda) t \quad ; \text{mit } \vec{v}(0) = 0 \ ; \ \frac{\partial \vec{v}}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} = 1$$

$$L'(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) = L(\vec{x}(\vec{x}',t), \dot{\vec{x}}(\vec{x}',t), t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$$

$$= L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) + \frac{d}{dt} f(\vec{x}', t)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{\vec{x}}' - \vec{v})^2 = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}'^2 + \underbrace{\frac{m}{2} \vec{v}(\vec{v} - 2\dot{\vec{x}}')}_{\frac{d}{dt} f(\vec{x}', t)}$$

$$\hookrightarrow f(\vec{x}', t) = \frac{m}{2} \vec{v}(\vec{v} \cdot t - 2\vec{x}')$$

Erhaltungsgröße / Noether - Ladung

$$\vec{x}(\vec{x}; t) = \vec{x}' - \vec{v} t \quad ; \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} = -t$$

mit $J(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} - \frac{\partial f(\vec{x}',t)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0}$

$$= m\dot{\vec{x}}(-t) - (-m\vec{x})$$

$$= m(\vec{x} - \dot{\vec{x}}t)$$

äquivalent zur Bewegungsgleichung: $\ddot{\vec{x}} = 0$

↳ Lösung: $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t$

$$\Rightarrow J = m\vec{x}_0$$

Bemerkung:

aus Symmetrietransformation folgt Erhaltungsgröße (I, J):

<u>Noether-Theorem</u>

aber: Erhaltungsgrößen lassen <u>nicht</u> auf notwendige Symmetrietransformation schließen (z.B. Lenz'scher Vektor: $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha\vec{e}_r$; für $\vec{F} = \alpha/r^2\,\vec{e}_r$ ↳ keine Periheldrehung)

Hamilton-Mechanik

Lagrange-Mechanik: gegeben: generalisierten Koordinaten q_i mit $i = 1 \ldots n$ (n-dimensionaler Konfigurationsraum $\underline{q}$)

und generalisierte Geschwindigkeiten (Änderung) $\dot{q}_i$

aber: bei Koordinatentransformation: Geschwindigkeiten fixiert, d.h. $\underline{q}$ und $\dot{\underline{q}}$ nicht unabhängig voneinander.

$\Rightarrow$ suche Formulierung mit "symmetrischen"/gleichberechtigten Größen

mit: größere Klasse von Variablentransformationen, Ausweitung des Formalismus auf größere Problemklasse (insb. Quantenmechanik, Thermodynamik, Statistik), evtl. einfachere Problemlösung

Bsp.: $\ddot{x} = \omega^2 x$ neue Variable $y_\pm = \omega x \pm \dot{x}$ (anstatt $x, \dot{x}$)

$\Rightarrow \dot{y}_\pm = \omega \dot{x} \pm \ddot{x} = \omega \dot{x} \pm \omega^2 x = \pm \omega (\omega x \pm \dot{x}) = \pm \omega y_\pm$

$\hookrightarrow$ Lösung $y_\pm(t) = c_\pm e^{\pm \omega t}$; $x(t)$ aus Rücktransformation wichtige Transformationsklasse in der Physik

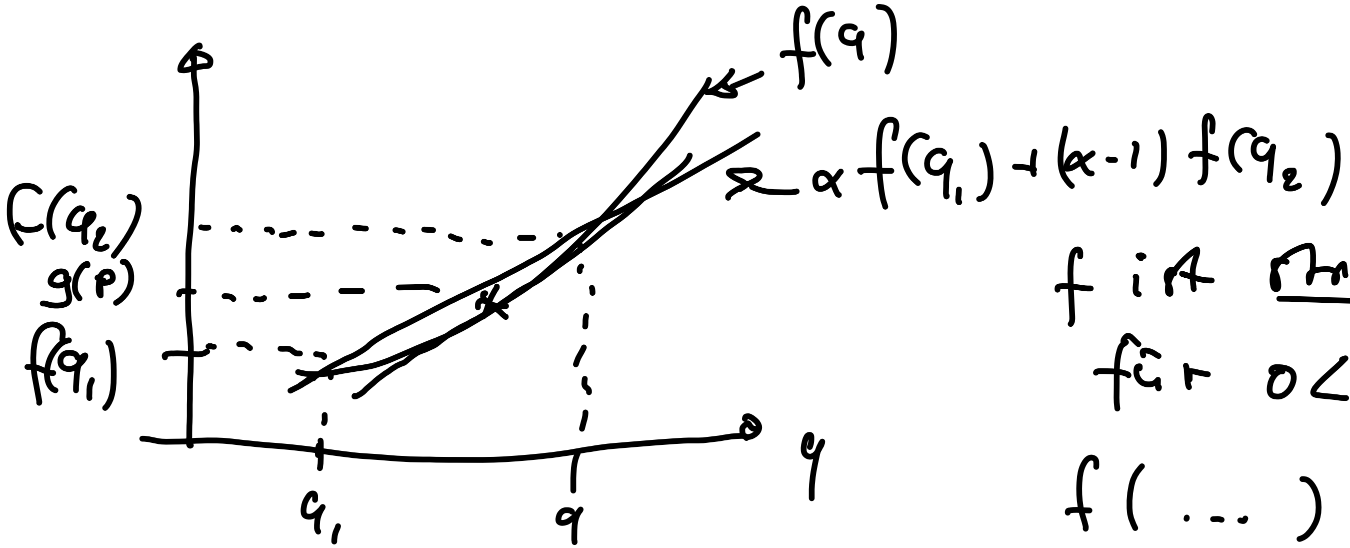
Legendre-Transformation

(auch: Thermodynamik)

