

Theoretische Physik I

001

Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Teil I Theoretische / klassische / analytische Mechanik

Motivation:

- tieferes Verständnis der Newtonschen Mechanik
- verschiedene (mathematische) Grundkonzepte
 - ↳ Anwendung auf unterschiedliche Bereiche
 - z.B. E-Dynamik, QM, ART aus Variationsprinzip

1) Newtonsche Mechanik

Newtonsche Axiome

- 1) kräftefreien Körper (Masse) bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit

2) Kraft gleich Masse mal Beschleunigung

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \frac{\vec{v}}{t}$$

3) Actio = Reactio : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

⇒ Newtonsches Weltbild (Weltbild der nicht-relativistischen klassischen Mechanik) :

- Materie : läßt sich durch (unzerstörbare) Massenpunkte eindeutig beschreiben
- Zeit : eindimensionaler Parameter zur Beschreibung von Bahnen / Trajektorien :
passiv, unbeeinflussbar
- Raum : 3D "Bühne" der Physik
unveränderlich, Beschreibung mit Koordinaten
(z.B. kartesisches Koordinatensystem)

↳ Raum + Zeit sind absolut

- Bewegungen sind deterministisch

=> Limitierungen:

- Elementarteilchen sind ununterscheidbar
- QM: nicht deterministisch $\rightarrow$ probabilistisch
u.a. Unschärfrelation
- SRT: Zeit ist abhängig von Relativbewegung
- ART: Raum + Zeit werden durch Materie / Energie
gekrümmt

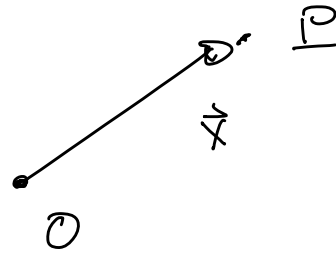
$\hookrightarrow$ nicht absolut, sondern dynamisch (z.B. GW)
Inhalt hat Einfluß auf "Büchse"

"Mathematisierung"

Zeit: $t \in \mathbb{R}$; Einheit Sekunde [s]

Raum: Beschreibung mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x, y, z)$
Dimension $|\vec{x}|$; Einheit Meter [m]

z.B. kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung
in O



Änderung des Bezugssystems: "Beobachterwechsel"

a) Translation: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$

b) Rotation: $\vec{x}' = R \vec{x}$; R : Rotationsmatrix
(orthogonal: $R^T R = \mathbb{1}$)

=> Gruppe Koordinatentransformationen:

Euklidische Gruppe

auch allgemein: Koordinatentransformation: Verwendung einer
anderen "Karte"; z.B. Kugelkoordinaten $\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \varphi)$
wobei $|\vec{x}| = \text{Länge}$ aber $\theta, \varphi = \text{Winkel}$

Inertialsystem

Inertiales Koordinatensystem, in dem keine äußeren Kräfte wirken und es gilt

$$\vec{a} = 0$$

Postuliertes Koordinatensystem: Beschreibt Klasse von Koordinatensystemen, die durch die Euklidische Gruppe + GeschwindigkeitsTransformation ineinander überführt werden kann: Galilei-Gruppe

Transformation: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{b} - \vec{v}t$; $\vec{b}, \vec{v} = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}}' = 0 = \ddot{\vec{x}}$$

Galileische Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Alle physikalischen Gesetze sind dort gleich. ("Physik" im fahrenden Zug = "Physik" im ruhenden System)

Newtonsches Determiniertheitsprinzip

für jedes System mit N Massenpunkten sind die Bahnen vollständig bestimmt (determiniert) wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt alle Orte und Geschwindigkeiten gegeben sind, d. h. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \dots, \dot{\vec{x}}_N)$ gegeben
 Newtonsche Bewegungsgleichung

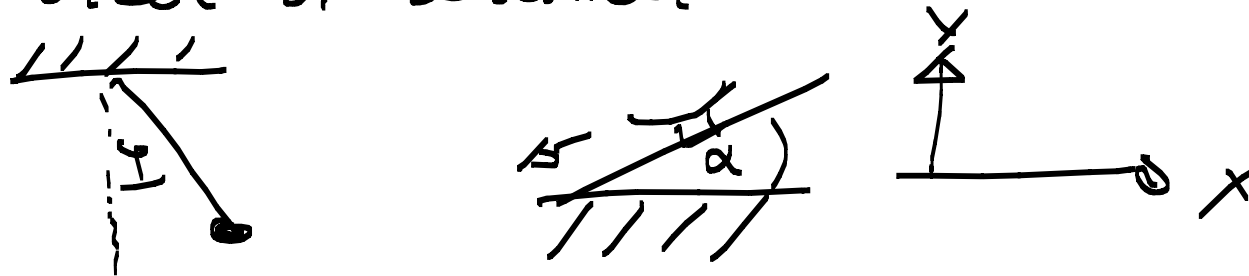
$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i \quad \Rightarrow \text{Anfangswertproblem}$$

Lagrange-Mechanik

- Newtonsche Mechanik
Bahnen/Trajektorien bestimmt durch Bewegungsgl.
+ Anfangswerte
- Lagrange-Mechanik
Bahnen bestimmt durch "Randwerte" (auch z.B.
kürzeste Strecke)

Zwangsbedingungen

Systeme oft eingeschränkt (geometrische Bedingungen)
z.B. Pendel o. Schlitten



Zwangskräfte i. d. nicht (im Detail) bekannt
(z.B. Auftriebskraft o. Fadenspannung)

Formulierung mit

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{Z}_i \leftarrow \text{Zwangs Kraft}$$

schwierig

- Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$

nicht unabhängig

z.B. Bahn auf schiefer Ebene: $y = \tan \alpha \cdot x$

Terminologie / Klassifizierung von Zwangsbedingungen

- holonome Zwangsbedingung

$$f(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{d.h. Formulierung mit Gleichung möglich}$$

$$\text{z.B. } y - \tan \alpha \cdot x = 0$$

- nicht-holonome Zwangsbedingungen
Formulierung mit Gleichung nicht möglich
Elimination von redundanten Koordinaten nicht möglich
z.B. Teilchen in Hohlkugel: $|\dot{\vec{x}}| \leq R$

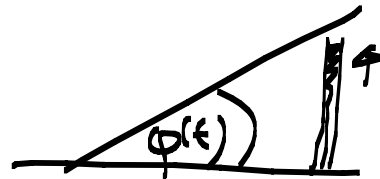
- skleronome ZB
zeitunabhängige Zwangsbedingungen
 $f(\vec{x}) = 0$ holonome-skleronome ZB

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

- rheonome ZB: $f(\vec{x}, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$$

z.B. schiefe Ebene zeitabhängig



Holonome Zwangsbedingungen

010

Freiheitsgrade für Systeme ohne zB

$3N$ für N Teilchen

mit p holonome zBs: Reduktion der Freiheitsgrade

$$f = 3N - p$$

$\Rightarrow$ Beschreibung mit f generalisierten Koordinaten

$q_1, q_2, \dots, q_f$ möglich

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$$

q_i unabhängig von einander; d.h. $f(q_1, q_2, \dots, q_f) = 0$

kann nicht mehr formuliert
werden

bilden Konfigurationsraum mit einem
 f -dimensionalen Konfigurationsvektor $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

⇒ generalisierte Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$$

mit Anfangswerte bei t_0 : $q(t_0) = \underline{q}_0$ und $\dot{q}(t_0) = \underline{\dot{q}}_0$

System mit Bewegungsgleichungen (müssen noch bestimmt werden) bestimmt

Bem.: q_i nicht eindeutig ; unterschiedliche generalisierte Koordinaten möglich

q_i : nicht notwendigerweise Längen
(z.B. Winkel)

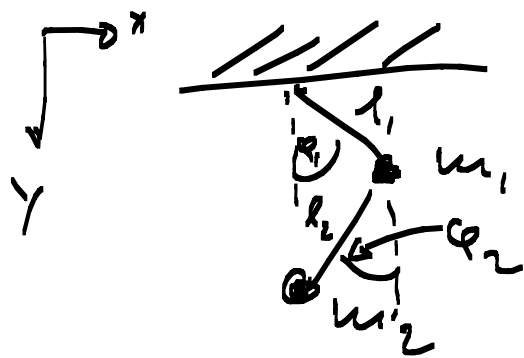
z.B. • Teilchen auf Kugeloberfläche fixiert; Radius R

$$\text{Zwangsbedingung : } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

so mögliche generalisierte Koordinaten :

θ : Polarwinkel ; φ : Azimut-Winkel

- Doppelpendel in der Ebene



2-Körper Problem:

ursprünglich 6 Freiheitsgrade
4 holonome Zwangsbedingungen

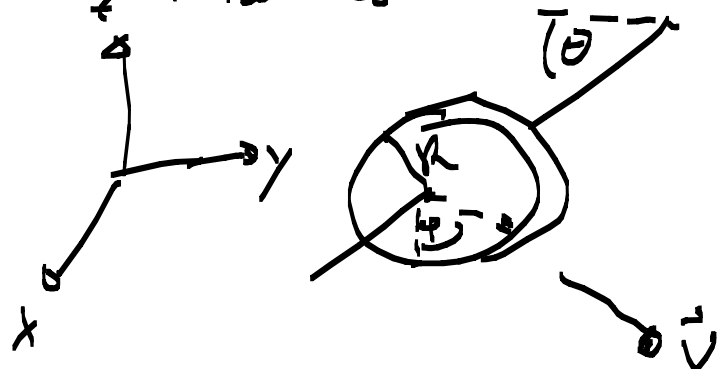
$$z_1 = 0 = z_2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

- Bsp.: nicht-holonome Zwangsbedingung

z. rollendes Rad



Beschreibung des Systems
mit "Auflagepunkt" in der
(x, y) Ebene und Winkel
(phi, theta) : 4 Freiheitsgrade
(ignoriere z = 0)

holonome Zwangsbedingungen möglich?