Def: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex falls für alle $\underline{q}_1, \underline{q}_2 \in \mathbb{R}^n$

und $0 \le \alpha \le 1$ gilt:

$$f(\alpha \underline{q}_1 + (1-\alpha)\underline{q}_2) \le \alpha f(\underline{q}_1) + (1-\alpha) f(\underline{q}_2)$$



f ist strikt konvex für $0 < \alpha < 1$

$$f(\ldots) < \alpha f(q_1) + (1-\alpha) f(q_2)$$

Anwendung: konvexe Funktionen können durch Tangentenflächen beschrieben werden mit Parametrisierung der Steigung $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$:

Tangente : $\underline{p}\,\underline{q} - g(\underline{p})$

Bedingung für Berührung:

$$f(\underline{q}) = \underline{p}\cdot\underline{q} - g(\underline{p}) \quad ; \quad \underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$$

Definition:

$$\underline{p} \rightarrow g(\underline{p}) = \underline{p}\cdot\underline{q} - f(\underline{q}) \quad \text{mit } \underline{q} \text{ aus}$$
$$\underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$$

<u>Legendre-transformierte</u> von $f(\underline{q})$

Bemerkungen:

- $\underline{q}, \underline{p}$ korrespondierende Punkte wenn $\underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$
- $g(\underline{p})$ ist konvex, wenn $f(\underline{q})$ konvex
- Legendre-transformierte von $g(\underline{p})$ ist Ursprungsfunktion $f(\underline{q})$ (Rücktransformation, Rekonstruktion)

Bsp.: $f(q) = aq^2$ mit $a > 0$

$g(p) = pq - f(q)$ mit $p = \frac{df}{dq} = 2aq$

$\hookrightarrow q = \frac{p}{2a}$

$\Rightarrow g(p) = \frac{p^2}{2a} - a\left(\frac{p}{2a}\right)^2 = \frac{p^2}{4a}$

Legendre-transformierte von $g(p)$:

$h(q) = qp - g(p)$ mit $q = \frac{dg}{dp} = \frac{p}{2a}$

$= aq^2$ Ursprungsfunktion

Warum $g(p) = pq - f(q)$ anstatt $g(p) = f(p)$

z.B. $f(q) = a(q+c)^2$; $p = \frac{df}{dq} = 2a(q+c)$

$\hookrightarrow q = \frac{p}{2a} - c$

mit $g(p) = f(p) = \frac{p^2}{4a}$

$\hookrightarrow$ Rücktransformation nicht Ursprungsfunktion

aber $g(p) = pq - f(q) = \frac{p^2}{4a} - cp \rightarrow$ Rücktransformation

$\hookrightarrow f(q)$

Hamilton Funktion

$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ i. A. konvexe Funktion von $\underline{\dot{q}}$

$\hookrightarrow$ Hamilton-Funktion = Legendre-transformierte der Lagrange-Funktion bezüglich $\underline{\dot{q}}$

wobei $\underline{\dot{q}} \to \underline{p}$: generalisierte Impulse, kanonische oder konjugierte Impulse

$$\boxed{\begin{aligned} H(\underline{q}, \underline{p}, t) &= \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \end{aligned}}$$ Hamilton-Funktion

auf Phasenraum $(\underline{q}, \underline{p})$; $2n$ dim. Raum

$\underline{p} = \text{grad}_{\dot{q}} \left(L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \right)$ bzw $\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$

kanonisch-konjugierte Impulse

Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus

$\Rightarrow$ Hamilton'sche Gleichungen

mit $$dH = \sum_{i=1}^{n}(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

mit $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$

$$\Rightarrow dH = \sum_{i=1}^{n}(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

mit $H = H(\underline{q}, \underline{p})$

$$\Rightarrow dH = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

damit $$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \qquad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Hamilton-Gleichungen = kanonische Gleichungen das sind 2n Differentialgleichungen 1. Ordnung für 2×n kanonischen Variablen q_i und p_i ($i = 1 \dots n$); diese spannen den 2n-dimensionalen <u>Phasenraum</u> auf

Bedeutung von H?

wie gezeigt: $H = T + V$ Gesamtenergie des Systems falls nur skleronome Zwangsbedingungen vorliegen und System konservativ, d.h. $V = V(\underline{q})$

z.B. $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})$

$\leadsto H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{x})$: Gesamtenergie mit $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$ Impuls

- zeitliche Änderung von H

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Poisson-Klammer $\{H, H\}$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{d.h. wenn } \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow H = \text{Bewegungsintegral}$$

- wenn q_k zyklische Koordinate:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \dot{p}_k = 0$$

$\Rightarrow p_k = \text{const.}$ d.h. keine Variable

mit $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow H$ nicht von q_k abhängig

↳ Elimination von zwei Variablen q_k, p_k

- Bsp

1) Harmonischer Oszillator / Federpendel

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \; ; \; \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \; ; \; \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = E$ = konst. Gesamtenergie

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2E/m\omega^2} + \frac{p^2}{2mE} = 1$$

Ellipse im Phasenraum mit $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$; $b = \sqrt{2mE}$

kanonische Gleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

2) Teilchen im E-M-Feld mit Ladung e

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - e\left(\phi(\vec{x}) - \vec{A}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}\right) \; ;$$

ϕ : el. Potential

$\vec{A}$: Vektorpotential

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + e\vec{A}$$

kanonisch-konjugierte Impuls $\neq$ mechanischer Linearimpuls

$$H = \dot{\vec{x}}\vec{p} - L = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\phi$$

(in QM : $H \to \hat{H}$: Hamilton-Operator)

mit $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H$ = Bewegungsintegral

Hinweis: H in verschiedenen Koordinatensystemen ohne Zwangsbedingungen mit $V = V(\vec{x})$

- kartesisch: $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$; $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ mechanischer Linearimpuls

- Zylinderkoordinaten: (ρ, φ, z)

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 + p_z^2\right) + V(\rho, \varphi, z)$$

$$p_\rho = m\dot{\rho} \; ; \; p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} \; ; \; p_z = m\dot{z}$$

$\neq$ mechanische Linearimpulse

- Kugelkoordinaten: (r, Θ, φ)

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\Theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta} p_\varphi^2\right) + V(r, \Theta, \varphi)$$

$$p_r = m\dot{r} \; ; \; p_\Theta = m r^2 \dot{\Theta} \; ; \; p_\varphi = m r^2 \sin^2\Theta \, \dot{\varphi}$$

Hamilton-Gleichungen aus Variationsprinzip / Prinzip der kleinsten Wirkung

mit $L = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p})$

mit $\underline{q}$ und $\underline{p}$ unabhängige Variablen

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt\, L = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}) \right)$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

mit $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$ und $\int dt\, p_i \delta \dot{q}_i \overset{\text{p.I.}}{=} - \int dt\, \dot{p}_i \delta q_i$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{i=1}^{n} \left(\delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}} \quad \text{und} \quad \boxed{\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

da q_i und p_i unabh. voneinander

Fermatsche Prinzip

für konservatives System $H = T + V = \text{const}$
gilt (Satz)

$$\Delta S' = \Delta \int_{t_A}^{t_E} dt \, \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} = 0$$

wobei $\Delta q = \delta q + \dot{q} \Delta t$

vgl. virtuelle Verrückung
$\delta t = 0 \Rightarrow$ alle Testbahnen
haben gleiche Laufzeit

hier: unterschiedliche Laufzeiten der Testbahnen
möglich

für kräftefreie Bewegung:

$V = \text{const} \Rightarrow T = \text{const.} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = 2T$

mit $\Delta S' = 2T \Delta \int_{t_A}^{t_E} dt = 0$

$\Rightarrow$ Bahn mit minimaler
Laufzeit wird
realisiert

$\Rightarrow$ Fermat'sche Prinzip (vgl. Optik) für kräftefreie Bewegung : $v = \text{const}$ (Geschw.)

$$dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow \Delta S' = 0 = \frac{2T}{v} \Delta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

$\Rightarrow$ zugleich extremale (minimale) Wegstrecke

= Geodäte

Poisson-Klammern

nützliches mathematisches Werkzeug: z.B. kompakte Darstellung der Bewegungsgleichungen

Vorbemerkung: (mechanische) Systeme beschrieben in unterschiedlichen Darstellungsräumen:

1) Konfigurationsraum : $\underline{q} = (q_1 \dots q_n)$; Dim $= n$

(generalisierte) Koordinaten

2) Ereignisraum : $\underline{q} + t = $ Zeit ; Dim $= n+1$

(Ereignis-)Bahnen bestimmt durch $2n$ Anfangsbedingungen, z.B $\underline{q}(t_A)$ und $\underline{q}(t_E)$ oder

$\underline{q}(t_0)$ und $\underline{\dot q}(t_0)$ Orte und Geschwindigkeiten (*)

Lagrange - Formalismus

$\Leftrightarrow$ Ereignisraum

(*) + Euler-Lagrange-Gleichungen
(DGLs 2. Ordnung)

3) Phasenraum: $(\underline{q}, \underline{p})$ Dim = 2n

mit $\underline{q} = (q_1 \dots q_n)$; $\underline{p} = (p_1 \dots p_n)$

$\underline{p}$ und $\underline{q}$ gleichberechtigte Variablen

$$\underline{\pi} = (\pi_1 \dots \pi_{2n}) = (q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$$

Menge aller Punkte, die im Phasenraum $\underline{\pi}$ durchlaufen werden: Phasenbahn, Phasentrajektorie

z.B. harmonischer Oszillator:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\omega^2} = 1 \qquad \text{Ellipse}$$

4) Zustandsraum:

Phasenraum + Zeit t ; Dim $= 2n+1$

$(\underline{\pi}, t)$: allgemeinster Darstellungsraum, andere Räume sind Projektionen aus Zustandsraum (z.B. Konfigurationsraum)

Bahnen durch Hamilton Bewegungsgleichungen im Zustandsraum (= Phasentrajektorien)