Wahrheit: Koordinaten sind unab. v. einander

formal: "Rollen":

Geschwindigkeit Achse $(\dot{x}, \dot{y})$

= Geschwindigkeit Rad

v-Rad: $v = R\dot{\varphi}$

Richtung: $\begin{pmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \dot{x} = v \cos \Theta = R\dot{\varphi} \cos \Theta \Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R \cos(\Theta(t))$$

$$\dot{y} = v \sin \Theta = R\dot{\varphi} \sin \Theta \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} = R \sin(\Theta(t))$$

nicht integrierbar, da $\Theta(t)$ unbekannt (hier:
keine Bestimmungsgleichung für $\Theta(t)$)

d'Alembert Prinzip

Ziel: Aufstellen der Bewegungsgleichungen unter
 Einbeziehung der Zwangsbedingungen
 ↳ differentielle Formulierung der Lagrange -
 Mechanik

Def: virtuelle Verschiebung $\delta \vec{x}_i$

infinitesimale Änderung der Orte (Koordinaten) eines
 mechanischen Systems bei festgehaltener Zeit t ,
 die mit den Zwangsbedingungen im Einklang stehen
 (virtuell = willkürlich, d.h. nicht durch physikalische
 Kräfte verursacht)

festgehaltene Zeit: $\delta t = 0$

mit $\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \delta t$$

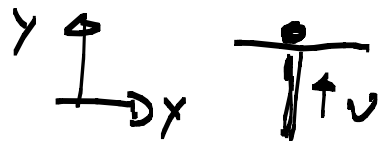
$\delta t = 0 \leftarrow \text{virtuell}$

(Verwendung von δ genau wie Differential)

Anmerkung: für skleronome Zwangsbedingungen:
 $\delta \vec{x}$ real ausführbar

für rheonome zB_s nicht real ausführbar

z.B.



Teilchen im Aufzug

$$d\vec{x} = (dx, dy) = (dx, v dt) \quad \text{reale Verrückung}$$

$$\delta \vec{x} = (\delta x, \delta y) = (\delta x, 0) \quad \text{nicht real durchführbar}$$

Def.: Virtuelle Arbeit

$$\delta W = - \sum_i^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i \quad i = 1, \dots, N \quad \text{Teilchen}$$

$$\text{mit } \vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i \quad \vec{F}_a : \text{äußere Kraft} \\ \vec{Z} : \text{Zwangskraft}$$

mit Newtonsche Bewegungsgl.:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i = m_i \vec{a}_i \quad ; \quad \vec{a}_i = \ddot{\vec{x}}_i$$

$$\text{bzw. } \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i = 0 \quad \text{dynamisches Gleichgewicht}$$

$$\Rightarrow \sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i + \sum_i \vec{Z}_i \delta \vec{x}_i = 0$$

d'Alembert'sche Prinzip: die von den Zwangskräften geleistete virtuelle Arbeit ist null; bzw. Zwangskräfte leisten keine virtuelle Arbeit

$$\boxed{\delta W_z = - \sum_i \vec{z}_i \delta \vec{x}_i = 0}$$

Bem.: skleronome Zwangsbedingungen: Zwangskräfte leisten
keine reale Arbeit

theonom: ... können reale Arbeit leisten

auch d'Alembertsche Prinzip

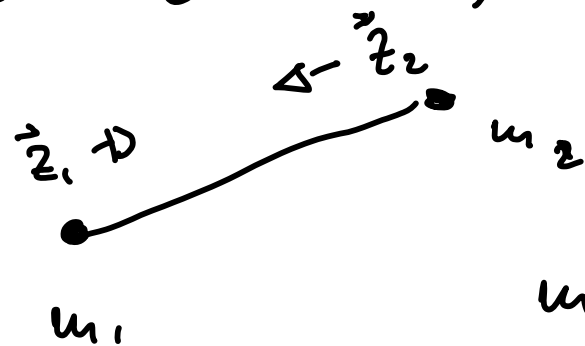
$$\boxed{\sum_i (\vec{F}_{gi} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0}$$

Vorteil: Formulierung ohne (komplizierte) Zwangskräfte

aber: $\delta \vec{x}_i$ nicht unabhängig voneinander.

(z.B. holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{x}) = 0$)

Bsp.: $\delta W = 0$; kräftefreie Hartel



mit Ursprung bei m_1

$$\delta \vec{x}_1 = \delta \vec{s} \quad \text{Verschiebung}$$

m_2 kann relativ zu m_1 rotieren

$$\delta \vec{x}_2 = \delta \vec{s} + \delta \vec{R}$$

d'Alembertsche Prinzip:

$$\delta W_2 = 0 = -\vec{r}_1 \delta \vec{s} - \vec{r}_2 (\delta \vec{s} + \delta \vec{R})$$

$$= - \underbrace{(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)}_{=0} \delta \vec{s} - \underbrace{\vec{r}_2 \delta \vec{R}}_{\vec{r}_2 \perp \delta \vec{R}}$$

$= 0 \Rightarrow$ keine virtuelle (auch keine reale) Arbeit

Ziel: Bewegungsgleichungen mit generalisierten Koordinaten
(unabhängige Koordinaten)

019

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) \quad ; \quad \underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f) \\ \text{Konfig. raum}$$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \left(\text{Einstein Summenkonvention:} \right. \\ \left. \delta \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right)$$

virtuell: $\delta t = 0$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \delta t = 0$$

1. Term aus Summe

$$\sum_i \vec{F}_{a,i} \delta \vec{x}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j$$

$$\text{mit } Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \quad \text{generalisierte} \\ \text{Kraftkomponenten}$$

Bem.: $[Q_j] \neq \text{Kraft i. A.}$

aber $[Q_j q_j] = \text{Energie}$

mit konserativen Kräften

$$\vec{F}_{a,i} = - \vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n); \quad V: \text{Potential}$$

$$= - \sum_j (\vec{\nabla}_i q_j) \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = - \sum_i (\vec{\nabla}_i V) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

2. Term:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i &= \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i,j} m_i \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j} m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} m_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right) \right] \delta q_j$$

$$= \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

mit $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$ kinetische Energie des
N-Teilchen Systems

$$\Rightarrow \left[\sum_{j=1}^f \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \right]$$

d'Alembertsche Prinzip

mit holonomen Zwangsbedingungen

022

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \right] \quad q_j \text{ unabhängig von einander}$$

für konservatives System:

$$V = V(\underline{q}) \text{ unabhängig von } \underline{\dot{q}} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T-V) \right] \delta q_j = 0$$

$$\text{Def.: } \boxed{L = T - V}$$
$$= L(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$$

Lagrange-Funktion

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

holonom + konservativ

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \right)$$

Lagrange - Gleichung

2. Art

Lagrange - Bewegungsgleichung

Vergleich mit Newton:

- Energie (Skalar) vs. Kraft (Vektor)
- keine Zwangskräfte
- invariant unter beliebiger Koordinatentransformation
- Formulierung in rein differentieller Form

Koordinatentransformation:

$$\vec{x} \rightarrow \tilde{\vec{x}} ; \quad \vec{x} = \vec{x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

Beschleunigung: $\ddot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}})$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_j}{dt} \quad (\text{Summenkonvention})$$

$$\ddot{x} = \underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial \tilde{x}_u \partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_u}{dt} \frac{d\tilde{x}_j}{dt}}_{\text{zusätzlicher Term}} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d^2 \tilde{x}_j}{dt^2}$$

zusätzlicher Term $\rightarrow$ Newtonsche Bewegungsgl.
nicht form invariant

$$\vec{F}_i = \tilde{\vec{F}}_j \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \quad \text{allgem. Transformation eines Vektors}$$

Lagrange Gleichung unter Koordinatentransformation

$$\tilde{L}(\underline{\tilde{q}}, \underline{\dot{\tilde{q}}}, t) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$$

Skalar: Wert bleibt
unter Koordinaten-
trafo gleich
(z.B. Temperatur)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$1) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_u} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_u}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_u} \right) \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_u}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_u} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_u}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_u}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \tilde{q}_u}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_n} \right) \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_n} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_n}{\partial q_j}$$

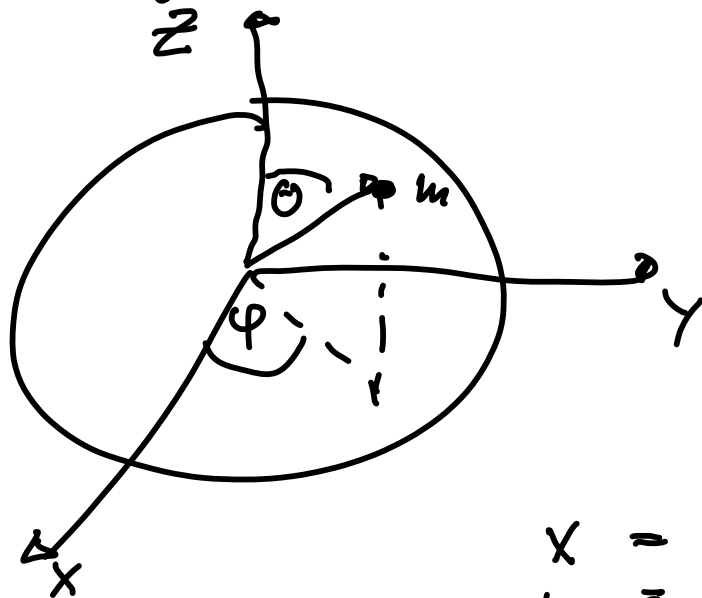
$$2) \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_n} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_n} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_n}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 = \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_n} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_n} \right)}_{=0} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$ Lagrange-Gleichung forminvariant unter Koordinatentransformation. 

Anwendungen

1) Teilchen auf Kugeloberfläche im
Schwerefeld der Erde



Zwangsbedingung: holonom-scleronom
 $r = |\vec{x}| = R$

generalisierte Koordinaten
 Θ : Polarwinkel : q_1

φ : Azimut : q_2

$$\begin{aligned} x &= R \sin \Theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \Theta \sin \varphi \\ z &= R \cos \Theta \end{aligned}$$

Kraft: $\vec{F}_a = -mg \vec{e}_z = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ q_1, q_2

LaSange-Funktion: $L = T - V = L(\Theta, \varphi)$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\Theta}^2 + \sin^2 \Theta \dot{\varphi}^2)$$

V aus generalisierter Kraft:

$$Q_1 = Q_\Theta = \frac{\partial}{\partial \dot{\Theta}} \cdot \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{\Theta}} = -mg(-k \sin \Theta) = mgk \sin \Theta$$

$$Q_2 = Q_\varphi = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \cdot \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

konservative Kraft: $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow V(\Theta) = -\int d\Theta Q_\Theta = -mgk \int d\Theta \sin \Theta = mgk(1 + \cos \Theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{m}{2} k^2 (\dot{\Theta}^2 + \sin^2 \Theta \dot{\varphi}^2) - mgk(1 + \cos \Theta)}$$

Lagrange-Gleichungen / Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = mk^2 \sin \Theta \cos \Theta \dot{\varphi}^2 + mgk \sin \Theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \text{ ist } \underline{\text{zyklische}} \text{ Koordinate} \\ \hookrightarrow \text{Erhaltungsgröße}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = mk^2 \dot{\Theta}$$

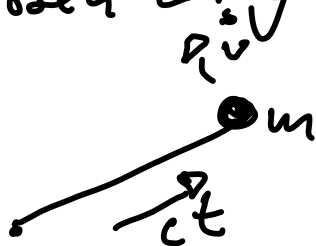
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mk^2 \sin^2 \Theta \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Theta: \ddot{\Theta} - (\cos\Theta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}) \sin\Theta = 0 \\ \varphi: \frac{d}{dt}(\sin^2\Theta \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung} \end{array} \right. \quad \left(\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} \right)$$