DGLs 1. Ordnung $\Rightarrow$ bestimmt für alle Zeiten durch

$$\underline{\pi}(t_0) = \underline{\pi}_0$$

Hamilton-Formalismus $\Leftrightarrow$ Zustandsraum

<u>Poisson-Klammern</u>

zur Formulierung von Bewegungsgleichungen und Erhaltungsgrößen betrachte Funktionen auf Zustandsraum (z.B. Hamilton-Funktion)

$$f(\underline{\pi}, t) = f(\underline{q}, \underline{p}, t)$$

mit $\frac{d}{dt} f = \sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{\text{Poisson-Klammer } f \text{ mit } H:\ \{f, H\}_{\underline{q}, \underline{p}}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Def.: $f(\underline{q}, \underline{p})$ und $g(\underline{q}, \underline{p})$ Funktionen von $\underline{q}, \underline{p} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\{f, g\}_{\underline{q}, \underline{p}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)}$$

Poisson-Klammer f mit g

d.h. zeitliche Änderung von f entlang Bewegungsbahn = Zustandsraum

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Bsp.: $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{p_i}{m}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x})$$

insbesondere:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad ; \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

Fundamentalen Poisson-klammern

$$\{q_i, q_j\} = 0 \qquad \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0 \right)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=}^{n} \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}$$

Poisson-Klammern <u>unabhängig</u> von der Wahl der kanonischen Variablen:

kanonisch-konjugierte Variablen erfüllen fundamentale Poissonklammern, d.h. wenn Transformation

$$\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, \underline{p}, t) \quad \text{und} \quad \underline{P} = \underline{P}(\underline{q}, \underline{p}, t) \quad \text{mit}$$

$$\tilde{H}(\underline{Q}, \underline{P}) = H(\underline{Q}, \underline{P}) \quad \text{durch einsetzen}$$

$$= H(\underline{q}, \underline{p})$$

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\} \quad \text{und} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{F, G\}_{\underline{Q},\underline{P}} = \{F, G\}_{\underline{q},\underline{p}}}$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial F(\underline{Q}, \underline{P})}{\partial q_i} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P}{\partial q_i} \right)$$

$$\text{analog} \quad \frac{\partial F(\underline{Q}, \underline{P})}{\partial p_i} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right)$$

$$\{F,G\}_{\underline{q},\underline{p}} = \sum_i \Big[\sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \sum_k \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right)$$

$$- \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial G}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \Big]$$

$$= \sum_{j,k} \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial G}{\partial P_k} - \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial G}{\partial Q_k} \right) \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right)}_{\delta_{jk}}$$

$$= \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial G}{\partial P_j} - \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial G}{\partial Q_j} \right)$$

$$= \{F,G\}_{\underline{Q},\underline{P}}$$

Rechenregeln:

$$\{f,g\} = -\{g,f\} \quad ; \quad \{f,f\} = 0$$

linear:

$$\{\alpha f_1 + \beta f_2, g\} = \alpha\{f_1,g\} + \beta\{f_2,g\}$$

Produktregel:

$$\{f, gh\} = g\{f,h\} + \{f,g\}h$$

Jacobi-Identität:

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

(zyklische Vertauschung)

Konstante der Bewegung

$F(\underline{q}, \underline{p}, t)$ Konstante der Bewegung

$$\frac{d}{dt}F = 0 = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \{H,F\} = \frac{\partial F}{\partial t}$$ Kriterium für Bewegungsintegral

z.B. Hamilton-Funktion H

$$\frac{d}{dt}H = \{H,H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

d.h. H Bewegungsintegral, wenn H nicht explizit von t abhängig

bei skleronomen Zwangsbedingungen

$H = E$ Gesamtenergie

Poissonscher Satz:

wenn I_1 und I_2 Integrale der Bewegung, dann

$I_3 = \{I_1, I_2\}$ auch Bewegungsintegral

mit

$$0 = \{H,\{I_1,I_2\}\} + \{I_1, \underbrace{\{I_2,H\}}_{-\frac{\partial I_2}{\partial t}}\} + \{I_2, \underbrace{\{H,I_1\}}_{\frac{\partial I_1}{\partial t}}\}$$

verwende:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}$$

$$\Rightarrow 0 = \{H,\{I_1,I_2\}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{I_2,I_1\}$$

$$\Rightarrow \{H,\{I_1,I_2\}\} = \frac{\partial}{\partial t}\{I_1,I_2\}$$

Anmerkung: Ausblick auf QM

Axiomatische Formulierung mit verallgemeinerter Poisson-Klammer

$$\{A,B\} \rightarrow [\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \qquad \text{Kommutatoren}$$

$\hat{A}, \hat{B}$: Operatoren (z.B. Differentialoperatoren, Matrizen)

- Observablen / Meßgrößen : Eigenwerte der Operatoren
- Fundamentalklammern

$$[q_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij} \quad \Rightarrow \text{Heisenbergsche Unschärferelation}$$

$\hbar = h/2\pi$; h : Planck'sches Wirkungsquantum

- Hamilton-Funktion
  ↳ Hamilton-Operator
- Bewegungsgleichung: $\frac{d}{dt}\hat{A} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{H}] + \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}$