Lösung liefert Bahn auf Kugeloberfläche
(nicht trivial, auf $\dot{\varphi} = 0$)

$$\Rightarrow \ddot{\Theta} = \frac{g}{R} \sin\Theta \quad \text{vgl. Pendel} \quad \ddot{\Theta} = -\frac{g}{R} \sin\Theta$$

2) Teilchen an masseloser Stange,
dessen Länge sich linear mit der Zeit ändert



Bewegung nur in $x-y$ -Ebene
 $z = 0$ holonom-scleronom

$$|\vec{x}| = R + ct \quad \text{holonom-rheonom}$$

c : konst. Längenänderung

mit Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos\varphi = (R + ct) \cos\varphi \\ y(t) &= r(t) \sin\varphi = (R + ct) \sin\varphi \end{aligned} \quad ; \quad \varphi_1 = \varphi$$

Lagrange-Funktion: $L = \underline{T} - V$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (c^2 + (l+ct)^2 \dot{\varphi}^2) ; V = 0$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \text{ zyklische Koordinate}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(l+ct)^2 \dot{\varphi} = \text{konst}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 = m(l+ct) ((l+ct) \ddot{\varphi} + 2c \dot{\varphi})$$

Lösung: triviale Lösung $\dot{\varphi} = 0$

$$\text{aus } \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = h \Rightarrow d\varphi = \frac{h/m}{(l+ct)^2} dt$$

$$\hookrightarrow \varphi(t) = -\frac{1}{c} \frac{h/m}{(l+ct)}$$

Verallgemeinerte Potentiale / geschwindigkeitsabhängige Potentiale

030

Lagrange-Gleichung für
holonome Systeme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

auch für nicht
konservative Systeme

mit verallgemeinerte
Potential:

$$U = U(q_j, \dot{q}_j)$$

wenn

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

=> Lagrange-Funktion

$$L = T - U$$

=>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

verallgem. Lagrange-Funktion

Bsp.: Teilchen im Elektromagnetischen Feld
 Kraft: $\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right)$ in Gauß-Einheiten
 031

mit Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad ; \quad \vec{j} : \text{Strom dichte}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

ρ : Ladungsdichte

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} ; \vec{A}$ Vektorpotential

Induktion: $\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$

Lösung: $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

in Lorentzkraft: $\vec{F} = e \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right)$

suche $U(\vec{x}, \vec{v})$ mit $\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{\nabla}_{\vec{v}} U - \vec{\nabla} U$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = e \left(-\vec{\nabla} \left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \right)$$

$$\text{mit } \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} (\vec{A} \cdot \vec{v})$$

$$= e \left(-\vec{\nabla} \left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right)$$

$\Rightarrow$ verallgemeinertes Potential

$$U(\vec{x}, \vec{v}) = e \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \right)$$

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e \left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right)$$

für
Lorentzkraft

Systeme mit Reibung

- meist geschwindigkeitsabhängig

- nicht energieerhaltend

↳ $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ nicht möglich

↳ keine Lagrange-Funktion $L = T - V$

aber $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$

d'Alembertsches Prinzip
für holonome Zwangs-
bedingungen

mit $\vec{F} = \vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)}$

$\vec{F}^{(1)} = -\vec{\nabla}V$ konservativer Anteil

$\vec{F}^{(2)}$: Reibungskraft

↳ $L = T - V$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(2)}$

Beispiel: Reibungskraft $\propto v$: Stokes'sche Reibung
↳ Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

034

$$D = \frac{1}{2} \sum_{e,m} \beta_{em} \dot{q}_e \dot{q}_m ; \beta_{em} \text{ Dissipations-koef. - Tensor}$$

$$\left| \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right| \text{ modifizierte Lagrange-Gleichung}$$

$$\hookrightarrow Q_j^{(2)} = - \sum_{h=1}^f \beta_{jh} \dot{q}_h$$

Energie dissipation

$$\text{Gesamtenergie: } E = T + V = 2T - L$$

mit skleronomen Zwangsbedingungen:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{e,m} \mu_{em} \dot{q}_e \dot{q}_m$$

Konservatives System (bis auf Reibung)

035

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right)$$

$\dot{q}_j$ * Lagrange-Gleichung

$$\dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -2D$$

$$2\dot{T} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

$$\left(\begin{array}{l} \dot{q}_j \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 2D \\ \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T \end{array} \right)$$

$$\text{mit } \dot{L} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_j} \ddot{q}_j \rightarrow \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{L} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

$$\hookrightarrow 2\dot{T} - \dot{L} = -2D$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{E} = -2D}$$

Energie dissipation
bei Reibung

Nicht-holonome Systeme

Lagrange - Multiplikatoren

036

- Zwangsbedingungen in der Form $f(\vec{x}, t) = 0$
nicht möglich

↳ Angabe von unabhängigen generalisierten Koordinaten
nicht möglich

aber: Zwangsbedingungen in differentieller Form
unter Umständen möglich, z.B. "rollende Rad"

⇒ Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

Betrachte System mit $3N$ Freiheitsgraden
($N = \#$ Teilchen)

$\tilde{f}$: Anzahl Zwangsbedingungen, wobei

$f \leq \tilde{f}$: z.B. in differentieller Form:

$$\sum_{m=1}^{3N} g_{im}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dx_m + h_i(x_1, \dots, x_{3N}, t) dt = 0$$

$$i = 1, \dots, f$$

verwendete Anzahl holonomer Zwangsbed. $(\tilde{f} - f)$
 zur Reduktion der Anzahl der Koordinaten:

$$n = 3N - (\tilde{f} - f)$$

↳ verwende n generalisierte Koordinaten: $q_1, \dots, q_n$

$$\Rightarrow \vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

aber q_j nicht unabhängig voneinander
 umschreiben der differentiellen Zwangsbedingungen

$$\sum_{m=1}^n a_{im}(q_1, \dots, q_n, t) dq_m + b_i(q_1, \dots, q_n, t) dt = 0$$

Vergleich mit rein holonomem System

$f = 0$ und es existieren $\tilde{f}$ Gleichungen

$$g_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad i = 1 \dots \tilde{f}$$

$$\Rightarrow dg_i = 0 = \sum_n \frac{\partial g_i}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial g_i}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow a_{in} = \frac{\partial g_i}{\partial q_n} ; b_i = \frac{\partial g_i}{\partial t}$$

partielle Ableitungen
der Zwangsbedingungen

Lagrange-Gleichung für Systeme mit nicht-holonomem
Zwangsbedingungen?

(aber in differentieller Form)

- für virtuelle Verschiebungen ($\delta t = 0$) gilt:

$$\sum_{n=1}^n a_{in} \delta q_n = 0 \quad i = 1, \dots, \tilde{f}$$

- mit Lagrange - Multiplikatoren:

$$\lambda_i \quad ; \quad i = 1, \dots, f$$

unabhängig von q
aber evtl. abhängig
von t

- verwendet für generelle Optimierungsprobleme mit Neben- (Zwangs-) Bedingungen
- müssen noch bestimmt werden:

$$\sum_{i=1}^f \lambda_i \sum_m^n a_{im} \delta q_m = 0$$

- für konservative Systeme:

$$\sum_{m=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right) \delta q_m = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$$

wg. $\tilde{f}$ Zwangsbedingungen: $n - f$ unabh. generalisierte Koordinaten

$q_u : u = 1, \dots, u-f$ unabh.

$q_e : e = u-f+1, \dots, u$ abhängig

mit f Bestimmungsgleichungen für λ_i
(frei wählbar)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L}{\partial q_u} - \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{iu} = 0 \quad ; \quad u = u-f+1, \dots, u$$

$$\Rightarrow \sum_{u=1}^u (\dots) \delta q_u = \sum_{u=1}^{u-f} (\dots) \delta q_u + \sum_{u=u-f+1}^u (\dots) \delta q_u = 0$$

wg. 1 Summand mit unabh. q_u und Bestimmungsgleichung für λ_i :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L}{\partial q_u} = \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{iu}} \quad u = 1, \dots, u$$

Lagrange-Gleichung 1. Art

n Gleichungen $n + f$ Unbekannte:

n Koordinaten q_m

+ f Multiplikatoren λ_i

f Bestimmungsgleichungen gegeben durch
differentialen Zwangsbedingungen:

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \dot{q}_m + b_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, f$$

physikalische Interpretation
vgl. holonomes System

der λ_i 's:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m$$

$$\Rightarrow Q_m = \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{im}$$

Komponenten einer generalisierten
Kraft: hier gegeben durch
Zwangskräfte

Zwangskräfte
für Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen
N-Teilchen System

$$f_j(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0 \quad j = 1, \dots, f \quad f: \# \mathbb{ZB}$$

benutze keine generalisierte Koordinaten,
d.h. $\mathbb{ZB}$'s nicht zur Reduktion der Freiheitsgrade;
aber: nur $3N-f$ unabh. Koordinaten

$$df_j = \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot d\vec{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0: \quad \text{reale Verschiebung}$$

für virtuelle Verschiebung ($\delta t = 0$)

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot \delta \vec{x}_i = 0$$

mit f Lagrange-Multiplikatoren

$$\sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \lambda_j \delta \vec{x}_i = 0$$

mit d'Alembert'sches Prinzip:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$$

$$\approx \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i + \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{\nabla}_i f_j) \right) \delta \vec{x}_i = 0$$

wähle λ_j so da $\beta \left(\dots \right) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{\nabla}_i f_j)}$$

vgl. mit Newton
 $m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{Z}_i = \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{\nabla}_i f_j)} : \text{Zwangskraft}$$

Bestimmung der Zwangskräfte u. U. einfacher mit
 Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren

Beispiel: Suche Fadenspannung
Atwoodsche Fallmaschine



044

z.B.

$$z_1 = 0 = z_2; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2R$$

$$Y_1 + Y_2 + \pi R = \ell \quad : \text{wird hier nicht verwendet}$$

↳ Anzahl generalisierter Koordinaten: $6 - 4 = 2$

$$q_1 = Y_1; \quad q_2 = Y_2$$

$$f(q_1, q_2) = 0 = q_1 + q_2 + \pi R - \ell$$

$$\hookrightarrow df = dq_1 + dq_2 = 0$$

$$\hookrightarrow a_{11} = 1 = a_{12}$$

ein Lagrange-Multiplikator: λ
aus generalisierter Kraft: $Q_m = \sum_{i=1}^f \lambda_i Q_{i,m}$

$$Q_1 = \lambda = Q_2 \quad \underline{\text{Fadenspannung}}$$

$$\text{Lagrange-Funktion: } L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) + g (m_1 q_1 + m_2 q_2)$$

L G 6:

$$m_1 \ddot{q}_1 - g m_1 = \lambda$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - g m_2 = \lambda$$

$$+ \text{Zwangsbedingung: } \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0$$

} 3 Gleichungen
für 3 Unbe-
kannte
(q_1, q_2, λ)

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$\Rightarrow \lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Fadenspannung:
für $m_1 \gg m_2$

$$\lambda = -2g m_2$$

$$\text{für } m_1 = m_2 \Rightarrow \lambda = -g m$$

Beispiel: "rollendes Rad"

System mit nicht-holonomen ZB; aber Darstellung
in differentieller Form

generalisierte Koordinaten:

$$\begin{array}{ccc} x, y & \text{und} & \varphi, \Theta \\ q_1, q_2 & & q_3, q_4 \end{array}$$

Zwangsbedingung Rollen:

$$\dot{x} - R\dot{\varphi}\cos\Theta = 0 \quad ; \quad \dot{y} - R\dot{\varphi}\sin\Theta = 0$$

mit $\sum_{m=1}^n a_{im} \dot{q}_m = 0$

n : 4 Koordinaten
 $i = 1, 2$ Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \begin{array}{llll} a_{11} = 1 & a_{12} = 0 & a_{13} = -R\cos\Theta & a_{14} = 0 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 1 & a_{23} = -R\sin\Theta & a_{24} = 0 \end{array}$$

2 Lagrange-Multiplikatoren: λ_1, λ_2
 4 generalisierte Kräfte ($Q_m = \sum_{i=1}^2 \lambda_i a_{im}$)

$$Q_1 = \lambda_1 \quad Q_2 = \lambda_2 \quad Q_3 = -\lambda_1 R\cos\Theta - \lambda_2 R\sin\Theta; \quad Q_4 = 0$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\Theta}^2$$

$$I_1 = \frac{1}{2} M R^2 \quad \text{Trägheitsmoment: Drehung um Achse}$$

$$I_2 = \frac{1}{4} M (R^2 + \frac{1}{2} d^2) \quad ; \quad d: \text{Scheibendicke}$$

LGK:

$m\ddot{x} = \lambda_1$; $M\ddot{y} = \lambda_2$; $I_1\ddot{\varphi} = -\lambda_1 R \cos \Theta - \lambda_2 R \sin \Theta$; $I_2\ddot{\Theta} = 0$
 + 2 Zwangsbedingungen: 6 Gleichungen für 6 Unbekannte

1) $\Theta = \dot{\Theta}_0 t$; $\ddot{\Theta} = \text{konst}$

2) $\lambda_1 = mR(\ddot{\varphi} \cos(\dot{\Theta}_0 t) - \dot{\varphi} \dot{\Theta}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t))$

3) $\lambda_2 = MR(\ddot{\varphi} \sin(\dot{\Theta}_0 t) + \dot{\varphi} \dot{\Theta}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t))$

4) $I_1\ddot{\varphi} = -mR^2\ddot{\varphi} \rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \dot{\varphi}_0 = \text{konst.}$

5) $\dot{x} = R\dot{\varphi}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow x(t) = R \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0} \sin(\dot{\Theta}_0 t) + x_0$

6) $\dot{y} = R\dot{\varphi}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow y(t) = -R \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0} \cos(\dot{\Theta}_0 t) + y_0$

Zwangskräfte:

$Q_1 = -mR\dot{\varphi}_0 \dot{\Theta}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t)$; $Q_2 = mR\dot{\varphi}_0 \dot{\Theta}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t)$

haben beide in der "Spur"

$Q_3 = 0 = Q_4$

Hamiltonsche Prinzip / Variationsprinzip

bisher: d'Alembert-Prinzip: Differentialprinzip
 ↳ Ableitung der Lagrange-Gleichungen
 (Bewegungsgleichungen) durch virtuelle
 Verschiebungen

Hamilton-Prinzip: Integrationsprinzip

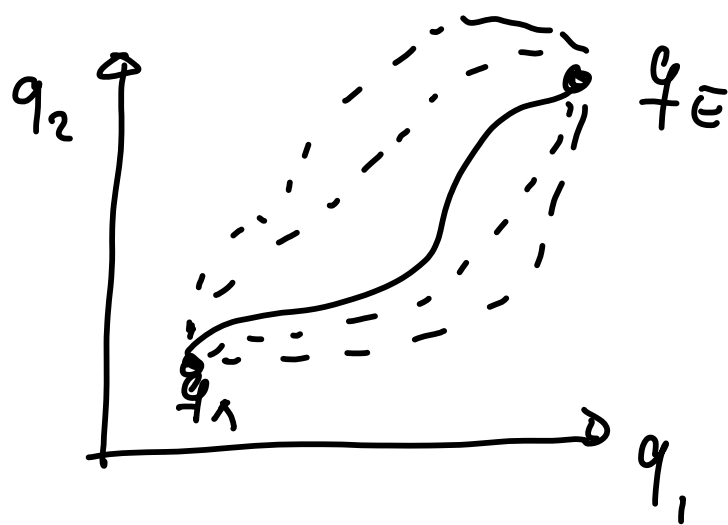
Bestimmung der Bewegungsgleichungen durch
Variation aller möglichen Bahnen + Optimierung
 (Extremwertbestimmung)

betrachte Bahnen im $\mathbb{R}^n$

mit $q = (q_1, \dots, q_n)$ Konfigurationsvektor

Bahnen $t_A \leq t \leq t_E$; $t \mapsto (q_1(t), \dots, q_n(t))$

mit Randwerten $q(t_A) = q_A$; $q(t_E) = q_E$



mit der Funktion : $L = L(q(t); \dot{q}(t), t)$

allgemein : $q(t)$ beliebige Funktionen $= L(t)$

$\dot{q}(t)$ "Änderungsrate" von $q(t)$

und

$$S[L] = \int_{t_1}^{t_E} dt L(t)$$

hier : Wirkung,
Wirkungsfunktional

Funktional (hier
Abb von Funktionen in $\mathbb{R}$,
allgem. : Abb. von
Funktionen auf Funktionen)

=> Hamiltonsches Prinzip

Die Bewegung eines Systems erfolgt entlang einer Bahnkurve im Konfigurationsraum, die $S[L]$ stationär macht.

auch: Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\boxed{\delta S = 0} \rightarrow \text{Variationstechnik}$$

S : stationär / extremal

Möglichkeit 1

betrachte Bahnen mit kleiner Variation um

Extremal-Bahn:

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0(t) + \alpha \underline{s}(t) = \underline{q}(t, \alpha)$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{q}}(t, \alpha) = \dot{\underline{q}}_0(t) + \alpha \dot{\underline{s}}(t)$$

mit Randbedingungen : $\underline{s}(t_*) = 0 = \underline{s}(t_e)$

$$\rightarrow L = L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha))$$

$$\rightarrow S(\alpha) = \int_{t_A}^{t_E} dt L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha))$$

$$S: \text{stationär} : \delta S = \left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\partial_q L) \cdot \underline{s} + (\partial_{\dot{q}} L) \cdot \underline{\dot{s}} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{p. I} &= \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\partial_q L) \underline{s} - \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}} L) \underline{s} \right] + \underbrace{(\partial_{\dot{q}} L) \cdot \underline{s}}_{=0} \Big|_{t_A}^{t_E} \\ & \quad \text{Randterm} \end{aligned}$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\partial_q L) - \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}} L) \right] \cdot \underline{s}$$

= 0

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) - \nabla_q L = 0 \right]$$

Euler - Gleichung der Variationsrechnung
+ Mechanik

↳ Euler-Lagrange - Gleichungen
(ELG oder ELDG)

Möglichkeit 2

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt L = \int_{t_A}^{t_E} dt \delta L$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\nabla_q L) \delta q + (\nabla_{\dot{q}} L) \delta \dot{q} \right] ; \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$$

$$\stackrel{\text{p. I}}{=} \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\nabla_q L) \delta q - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) \delta q \right] + \cancel{(\nabla_{\dot{q}} L) \delta q} \Big|_{t_A}^{t_E}$$

$\hookrightarrow = 0$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \underbrace{\left[(\nabla_q L) - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) \right]}_{=0} \delta q$$

wg. unabhängig von δq

$\Rightarrow$ ELG

Vergleich mit d'Alembert Prinzip

d'Alembert Prinzip : $\sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$

mit $\ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x} = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{x}} \delta \vec{x}) - \dot{\vec{x}} \delta \dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{x}} \delta \vec{x}) - \frac{1}{2} \delta \dot{\vec{x}}^2$

Integration

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i \left(\underbrace{\vec{F}_{a,i} \cdot \delta \vec{x}_i}_{(1)} - \underbrace{\frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x})}_{(2)} + \underbrace{\frac{m_i}{2} \delta \dot{\vec{x}}^2}_{(3)} \right)$$

$$\textcircled{1} \quad \sum_i \vec{F}_{e,i} \delta \vec{x}_i = \sum_j Q_j \delta q_j = - \sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j = - \delta V$$

für konservative Systeme

$$\textcircled{2} \quad \int_{t_A}^{t_E} dt \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i \Big|_{t_A}^{t_E}$$

= 0 Start- und Endpunkte werden nicht variiert

$$\textcircled{3} \quad \sum_i \frac{m_i}{2} \delta \dot{x}_i^2 = \delta T \quad T: \text{kinetische Energie}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_A}^{t_E} dt (\delta T - \delta V) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt (T - V) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt L$$

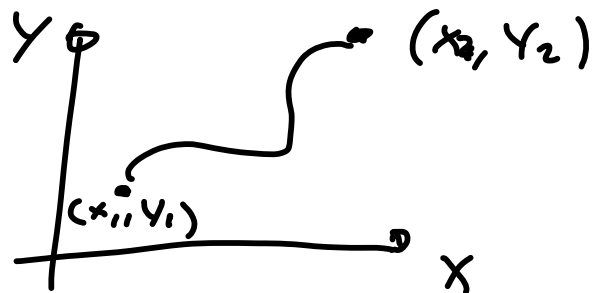
$\Rightarrow L$: Lagrange-Funktion

$\Rightarrow$ d'Alembert'sches Prinzip ist äquivalent zu
Hamiltonschen Prinzip

Variationsrechnung Beispiele

055

1) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene
kurve: $y = y(x)$ gesucht
mit Parameter x



infinitesimales Wegsegment: ds

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Wegstrecke:
$$S = \int_{p_1}^{p_2} ds = \int_{p_1}^{p_2} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\Rightarrow L = L(y, y') \stackrel{\text{hier}}{=} L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\Rightarrow \text{Euler-Lagrange-Gleichungen: } \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} y' \right)$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } y' = \text{const.} \Rightarrow y(x) = ax + b$$