Hamilton-Jacobi-Theorie

Lösungen des Systems (Differentialgleichungen) durch geeignete Wahl kanonischen Transformation

Lagrange- und Hamilton-Gleichungen sind form-invariant unter Punkttransformation $\underline{q} \to \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q})$ und mechanische Eichtransformation: $L \to L + \frac{d}{dt} f$

$\left(\to \tilde{H} = H - \frac{\partial f}{\partial t} \right)$

kanonische Phasenraumtransformation

$$\underline{\pi} \longrightarrow \underline{\tilde{\pi}} = \underline{\tilde{\pi}}(\underline{\pi}) \quad \text{bzw} \quad (\underline{q}, \underline{p}) \to (\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}})$$

$$= (\underline{\tilde{q}}(\underline{q}, \underline{p}), \underline{\tilde{p}}(\underline{q}, \underline{p}))$$

kanonisch wenn

kanonischen Gleichungen erhalten bleiben:

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \; ; \quad \dot{\tilde{p}}_i = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}$$

Bemerkung: Bestimmung von $\tilde{H}$ nicht vorgeschrieben

aber $\tilde{H} = H(\underline{q}(\tilde{\underline{q}}, \tilde{p}, t), \underline{p}(\tilde{q}, \tilde{p}, t), t)$

durch Einsetzen: kanonisch im eigentlichem Sinne

Fundamentale Poisson-Klammern erhalten

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = 0 = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} \; ; \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}$$

Bsp.:

1) $\tilde{q}_i = -p_i$ und $\tilde{p}_i = q_i$ "Vertauschung" von q und p

$$\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = H(\tilde{p}, -\tilde{q})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_i} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{p}_i}}_{\delta_{ji}} = \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = \dot{\tilde{q}}_i$$

analog $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = -\dot{\tilde{p}}_i$ kanonische Gleichungen bleiben erhalten

$\rightarrow$ Bedeutung von q und p im Hamilton-Formalismus <u>abstrakt</u>

2) zyklische Koordinaten / Variablen

Transformation möglich, sodaß alle Koordinaten $\underline{q}$ zyklisch?

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \text{const.} \qquad i = 1 \dots n$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i(h_1, \dots, h_n) \quad ; h_i = \text{const}$$

$\hookrightarrow q_i = \text{const.}$; Annahme $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

im Prinzip möglich $\rightarrow$ Hamilton-Jacobi-Theorie

__Erzeugende Funktionen__ der Transformation

für kanonische Transformation $(\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}})$ gilt (Satz)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} + \frac{d}{dt} F_1$$

wobei $F_1 = F_1(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t)$ beliebige Funktion der ursprünglichen $\underline{q}$ und transformierten $\underline{\tilde{q}}$

F_1 : Erzeugende der Transformation

Beweis:

1) modifiziertes Hamilton-Prinzip erfüllt:

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \right)$$

↳ kanonische Gleichungen

– Bestimmung von $\tilde{H}(\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}}, t)$ aus F_1 :

$$dF_1 = dF_1(q, \tilde{q}, t) = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} d\tilde{q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

und $dF_1 = \sum_i (p_i dq_i - \tilde{p}_i d\tilde{q}_i) + (\tilde{H} - H) dt$

aus Koeffizientenvergleich:

$$\boxed{p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}} \; ; \; \boxed{\tilde{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i}} \; ; \; \boxed{\tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \tilde{H}(\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}}, t) = H(\underline{q}, \underline{p}, t) + \frac{\partial F_1(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t)}{\partial t}$$

Bemerkung: F_1 bestimmt Phasentransformation vollständig

aus $p_i = p_i(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t) = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \rightarrow \underline{\tilde{q}} = \underline{\tilde{q}}(\underline{q}, \underline{p}, t)$

durch Umkehrung

in $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t) = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i}$

$\hookrightarrow \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\underline{q}, \underline{p}, t)$

mit

$$S' = \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}, t) \right) = \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H}(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t) + \frac{d}{dt} F_1 \right)$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} \right) + F_1(q_E, \tilde{q}(t_E), t_E) - F_1(q_A, \tilde{q}(t_A), t_A)$$

$$\Rightarrow \delta S' = \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i \left(\dot{\tilde{q}}_i \delta \tilde{p}_i + \tilde{p}_i \delta \dot{\tilde{q}}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \delta \tilde{q}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \delta \tilde{p}_i \right)$$
$$+ \delta \left[F_{1,E} - F_{1,A} \right]$$

mit $\int dt\, \tilde{p}_i \delta \dot{\tilde{q}}_i = \int dt\, \tilde{p}_i \frac{d}{dt} \delta \tilde{q}_i = - \int dt\, \dot{\tilde{p}}_i \delta \tilde{q} + \tilde{p}_i \delta \tilde{q} \Big|_{t_A}^{t_E}$

beachte: $\delta \tilde{q}_i (t_{A,E}) \neq 0$

da $\tilde{q}_i (t_{A,E}) = \tilde{q}_i (\underline{q}_{A,E}, p(t_{A,E}), t_{A,E})$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i \left[\left(\dot{\tilde{q}}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \right) \delta \tilde{p}_i - \left(\dot{\tilde{p}}_i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \right) \delta \tilde{q}_i \right]$$

$$+ \sum_i \underbrace{\left(\tilde{p}_i + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \right)}_{=0} \delta \tilde{q}_i \quad ; \quad \delta \left[F_{1,E} - F_{1,A} \right] = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \Big|_{t_A}^{t_E} \delta \tilde{q}_i$$

$\overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}} \; ; \; \boxed{\dot{\tilde{p}}_i = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}}$$

d.h. kanonische Gleichungen

$\hat{=}$ kanonische Transformation

Bsp.: Harmonischer Oszillator

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2$$

wobei: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ Feder

$= \frac{g}{\ell}$ Pendel

mit $F_1(q,\tilde{q}) = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \cot \tilde{q}$

(motiviert durch Vereinfachung)

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m \omega_0 q \cot \tilde{q}$$

$$\tilde{p} = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}} = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 \tilde{q}}$$

$$q = \sqrt{\frac{2\tilde{p}}{m\omega_0}} \sin \tilde{q} \quad ; \quad p = \sqrt{2\tilde{p} m \omega_0} \cos \tilde{q}$$

mit $\tilde{H}(\tilde{q},\tilde{p},t) = H(q(\tilde{q},\tilde{p},t), p(\tilde{q},\tilde{p},t),t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$

$= H(q,p)$

$= \tilde{p}\omega_0 \cos^2 \tilde{q} + \tilde{p}\omega_0 \sin^2 \tilde{q}$

$= \tilde{p}\omega_0$ nur von $\tilde{p}$ abhängig

$$\dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = 0 \quad = \tilde{p} = \tilde{p}_0$$

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = \omega_0 \rightarrow \tilde{q} = \omega_0 t + \tilde{q}_0$$

$$\rightarrow \quad q(t) = \sqrt{\frac{2\tilde{p}_0}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + \tilde{q}_0)$$

$$p(t) = \sqrt{2\tilde{p}_0 m\omega_0} \cos(\omega_0 t + \tilde{q}_0)$$

$\Rightarrow$ Problem sehr vereinfacht durch passende Transformation

aber: Bestimmung der Erzeugende?

$\hookrightarrow$ Aufgabe der Hamilton-Jacobi-Theorie

<u>Weitere Erzeugende</u>

$$F_1 = F_1(q, \tilde{q}, t)$$

$$F_2 = F_2(q, \tilde{p}, t)$$

$$F_3 = F_3(p, \tilde{q}, t)$$

$$F_4 = F_4(p, \tilde{p}, t)$$

Bestimmung der Erzeugenden F_2, F_3, F_4 durch Legendre-Transform.

$$\boxed{F_2 = F_2(q, \tilde{p}, t)}$$

$$F_2(q,\tilde{p},t) = F_1(q,\tilde{q},t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i}\tilde{q}_i = F_1(q,\tilde{q},t) + \sum_i^n \tilde{p}_i \tilde{q}_i$$

mit $dF_1 = \sum_i^n (p_i\, dq_i - \tilde{p}_i\, d\tilde{q}_i) + (\tilde{H} - H)\, dt$

$$dF_2 = dF_1 + \sum_{i=1}^{n} (\tilde{p}_i\, d\tilde{q}_i + \tilde{q}_i\, d\tilde{p}_i) = \sum_{i=1}^{n} (p_i\, dq_i + \tilde{q}_i\, d\tilde{p}_i) + (\tilde{H} - H)\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}} \; ; \; \boxed{\tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i}} \; ; \; \boxed{\tilde{H} - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}}$$

F_2 erzeugt kanonische Transformation

↳ zu zeigen aus modifizierten Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta S = 0 = \delta \int dt\, (\tilde{p}\dot{\tilde{q}} - \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t))$$

$$\boxed{F_3 = F_3(p, \tilde{q}, t)}$$

$$= F_1 - \sum \frac{\partial F_1}{\partial q_i} q_i$$

$$\boxed{q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}} \quad ; \quad \boxed{p_i = -\frac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}_i}} \quad ; \quad \boxed{\tilde{H} - H = \frac{\partial F_3}{\partial t}}$$

$$\boxed{F_4 = F_4(p, \tilde{p}, t)}$$

$$= F_1 - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} q_i - \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \tilde{q}_i \right) = F_1 - \left(\underline{p} \cdot \underline{q} + \underline{\tilde{p}} \cdot \underline{\tilde{q}} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}} \quad ; \quad \boxed{\tilde{q}_i = \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{p}_i}} \quad ; \quad \boxed{\tilde{H} - H = \frac{\partial F_4}{\partial t}}$$

Zusammenfassung (z.B. Nolting)

	$\tilde{q}$	$\tilde{p}$
q	$F_1(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t)$ $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$; $\tilde{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i}$	$F_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t)$ $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$; $\tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i}$
p	$F_3(\underline{p}, \underline{\tilde{q}}, t)$ $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$; $\tilde{p}_i = -\frac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}_i}$	$F_4(\underline{p}, \underline{\tilde{p}}, t)$ $q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$; $\tilde{q}_i = \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{p}_i}$

Bsp.: 1) Punkttransformation

mit $F_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\underline{q}, t)\, \tilde{p}_i$

$$\tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} = f_i(\underline{q}, t)$$