Gerade

2) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf
Kugeloberfläche

Koordinaten: Θ, φ ; $R = \text{const.}$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= R^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2)$$

und t : beliebiger Parameter; z.B. Zeit : $\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt}$
 $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$

$$\Rightarrow S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt R (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)^{1/2}$$

$$\delta S = 0 = \int dt \frac{1}{2} R (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)^{-1/2} \delta (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)$$

($\rightarrow$ Geodätengleichung)

betrachte $\tilde{L} = \dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2 = L(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\varphi})$

$$\Rightarrow \text{EGL: } \left. \begin{array}{l} \Theta: \ddot{\Theta} = \sin\Theta \cos\Theta \dot{\varphi}^2 \\ \varphi: \ddot{\varphi} = -2 \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta} \dot{\Theta} \dot{\varphi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } \Theta = \pi/2 \\ \omega \ddot{\varphi} = 0 \\ \omega \dot{\varphi} = \text{const.} \end{array}$$

Bemerkung: verschiedene Lagrange-Funktionen

057

z.B. Kugeloberfläche:

$$ds = R d\Theta \sqrt{1 + \sin^2 \Theta \varphi'} \quad ; \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\Theta}$$

$\Rightarrow L(\varphi', \Theta)$ hier: Θ (Integrations)parameter $\hat{=}$ "Zeit"

$$ds = R d\varphi \sqrt{\Theta' + \sin^2 \Theta}$$

$\Rightarrow L(\Theta, \Theta')$: ohne "Zeit"

Geodätengleichung (= extreme Bahnen in beliebiger Geometrie)

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j = g_{ij} dx_i dx_j \quad (\text{Summenkonvention})$$

x_i : beliebige Koordinaten

g_{ij} : Metrik, metrischer Tensor
als Matrix darstellbar

z.B. $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \Theta)$; $x = (r, \Theta, \varphi)$

$$\Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\Theta + r^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2$$

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j} \quad ; \quad t : \text{beliebiger Parameter}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} (g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j)^{-1/2} \delta (g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} (\quad)^{-1/2} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \delta x_k \dot{x}_i \dot{x}_j + g_{ij} \delta (\dot{x}_i \dot{x}_j) \right]$$

$$\underbrace{\frac{\partial \dot{x}_i \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_k}}_{2g_{kj} \dot{x}_j} \delta \dot{x}_k \quad \uparrow \quad \frac{d}{dt} \delta x_k$$

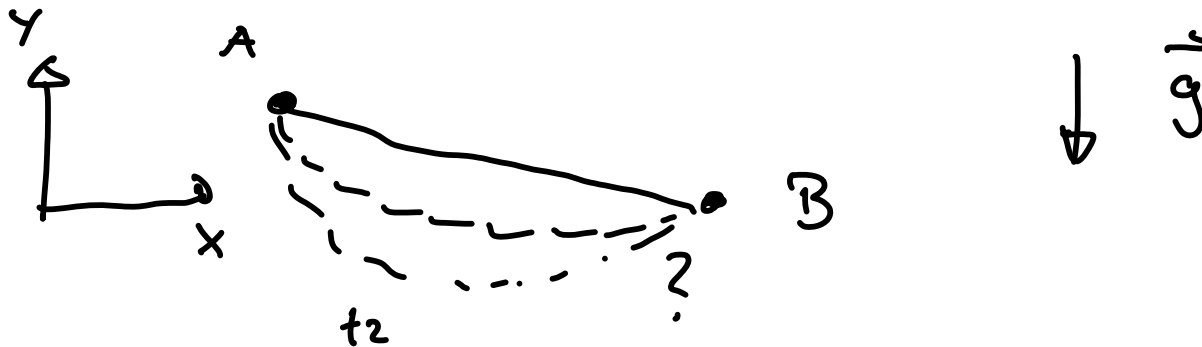
part. integration

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} (\dots)^{-1/2} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_i \dot{x}_j - 2 \frac{d}{dt} (g_{kj} \dot{x}_j) \right] \delta x_k$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt} (g_{kj} \dot{x}_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 \right] \quad \text{Geodäten-Gleichung}$$

Bewegungsgleichung für Teilchen aber auch Licht
in gegebener Geometrie (z.B. Planetenbahnen,
Lichtbrechung)

Brachistochronenproblem
(gr. brachyistos = kürzeste, chronos = Zeit)
schnellster Weg im Schwerfeld der Erde



$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \rightarrow \text{extremal: } \delta S = 0$$

aus Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh$$

$$A: (0, h) ; B: (x_B, 0)$$

$$\Rightarrow v(y) = \sqrt{2g(h-y)}$$

$$\text{mit } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$J = \int_0^{x_B} dx \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} \Rightarrow \text{Lagrange-Funktion:}$$

$$L(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

$$\in LG: \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(h-y)}(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g(h-y)}(1+y'^2)^{3/2}} \left[\frac{1}{2} \frac{y'^2}{2g(h-y)} + \frac{y''}{1+y'^2} \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} \cdot \frac{1}{h-y}$$

$$\Rightarrow \boxed{2(h-y)y'' = 1+y'^2} \quad \text{Euler DGL}$$

$$\text{Lösung: } \frac{d}{dx} ((h-y)(1+y'^2)) = 0$$

$$\Rightarrow (h-y)(1+y'^2) = a = \text{const.}$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{a-(h-y)}{h-y} = \frac{a-\tilde{y}}{\tilde{y}} \quad ; \quad \tilde{y} = h-y$$

Lösung: Teil einer Zykloidenbahn:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2R-y}{y}$$



$$x = R(\varphi + \sin\varphi)$$

$$y = R(1 + \cos\varphi)$$

Bemerkung:

wenn $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

t = Parameter zur Beschreibung
des Problems (s.o. $t = x$)

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{const} \right]$$

Bsp. kürzeste Strecke in der Ebene:

$$ds = dx \sqrt{1+y'^2}$$

$$\rightarrow L(y') \text{ bzw. } \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\text{aus } y' \frac{\partial L}{\partial y'} = L = \text{const} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\text{Lösung } \Rightarrow y(x) = ax + b$$

Variationsrechnung mit Nebenbedingung

062

Hamiltonsche Prinzip $\Leftrightarrow$ Lagrange-GL. 1. Art

betrachte System mit f nicht-holonomen Zwangsbedingungen die sich in differentieller Form darstellen lassen:

$$\sum_{m=1}^n a_{im}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_m + b_i = 0 \quad i = 1, \dots, f$$

mit Hamiltonschen Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m = 0$$

q_m 's nicht unabh. voneinander $\rightarrow (\dots) \neq 0$

mit H.P.: Endpunkte bleiben unverändert: $\delta t = 0$

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \delta q_m = 0$$

mit Lagrange-Multiplikatoren λ_i : $\int dt \sum a_{im} \lambda_i = 0$

$$\Rightarrow \int_{t_A}^{t_B} dt \sum_{n=1}^h \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} + \sum_{i=1}^f a_{in} \lambda_i \right) \delta q_n = 0$$

wähle λ_i so daß $(\dots) = 0$

$$\left| \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = \sum_{i=1}^f a_{in} \lambda_i \right| \quad \text{Lagrange-Gl. 1. Art}$$

h Gleichungen (q_n) für $h+f$ Unbekannte
 + f Gleichungen aus Zwangsbedingungen

betrachte Systeme mit Nebenbedingungen bzw.
 holonome Zwangsbedingungen

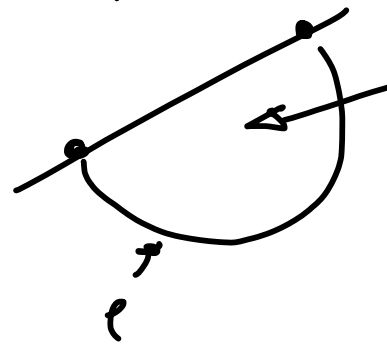
$$g_i(\underline{q}, t) = 0 \Rightarrow dg_i = 0 \Rightarrow a_{in} = \frac{\partial g_i}{\partial q_n}$$

$\Rightarrow$ modifizierte Grundfunktion bzw. mod. Lagrange-Funktion

$$\tilde{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + \sum_{i=1}^f \lambda_i g_i(\underline{q}, t)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_n} = 0 \right|$$

Bsp. Isoperimetrisches Problem



max. Fläche?

Fläche

$$F = \int_{x_1}^{x_2} dx \, y \quad ; \quad y = y(x)$$

$$L = L(y)$$

Nebenbedingung: $l = \int_{p_1}^{p_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_g$

$$\Rightarrow \tilde{L} = y + \lambda \sqrt{1+y'^2} = L(y, y')$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{L} - y' \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'} = \text{const} = h$$

Lösung: $x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - \sqrt{\lambda^2 - h^2})^2 + (y - h)^2 = \lambda^2$

Kreisbogen mit $x_2 = 2\sqrt{\lambda^2 - h^2}$

• Variationsrechnung mit Nebenbedingung

allgemein: $t \in$

$$C = \int_{t_k}^{t_E} dt G(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \text{const.}$$

(z.B. isoperimetrische Probleme, 'gleicher Umfang')

mit modifizierter Grundfunktion / modifizierte Lagrange-Funktion

$$\tilde{L} = L + \sum_{i=1}^f \lambda_i G_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \quad ; f : \text{Anzahl der Nebenbed.}$$

$\Rightarrow$ Lösung des Problem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \underline{\dot{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \underline{q}} = 0$$

Euler-Gleichung mit modifizierter Grundfunktion

n - Gleichungen ($\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$) für $n+f$ Unbekannte ($\lambda_i : i = 1 \dots f$) + Nebenbedingungen

Erhaltungssätze / Noether Theorem

066

allgemein mechanische Systeme

Änderung von $\underline{q}$ und $\dot{\underline{q}}$

mit $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$; $\dot{\underline{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$; $2n$ Größen

Integral der Bewegung / Bewegungsintegral

$$I_n = \bar{I}_n(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = C_n = \text{konstant}$$

entlang Trajektorie, die durch ELG (Newtonschen Bewegungsgleichungen) bestimmt ist.

Bsp.: zyklische Koordinate $\rightarrow \bar{I}_n$

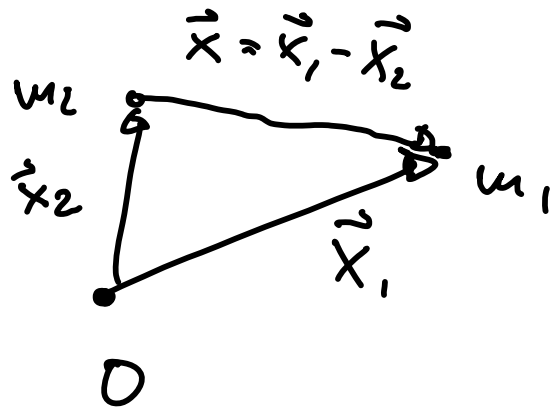
$$\text{zyklische Koordinate: } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{I}_n; \bar{I}_n = \text{const.}$$

abhängig von der Wahl des Koordinatensystems
wähle Koordinatensystem, so daß $\bar{I}_n$ s einfach gefunden werden können

anschaulich: Kepler-Problem / 2-Körper-Problem

067



Potential nur von Abstand abhängig: $V = V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$

mit Gesamtmasse: $M = m_1 + m_2$

reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Schwerpunkt: $\vec{K} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2) = (X, Y, Z)$

relative Koordinate: $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = r \begin{pmatrix} \sin\Theta \cos\varphi \\ \sin\Theta \sin\varphi \\ \cos\Theta \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3)$

$(r, \Theta, \varphi) = (q_4, q_5, q_6)$

$$\Rightarrow L = \frac{M}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{\mu}{2} (\dot{q}_4^2 + q_4^2 (\dot{q}_5^2 + \sin^2 q_5 \dot{q}_6^2)) - V(q_4)$$

zyklische Koordinaten: q_1, q_2, q_3, q_6

$$\Rightarrow p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = M \dot{q}_1 = M \dot{X} = \text{const} = \bar{I}_1$$

$$p_2 = M \dot{q}_2 = M \dot{Y}; \quad p_3 = M \dot{q}_3 = M \dot{Z}$$

$\rightarrow$ Impulserhaltung des Schwerpunkts

$$p_6 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_6} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = I_c \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung}$$

p_i 's : generalisierte Impulse

vgl.: in kartesischen Koordinaten

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

$\Rightarrow$ keine zyklische Koordinate

Noether Theorem

Frage nach "Symmetrien" eines Systems und Zusammenhang mit Erhaltungssätzen

betrachte zyklische Koordinate:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = 0 \Rightarrow p_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = \text{const.}$$

Interpretation : zyklische Koordinate

$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ ist invariant unter Koordinatentransformation

$$q_k \rightarrow Q_k(\lambda) = q_k + \lambda$$

Translation $\rightarrow$ Symmetrie (entlang Richtung q_k)

$$\text{und } Q_j(\lambda) = q_j \quad \text{für } j \neq k$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{Q}} = \underline{\dot{q}}$$

$$\Rightarrow L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) \Leftrightarrow \frac{\partial L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t)}{\partial \lambda} = 0$$

Verallgemeinerung : beliebige Koordinatentransformation

$$Q_i(\lambda) = Q_i(\underline{q}, t) ; \quad \lambda \in \mathbb{R} ; \quad \text{d.h. einparametrische Schar von Koordinatentransfo}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_i(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \quad i = 1 \dots n$$

$$\text{mit } Q_i(0) = q_i ; \quad \dot{Q}_i(0) = \dot{q}_i \quad \text{für } \lambda = 0 \text{ sind } Q_i \text{ und } q_i \text{ identisch}$$

Def.: Transformation ist Symmetrie - Transformation
von $L = L(q, \dot{q}, t)$ falls

$$\left. \frac{\partial L(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0$$

d.h. L ist invariant unter eiparametrischen
Koordinatentransformationen

Bsp.: 1) zyklische Koordinate

2) Drehung in Ebene

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= x \cos \lambda + y \sin \lambda & \dot{X} &= -x \sin \lambda + y \cos \lambda \\ Y(\lambda) &= y \cos \lambda - x \sin \lambda & \dot{Y} &= -y \sin \lambda - x \cos \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } L &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r) & ; \quad r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - V(R) & ; \quad R^2 &= X^2 + Y^2 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial L(X, \dot{X}, Y, \dot{Y})}{\partial \lambda} = 0$$

hier: keine Abhängigkeit
von λ

Noether Theorem

sei L invariant unter Symmetrietransformation
dann ist I Konstante der Bewegung

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\lambda=0}$$

Beweis:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

(gilt für einparametrische Symmetrietransf.)

mit ELG: $\partial L / \partial q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{dt} I \Rightarrow I \text{ konstante der Bewegung}$$

Bsp. 1) zylindrische Koordinate

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} = \begin{cases} 0 & i \neq h \\ 1 & i = h \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \sum_i \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = p_h = \text{const.}$$

2) Drehung

$$\left. \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = Y \quad ; \quad \left. \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = -X$$

$$I = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = Y m \dot{x} - X m \dot{y}$$

$$= -m (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})_z = -L_z \quad \begin{array}{l} z\text{-komponente} \\ \text{Drehimpuls} \end{array}$$

Allgemein: Homogenität des Raums:

Ursprung nicht ausgezeichnet

→ Symmetrietransformation möglich

hier: Translation

$$\vec{x}_i \rightarrow \vec{Q}_i = \vec{x}_i + \lambda \vec{u} \quad ; \quad \vec{u} \text{ beliebige Richtung}$$

z.B. N-Körper - Wechselwirkung nur abhängig
von Abständen $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$:

$$V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) = V(|\vec{Q}_i - \vec{Q}_j|)$$

Noether - Konstante / Noether - Ladung:

$$\frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} = \vec{h} \quad ; \quad T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \dot{\vec{x}}_i^2$$

$$I = \sum_i^N \left. \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \right|_{\lambda=0} = \sum_i^N \vec{h} \cdot (m_i \dot{\vec{x}}_i)$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \sum_i^N m_i \dot{\vec{x}}_i \quad \text{Gesamt linear - Impuls} \\ \quad \quad \quad = \text{Erhaltungsgröße}$$

$$\vec{h} = \frac{1}{M} \sum_i^N m_i \dot{\vec{x}}_i \quad \text{Schwerpunkt : } \ddot{\vec{h}} = 0$$

• Homogenität des Kerns

$\Leftrightarrow$ Gesamtimpulserhaltung

$\Leftrightarrow$ System (L) translationsinvariant
(= Symmetrietransformation)

- Isotropie des Raums

$\hookrightarrow L$ invariant unter Drehung : $\vec{Q}_i = D \vec{x}_i$

D : Drehmatrix : $D = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hier: um z -Achse

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \bigg|_{\lambda=0} ; \quad \frac{\partial D}{\partial \lambda} \bigg|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i (-y_i \dot{x}_i + x_i \dot{y}_i) = \sum_i L_{z,i}$$

$= L_z$ z -Komponente des Gesamtdrehimpuls
 $\rightarrow$ erhalten

Drehrichtung beliebig $\Rightarrow \vec{L}$ Gesamtdrehimpuls erhalten

- Isotropie des Raums

$\Leftrightarrow$ Gesamtdrehimpulserhaltung

$\Leftrightarrow$ System invariant unter Drehung
 (= Symmetrie-Transformation)

- Homogenität der Zeit

betrachte $\underline{q}(t)$: Lösung der ELG

mit $\underline{q}(t_A) = \underline{q}_A$ und $\underline{q}(t_E) = \underline{q}_E$

System "zeitlich homogen" : invariant unter
Zeittranslation : $t \rightarrow t + \Delta t$

$$\hookrightarrow \underline{q}(t_A + \Delta t) = \underline{q}_A ; \underline{q}(t_E + \Delta t) = \underline{q}_E$$

$\Rightarrow L$ kann nicht explizit von der Zeit t abhängig sein,
da $\underline{q}(t)$ aus L gewonnen wird :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L}$$

Konstante entlang
ELG - Bahn
Integral der Bewegung

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

$$H = 2T - L = T + V \quad \text{Gesamtenergie}$$

Eichtransformation

$$L \rightarrow \tilde{L} = \alpha L + \frac{d}{dt} f(\underline{q}, t) \quad ; \alpha = \text{const}$$

$\tilde{L}$ erfüllt gleiche ELG wie $L = L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$

$f = f(\underline{q}, t)$: Eichfunktion

• $\tilde{L} = \alpha L$ offensichtlich, da ELG linear in L

• $\tilde{L} = L + \frac{d}{dt} f(\underline{q}, t)$

aus Variationsprinzip: $\delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt L = 0$

$$\delta \tilde{S} = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt \frac{d}{dt} f = \delta [f(\underline{q}_E, t_E) - f(\underline{q}_A, t_A)] = 0$$

keine Variation

aus ELG:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{d}{dt} f \right) - \frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{dt} f \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q} - \dot{q} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t} \\
 &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \dot{q} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t} = 0 \\
 &\Rightarrow \left| \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = 0 \right| \quad \text{"physik" unabhängig von Eichtransformation}
 \end{aligned}$$

Symmetrie - Transformation

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) &= L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) + \frac{d}{dt} f(\underline{Q}, t) \\
 &= L(\underline{q}(\underline{Q}, t), \underline{\dot{q}}(\underline{Q}, t), t)
 \end{aligned}$$

$\underline{Q}_i = \underline{Q}_i(\underline{q}, t, \lambda)$ einparametrische Transformation

$\Rightarrow$ Noether - Konstante / Ladung

079

$$\left| \mathcal{J}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i(\underline{Q}, t)}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right|_{\lambda=0} - \frac{\partial f(\underline{Q}, t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J} = 0$$

symmetrie-Transformation: $\frac{\partial L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial L(q(\underline{Q}, t), \dot{q}(\underline{Q}, t), t)}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{d}{dt} f(\underline{Q}, t) \quad \text{bei: } \lambda = 0$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q(\underline{Q}, t)}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \underline{Q}} \frac{d}{dt} f(\underline{Q}, t) \right)$$

siehe Noether-Theorem ELG + Eichfunktion

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \underline{Q}} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{Q}} \underline{\dot{Q}} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \underline{Q}} \frac{\partial f}{\partial \underline{Q}} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g(Q, t)}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial f(Q, t)}{\partial \lambda} \right] \bigg|_{\lambda=0}$$

Bsp. Galilei - Transformation
im kräftefreien Fall

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}(\lambda)t \quad ; \quad \text{mit } \vec{v}(0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 1$$

$$L'(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) = L(\vec{x}(\vec{x}', t), \dot{\vec{x}}(\vec{x}', t), t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$$

$$= L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) + \frac{d}{dt} f(\vec{x}', t)$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{\vec{x}}' - \vec{v})^2 = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}'^2 + \underbrace{\frac{m}{2} \vec{v}(\vec{v} - 2\dot{\vec{x}}')}_{\frac{d}{dt} f(\vec{x}', t)}$$

$$\hookrightarrow f(\vec{x}', t) = \frac{m}{2} \vec{v}(\vec{v} \cdot t - 2\dot{\vec{x}}')$$

Erhaltungsgröße / Noether - Ladung

$$\vec{x}(\vec{x}', t) = \vec{x}' - \vec{v}t \quad ; \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} = -t$$

mit $J(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} - \left. \frac{\partial f(\vec{x}', t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$

$$= m \dot{\vec{x}} (-t) - (-m \dot{\vec{x}})$$

$$= m(\vec{x} - \dot{\vec{x}} t)$$

äquivalent zur Bewegungsgleichung: $\ddot{\vec{x}} = 0$

↳ Lösung: $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t$

$$\Rightarrow J = m \vec{x}_0$$

Bemerkung:

aus Symmetrietransformation folgt Erhaltungsgröße (I, T) :

Noether-Theorem

aber: Erhaltungsgrößen lassen nicht auf notwendige

Symmetrietransformation schließen (z.B. Zentralkraft

Vektor: $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha \vec{e}_r$; für $\vec{F} = \alpha/r^2 \vec{e}_r$

↳ keine Perihelienrotation)

Hamilton - Mechanik

082

Lagrange-Mechanik : gegeben: generalisierten Koordinaten q_i mit $i = 1 \dots n$ (n -dimensionaler Konfigurationsraum q)
und generalisierte Geschwindigkeiten (Änderung) $\dot{q}_i$
aber: bei Koordinatentransformation: Geschwindigkeiten fixiert,
d.h. q und $\dot{q}$ nicht unabhängig voneinander.