Punkttransformation im Konfigurationsraum

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \tilde{p}_j \rightarrow \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\underline{q}, \underline{p}, t)$$

kanonisch konjugierte Impulse durch Reichtransformation

z.B. Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = f_r$$

$$\varphi = \arctg(y/x) = f_\varphi$$

$$p_x = \frac{\partial f_r}{\partial x} p_r + \frac{\partial f_\varphi}{\partial x} p_\varphi = \frac{x}{r} p_r - \frac{y}{r^2} p_\varphi$$

$$p_y = \frac{\partial f_r}{\partial y} p_r + \frac{\partial f_\varphi}{\partial y} p_\varphi = \frac{y}{r} p_r + \frac{x}{r^2} p_\varphi$$

$$\Rightarrow p_r = \frac{x p_x + y p_y}{r} \; ; \; p_\varphi = x p_y - y p_x$$ Drehimpuls

2) mechanische Eichtransformation

mit $f(\underset{\sim}{q}, t)$ Eichfunktion

$$\tilde{H} = H - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{aus} \quad \tilde{L} = L + \frac{df}{dt}$$

$$\Rightarrow q_i = \tilde{q}_i \quad \text{und} \quad \tilde{p}_i = p_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

Konstruktion der Erzeugenden aus Legendre-Transformation:

$$F_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t) = \sum_{i=1}^{n} q_i \tilde{p}_i - f(\underline{q}, t)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} = q_i \quad \text{und} \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \tilde{p}_i - \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Phasentransformation kanonisch wenn fundamentale Poisson-Klammern erfüllt sind

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = 0 = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} \quad ; \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}$$

Hamilton-Jacobi-Gleichungen

Motivation: Vereinfachung des Systems (Hamilton-Funktion, Differentialgleichungen) durch geeignete Transformation:

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = 0 \quad \Rightarrow \underline{\tilde{q}} = \text{const}$$

$$\dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = 0 \quad \Rightarrow \underline{\tilde{p}} = \text{const}$$

triviale Lösungen der Differentialgleichungen

mögliche Erzeugende: $F = F_2 = F_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t)$

(andere Erzeugende auch möglich)

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad ; \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} = \text{const}$$

in (*)

$$\boxed{H\left(q_1 \ldots q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0}$$

Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

Bestimmungsgleichung für Erzeugende F_2

Bemerkungen:

- Hamilton-Jacobi-Gleichung
  - nicht-lineare, partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für F_2 mit $n+1$ Variablen $(q_1 \dots q_n, t)$

  nicht-linear: H i. A. quadratische Funktion der Impulse p

  1. Ordnung: nur $\partial F_2/\partial q_i$ und $\partial F_2/\partial t$ treten auf

- mit $n+1$ Ableitungen 1. Ordnung:

  $n+1$ Integrationskonstanten: $c_1 \dots c_n, c_t$

  für Lösung:

  $$F_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t \,|\, c_1 \dots c_n) + c_t$$ vollständige Lösung

  aber H hängt nur von Ableitungen von F_2 ab $\Rightarrow c_t = 0$ o. B. A.

- konstante Impulse

  $\underline{\tilde{p}}$: unbestimmt

  daher möglich $\tilde{p}_i = c_i$

$\Rightarrow$ vollständige Lösung für F_2

$$F_2(\underline{q}, t \,|\, \underline{c}) \quad ; \quad \underline{c} = (c_1 \dots c_n) \text{ Konstanten}$$

- Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung ist die Wirkung S der zugehörigen Hamilton-Funktion

$$F_2 = S$$

$$\frac{d}{dt} F_2 = \sum_{i=1}^{n} (p_i \dot{q}_i + \tilde{q}_i \dot{\tilde{p}}_i) + \tilde{H} - H$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \qquad (\dot{\tilde{p}} = 0 \; ; \; \tilde{H} = 0)$$

$$= L$$

$\Rightarrow$ $F_2 = \int dt \, L = S$ im Hamilton-Jacobi-Formalismus

$\Rightarrow$ "physikalische Bedeutung"

Lösungsmethode mit der Hamilton-Jacobi-Theorie

1) Hamiltonfunktion $H = H(\underline{q}, \underline{p}, t)$ aufstellen

2) kanonische Impulse

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$ durch partielle Ableitungen ersetzen

3) Lösen der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

$$F_2 = S(\underline{q}, t \,|\, \underline{c}) \; ; \; \underline{c} = (c_1 \ldots c_n)$$ Integrationskonstanten

wobei $\underline{\tilde{p}} = \underline{c}$ konstante "neue" Impulse

4) Berechnung der generalisierten Koordinaten

$$\tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial S}{\partial c_i} = \tilde{q}_i(\underline{q}, t \,|\, \underline{c}) = \underline{\alpha} = \text{const.}$$

$$\left(\text{aus } \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = 0\right)$$

und nach $\underline{q}$ auflösen

$$\underline{q} = \underline{q}(\underline{\tilde{q}}, t \,|\, \underline{c}) = \underline{q}(t \,|\, \underline{\alpha}, \underline{c})$$

5) Berechnung der generalisierten Impulse

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i\left(\underline{q}(t \,/\, \underline{\alpha}, \underline{c})\right) = p_i(t \,/\, \underline{\alpha}, \underline{c})$$

6) Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = t_0$

$$q(t_0 \,/\, \underline{\alpha}, \underline{c}) \;; \quad p(t_0 \,/\, \underline{\alpha}, \underline{c})$$

liefert $\underline{\tilde{q}}_0$ und $\underline{\tilde{p}}_0 \to \underline{\alpha}, \underline{c}$

7) einsetzen in $\underline{q}$ und $\underline{p}$ liefert vollständige Lösung

$$(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = \underline{\pi}(t)$$

__Bsp.:__ Harmonischer Oszillator (1D)

1) $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega_0^2 m q^2$

2) $p = \partial F_2/\partial q = \partial S/\partial q$

$$H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t}$$

3) Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung

hier Separationsansatz:

$$S(q,t|\tilde{p}) = W(q|\tilde{p}) + V(t|\tilde{p})$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega_0 q^2 = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

W und V sind unabhängig; abh. von unabhängigen Variablen (hier: $W(q)$; $V(t)$)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 q^2 = c$$

$$\frac{dV}{dt} = -c$$

zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$\rightarrow \quad V(t|c) = -ct + V_0 \quad ; \quad V_0 = 0 \quad$ o. B. A

$$\frac{dW}{dq} = \sqrt{m^2\omega_0^2\left(\frac{2c}{m\omega_0^2} - q^2\right)}$$

$$\rightsquigarrow W(q|c) = m\omega_0 \int dq \sqrt{\frac{2c}{m\omega_0^2} - q^2}$$

$$= m\omega_0 \left[\frac{1}{2} q \sqrt{\frac{2c}{m\omega_0^2} - q^2} + \frac{c}{m\omega_0^2} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2c}}\right)\right]$$

$$\to S(q,t\,|\,c) = m\omega_0 \left[\frac{1}{2} q \sqrt{\frac{2c}{m\omega_0^2} - q^2} + \frac{c}{m\omega_0^2} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2c}}\right)\right] - ct$$

4)

$$\tilde{q} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}} = \frac{\partial S}{\partial c} = \frac{\partial W}{\partial c} + \frac{\partial V}{\partial c}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\omega_0} \int dq \left(\frac{2c}{m\omega_0^2} - q^2\right)^{-1/2}}_{\frac{1}{\omega_0} \arcsin\left(q\omega_0 \sqrt{\frac{m}{2c}}\right)} - t$$

$$= \frac{1}{\omega_0} \arcsin\left(q\omega_0\sqrt{\frac{m}{2c}}\right) - t$$

$$= \alpha = \text{const.}$$

Dimension: Zeit

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{2c}{m\omega_0^2}} \sin\left(\omega_0(t+\alpha)\right) = q(t\,|\,\alpha, c)$$

5) $$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = m\omega_0 \sqrt{\frac{2c}{m\omega_0^2} - q^2}$$

$$= \sqrt{2cm}\cos\left(\omega_0(t+\alpha)\right)$$

$$= p(t\,|\,\alpha, c)$$

6) Anfangsbedingungen : $t_0 = 0$; $p_0 = 0$: $q_0 \neq 0$

$$0 = \frac{2c}{m\omega_0^2} - q_0^2 \Rightarrow c = \frac{1}{2} m\omega_0^2 q_0^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_0^2 q^2 = E$$

$\Rightarrow \tilde{p} = c = E$: Gesamtenergie

mit $[\tilde{q}]$ = Zeit

$\Rightarrow$ E und t sind kanonisch-konjugierte Variablen

(vgl. $[E, t] = i\hbar$ $\hat{=}$ Heisenbergsche Unschärferelation)

$$\text{mit } \alpha = \frac{1}{\omega_0}\arcsin\sqrt{\frac{m\omega_0^2 q_0^2/2}{E}} = \frac{1}{\omega_0}\arcsin(1) = \frac{\pi/2}{\omega_0}$$

7) vollständige Lösung

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\tilde{E}}{m\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t) \;;\; p(t) = -\sqrt{2\tilde{E}m}\, \sin(\omega_0 t)$$

Bemerkung:

$F_1(q, \tilde{q}) = \frac{1}{2} m\omega_0 q \cot(\tilde{q})$ kann Legendre-Transformation aus $F_2(q, \tilde{p})$ gewonnen werden

Hamiltonsche charakteristische Funktion

Separationsansatz für F_2 (in Hamilton-Jacobi-Gleichung) sinnvoll, wenn

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H \text{ : Integral der Bewegung}$$

$$H\left(\underline{q}, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$ Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\Rightarrow S(\underline{q}, \tilde{\underline{p}}, t) = W(\underline{q} \,|\, \tilde{\underline{p}}) - E t$$ Separationsansatz

$$\Rightarrow H\left(\underline{q}, \frac{\partial W}{\partial q_1} \dots \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = E$$ Gesamtenergie für skleronome Zwangsbed.

$W(\underline{q} / \underline{\tilde{p}})$: Hamiltonsche charakteristische Funktion

$\hat{=}$ Erzeugenden einer kanonischen Transformation im engeren Sinne mit

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad ; \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial W}{\partial \tilde{p}_i}$$ durch Einsetzen :

$$\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p})$$