=> suche Formulierung mit "symmetrischen"/gleichberechtigten Größen

mit: größere Klasse von Variablentransformationen, Ausweitung
des Formalismus auf größere Problemkasse (insb.
Quantenmechanik, Thermodynamik, Statistik), evtl.
einfachere Problemlösung

Bsp.: $\ddot{x} = -\omega^2 x$ neue Variable $y_{\pm} = \omega x \pm \dot{x}$
(anstatt $x, \dot{x}$)

$$\Rightarrow \dot{y}_{\pm} = \omega \dot{x} \pm \ddot{x} = \omega \dot{x} \pm (-\omega^2 x) = \pm \omega (\omega x \pm \dot{x}) = \pm \omega y_{\pm}$$

↳ Lösung $y_{\pm}(t) = C_{\pm} e^{\pm \omega t}$; $x(t)$ aus Richttransformation

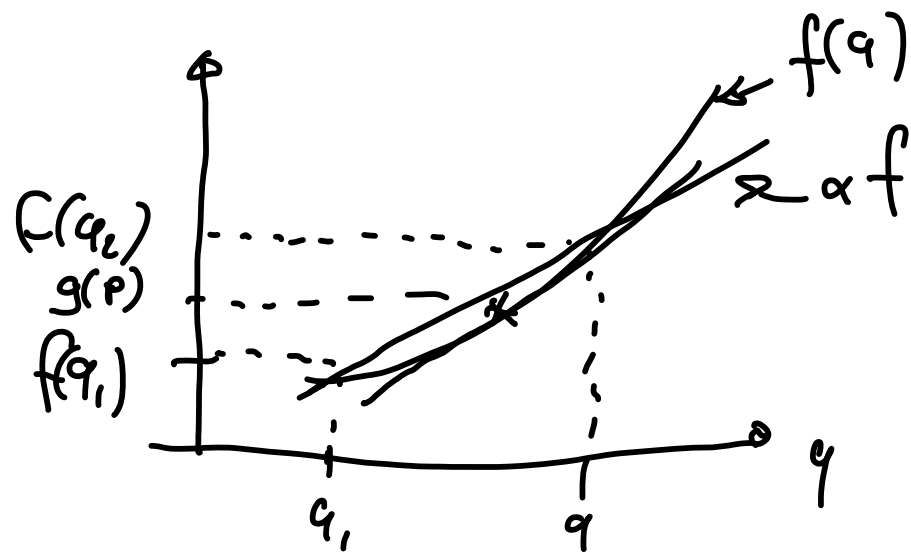
Legendre - Transformation

(auch: Thermodynamik)

Def: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex falls für alle $\underline{q}_1, \underline{q}_2 \in \mathbb{R}^n$

und $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt:

$$f(\alpha \underline{q}_1 + (1-\alpha) \underline{q}_2) \leq \alpha f(\underline{q}_1) + (1-\alpha) f(\underline{q}_2)$$



f ist strik konvex

für $0 < \alpha < 1$

$$f(\dots) < \alpha f(\underline{q}_1) + (1-\alpha) f(\underline{q}_2)$$

Anwendung: konvexe Funktionen können durch Tangentenflächen beschrieben werden mit Parametrisierung der Steigung $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$:

Tangente : $\underline{p} \cdot \underline{q} - g(\underline{p})$

Bedingung für Berührung:

$$f(\underline{q}) = \underline{p} \cdot \underline{q} - g(\underline{p}) \quad ; \quad \underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$$

Definition:

$$\underline{p} \mapsto g(\underline{p}) = \underline{p} \cdot \underline{q} - f(\underline{q}) \quad \text{mit } \underline{q} \text{ aus} \\ \underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$$

Legendre-transformierte von $f(\underline{q})$

Bemerkungen:

- $\underline{q}, \underline{p}$ korrespondierende Punkte wenn $\underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$
- $g(\underline{p})$ ist konvex, wenn $f(\underline{q})$ konvex
- Legendre-transformierte von $g(\underline{p})$ ist Ursprungsfunktion $f(\underline{q})$ (Rücktransformation, Rekonstruktion)

Bsp.: $f(q) = aq^2$ mit $a > 0$

$g(p) = pq - f(q)$ mit $p = \frac{df}{dq} = 2aq$

↳ $q = \frac{p}{2a}$

$\Rightarrow g(p) = \frac{p^2}{2a} - a\left(\frac{p}{2a}\right)^2 = \frac{p^2}{4a}$

Legendre-Transformierte von $g(p)$:

$h(q) = qp - g(p)$ mit $q = \frac{dg}{dp} = \frac{p}{2a}$

$= aq^2$ Ursprungsfunktion

Wenn $g(p) = pq - f(q)$ anstatt $g(p) = f(p)$

z.B. $f(q) = a(q+c)^2$; $p = \frac{df}{dq} = 2a(q+c)$

↳ $q = \frac{p}{2a} - c$

mit $g(p) = f(p) = \frac{p^2}{4a}$

↳ Nichttransformation nicht Ursprungsfunktion

aber $g(p) = pq - f(q) = \frac{p^2}{4a} - cp \rightarrow$ Nichttransformation
↳ $f(q)$

Hamilton Funktion

$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$: A. konvexe Funktion von $\underline{\dot{q}}$

↳ Hamilton-Funktion = Legendre-transformierte der Lagrange-Funktion bezüglich $\underline{\dot{q}}$

wobei $\underline{\dot{q}} \rightarrow \underline{p}$: generalisierte Impulse, kanonische oder konjugierte Impulse

$$\left. \begin{aligned} H(\underline{q}, \underline{p}, t) &= \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \end{aligned} \right\} \text{Hamilton-Funktion}$$

auf Phasenraum $(\underline{q}, \underline{p})$; 2n dim. Raum

$$\underline{p} = \text{grad}_{\underline{\dot{q}}} (L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)) \quad \text{bzw.} \quad \boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

kanonisch-konjugierte Impulse

Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus

087

=> Hamilton'sche Gleichungen

$$\text{mit } dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$
$$= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\text{mit } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$$

$$\Rightarrow dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\text{mit } H = H(\underline{q}, \underline{p})$$

$$\Rightarrow dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

damit

$$\left[\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Hamilton-Gleichungen = kanonische Gleichungen

das sind $2n$ Differentialgleichungen 1. Ordnung
für $2n$ kanonischen Variablen q_i und p_i
($i = 1 \dots n$); diese spannen den $2n$ -dimensionalen
Phasenraum auf

Bedeutung von H ?

wie gezeigt: $H = T + V$

Gesamtenergie des Systems
falls nur skleronome Zwangs-
bedingungen vorliegen und
System konservativ, d.h.
 $V = V(\underline{q})$

z.B. $L(\dot{\vec{x}}, \vec{x}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})$

↳ $H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{x})$: Gesamtenergie mit $\vec{p} = m \dot{\vec{x}}$
Impuls

• zeitliche Änderung von H

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

Poisson-Klammer $\{H, H\}$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{d.h. wenn } \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow H = \text{Bewegungsintegral}$

- wenn q_n zyklische Koordinate:

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \dot{p}_n = 0$$

$\Rightarrow p_n = \text{const.}$ d.h. keine Variable

mit $\dot{p}_n = - \frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow H$ nicht von q_n abhängig

$\hookrightarrow$ Elimination von zwei Variablen q_n, p_n

- Bsp

1) Harmonischer Oszillator / Fedpendel

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} ; \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H = p \frac{p}{m} - \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 ; \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = E = \text{konst. Gesamtenergie}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2\epsilon/m\omega^2} + \frac{p^2}{2m\epsilon} = 1$$

Ellipse im Phasenraum
mit $a = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m\omega^2}}$; $b = \sqrt{2m\epsilon}$

kanonische Gleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

2) Teilchen im E-M-Feld mit Ladung e

ϕ : el. Potential

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - e (\phi(\vec{x}) - \vec{A}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}) \quad ; \quad \vec{A}: \text{Vektorpotential}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \dot{\vec{x}} + e \vec{A}$$

kanonisch-konjugierte Impuls
 $\neq$ mechanischer Linearimpuls

$$H = \dot{\vec{x}} \vec{p} - L = \frac{(\vec{p} - e \vec{A})^2}{2m} + e \phi$$

(in QM: $H \rightarrow \hat{H}$: Hamilton-Operator)

mit $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{Bewegungsintegral}$

Hinweis: H in verschiedenen Koordinatensystemen ohne
Zwangsbedingungen mit $V = V(\vec{x})$

091

- kartesisch: $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$; $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ mechanischer
linearimpuls

- zylinderkoordinaten: (ρ, φ, z)

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 + p_z^2 \right) + V(\rho, \varphi, z)$$

$$p_\rho = m \dot{\rho} ; p_\varphi = m \rho^2 \dot{\varphi} ; p_z = m \dot{z}$$

$\neq$ mechanische linearimpulse

- Kugelkoordinaten: (r, Θ, φ)

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\Theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} p_\varphi^2 \right) + V(r, \Theta, \varphi)$$

$$p_r = m \dot{r} ; p_\Theta = m r^2 \dot{\Theta} ; p_\varphi = m r^2 \sin^2 \Theta \dot{\varphi}$$

Hamilton-Gleichungen aus Variationsprinzip / Prinzip der kleinsten Wirkung

mit $L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p})$

mit $\underline{q}$ und $\underline{p}$ unabhängige Variablen

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt L = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}) \right)$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

mit $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$ und $\int dt p_i \delta \dot{q}_i \stackrel{\text{p. I.}}{=} - \int dt \dot{p}_i \delta q_i$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{i=1}^n \left(\delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}} \quad \text{und} \quad \boxed{\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

da q_i und p_i unabh. voneinander

Fermatsche Prinzip

für konservatives System $H = T + V = \text{const}$
gilt (Satz)

$$\Delta S' = \Delta \int_{t_A}^{t_E} dt \, \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} = 0$$

wobei $\Delta q = \delta q + \dot{q} \Delta t$

hier: unterschiedliche Lauf-
zeiten der Testbahnen
möglich

vgl. virtuelle Umrichtung
 $\delta t = 0 \Rightarrow$ alle Testbahnen
haben gleiche Laufzeit

für kreisförmige Bewegung:

$$V = \text{const} \Rightarrow T = \text{const.} \Rightarrow \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = 2T$$

$$\text{mit } \Delta S' = 2T \Delta \int_{t_A}^{t_E} dt = 0 \Rightarrow \text{Bahn mit minimaler Laufzeit wird realisiert}$$

$\Rightarrow$ Fermat'sche Prinzip (vgl. Optik)

für kraftfreie Bewegung: $v = \text{const}$ (Geschw.)

$$dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow \Delta s' = 0 = \frac{2T}{v} \Delta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

$\Rightarrow$ zugleich extreme (minimale) Wegstrecke

= Geodäte

Poisson-Klammer

nützliches mathematisches Werkzeug; z.B. kompakte Darstellung der Bewegungsgleichungen

Vorbemerkung: (mechanische) Systeme beschrieben in unterschiedlichen Darstellungsräumen:

1) Konfigurationstraum: $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$; $\dim = n$

(generalisierte) Koordinaten

2) Ereignisraum: $\underline{q} + t = \text{Zeit}$; $\dim = n+1$

(Ereignis-)Bahnen bestimmt durch $2n$ Anfangsbedingungen, z.B. $\underline{q}(t_A)$ und $\underline{\dot{q}}(t_E)$ oder

$q(t_0)$ und $\dot{q}(t_0)$ Orte und Geschwindigkeiten (*) 095

Lagrange - Formalismus

$\Leftrightarrow$ Ereignisraum

(*) + Euler-Lagrange - Gleichungen
(DGLs 2. Ordnung)

3) Phasenraum: $(\underline{q}, \underline{p})$ Dim = $2n$

mit $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$; $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$

$\underline{p}$ und $\underline{q}$ gleichberechtigte Variablen

$\underline{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$

Menge aller Punkte, die im Phasenraum $\underline{\pi}$ durchlaufen werden: Phasenbahn, Phasentrajektorie

z.B. harmonischer Oszillator:

$$\frac{p^2}{2m\epsilon} + \frac{q^2}{2\epsilon/m\omega^2} = 1 \quad \text{Ellipse}$$

4) Zustandsraum:

Phasenraum + Zeit t ; Dim = $2n + 1$

$(\underline{\pi}, t)$: allgemeiner Darstellungsräum, andere Räume sind Projektionen auf Zustandsraum (z.B. Konfigurationsraum)

Behruen durch Hamilton Bewegungsgleichungen im Zustandsraum (= Phasentrajektorien)

DGLs 1. Ordnung $\rightarrow$ bestimmt für alle Zeiten durch
 $\underline{\pi}(t_0) = \underline{\pi}_0$

Hamilton-Formalismus $\Leftrightarrow$ Zustandsraum

Poisson-Klammern

zur Formalisierung von Bewegungsgleichungen und Erhaltungsgrößen
 betrachte Funktionen auf Zustandsraum (z.B. Hamilton-Funktion)

$$f(\underline{\pi}, t) = f(\underline{q}, \underline{p}, t)$$

$$\text{mit } \frac{d}{dt} f = \sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{\text{Poisson-Klammer } f \text{ mit } H} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Poisson-Klammer f mit H : $\{f, H\}_{\underline{q}, \underline{p}}$

Def.: $f(\underline{q}, \underline{p})$ und $g(\underline{q}, \underline{p})$ Funktionen von $\underline{q}, \underline{p} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\{f, g\}_{\underline{q}, \underline{p}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)}$$

Poisson-Klammer f mit g

d.h. zeitliche Änderung von f entlang Bewegungsbahn
= Zustandsraum

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\text{Bsp.: } H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{p_i}{m}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x})$$

insbesondere:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad ; \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

Fundamentale Poisson-Klammeren

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0 \right)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}$$

Poisson-Klammern unabhängig von der Wahl der kanonischen Variablen:

kanonisch-konjugierte Variablen erfüllen fundamentale Poissonklammern, d. h. wenn Transformation

$$\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, \underline{p}, t) \quad \text{und} \quad \underline{P} = \underline{P}(\underline{q}, \underline{p}, t) \quad \text{mit}$$

$$\tilde{L}(\underline{Q}, \underline{P}) = H(\underline{Q}, \underline{P}) \quad \text{durch einsetzen} \\ = H(\underline{q}, \underline{p})$$

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\} \quad \text{und} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \left| \{F, G\}_{\underline{Q}, \underline{P}} = \{F, G\}_{\underline{q}, \underline{p}} \right|$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial F(\underline{Q}, \underline{P})}{\partial Q_i} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right)$$

$$\text{analog} \quad \frac{\partial F(\underline{Q}, \underline{P})}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right)$$

$$\begin{aligned}
\{F, G\}_{Q,P} &= \sum_i \left[\sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \sum_k \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial G}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \right] \\
&= \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial P_k} - \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial Q_k} \right) \underbrace{\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right)}_{\delta_{jk}} \\
&= \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial P_j} - \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial Q_j} \right) \\
&= \{F, G\}_{Q,P}
\end{aligned}$$

Rechenregeln:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad ; \quad \{f, f\} = 0$$

linear:

$$\{\alpha f_1 + \beta f_2, g\} = \alpha \{f_1, g\} + \beta \{f_2, g\}$$

Produktregel:

$$\{f, gh\} = g \{f, h\} + \{f, g\} h$$

Jacobi - Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

(zyklische Vertauschung)

Konstante der Bewegung

$F(q, p, t)$ konstante der Bewegung

$$\frac{d}{dt} F = 0 = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \{H, F\} = -\frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{Kriterium für Bewegungsintegral}$$

z.B. Hamilton-Funktion H

$$\frac{d}{dt} H = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

d.h. H Bewegungsintegral, wenn H nicht explizit von t abhängig

bei skleronomer Zwangsbedingungen

$H = E$ Gesamtenergie

Poisson'scher Satz:

wenn I_1 und I_2 Integrale der Bewegung, dann

$I_3 = \{I_1, I_2\}$ auch Bewegungsintegral

mit

$$0 = \{H, \{I_1, I_2\}\} + \underbrace{\{I_1, \{I_2, H\}\}}_{-\frac{\partial I_2}{\partial t}} + \underbrace{\{I_2, \{H, I_1\}\}}_{\frac{\partial I_1}{\partial t}}$$

verwende:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$$

$$\Rightarrow 0 = \{H, \{I_1, I_2\}\} + \frac{\partial}{\partial t} \{I_2, I_1\}$$

$$\Rightarrow \{H, \{I_1, I_2\}\} = \frac{\partial}{\partial t} \{I_1, I_2\}$$

Anmerkung: Ausblick auf QM

Axiomatische Formulierung mit verallgemeinerter Poisson-Klammer

$$\{A, B\} \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad \text{Kommutatoren}$$

$\hat{A}, \hat{B}$: Operatoren (z.B. Differentialoperatoren, Matrizen)

- Observablen / Meßgrößen : Eigenwerte der Operatoren
- Fundamentalkommutator

$$[q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \Rightarrow \text{Heisenbergsche Unschärferelation}$$

$\hbar = h/2\pi$; h : Plancksches Wirkungsquantum

- Hamilton-Funktion
 $\hookrightarrow$ Hamilton-Operator

- Bewegungsgleichung : $\frac{d}{dt} \hat{A} = \frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}$

Hamilton-Jacobi-Theorie

Lösungen des Systems (Differentialgleichungen) durch geeignete Wahl kanonischer Transformation

Lagrange- und Hamilton-Gleichungen sind form-invariant unter Punkttransformation $\underline{q} \rightarrow \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q})$ und mechanische Eichtransformation: $\underline{L} \rightarrow \underline{L} + \frac{d}{dt}f$
 $(\rightarrow \underline{\tilde{H}} = \underline{H} - \frac{\partial f}{\partial t})$

kanonische Phasenraumtransformation

$$\underline{\pi} \rightarrow \underline{\tilde{\pi}} = \underline{\tilde{\pi}}(\underline{\pi}) \quad \text{bzw.} \quad (\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}}) \\ = (\underline{\tilde{q}}(\underline{q}, \underline{p}), \underline{\tilde{p}}(\underline{q}, \underline{p}))$$

kanonisch wenn
 kanonischen Gleichungen erhalten bleiben:

$$\dot{\underline{\tilde{q}}}_i = \frac{\partial \underline{\tilde{H}}}{\partial \underline{\tilde{p}}_i} \quad ; \quad \dot{\underline{\tilde{p}}}_i = - \frac{\partial \underline{\tilde{H}}}{\partial \underline{\tilde{q}}_i}$$

Bemerkung: Bestimmung von $\tilde{H}$ nicht vorgeschrieben

$$\text{aber } \tilde{H} = H(\underline{q}(\tilde{q}, \tilde{p}, t), \underline{p}(\tilde{q}, \tilde{p}, t), t)$$

Durch Einsetzen: kanonisch im eigentlichen Sinne

Fundamentale Poisson-Klammern erhalten

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = 0 = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} ; \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}$$

Bsp.:

$$1) \quad \dot{\tilde{q}}_i = -\dot{p}_i \quad \text{und} \quad \dot{\tilde{p}}_i = \dot{q}_i \quad \text{"Vertauschung" von } q \text{ und } p$$

$$\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = H(\tilde{p}, -\tilde{q})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_i} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{p}_i}}_{\delta_{ji}} = \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = \dot{\tilde{q}}_i$$

$$\text{analog } \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = -\dot{\tilde{p}}_i$$

kanonische Gleichungen bleiben erhalten

→ Bedeutung von q und p im Hamilton-Formalismus
abstrakt

2) zyklische Koordinaten / Variablen
Transformation möglich, sodaß alle Koordinaten q
zyklisch?

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \text{const.} \quad i = 1 \dots n$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i(h_1, \dots, h_n) \quad ; \quad h_i = \text{const.}$$

$$\hookrightarrow q_i = \text{const.} \quad ; \quad \text{Annahme} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

im Prinzip möglich $\rightarrow$ Hamilton-Jacobi-Theorie

Erzeugende Funktionen der Transformation

für kanonische Transformation $(\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}})$ gilt
(Satz)

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} + \frac{d}{dt} \bar{F},$$

wobei $\bar{F} = \bar{F}(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t)$ beliebige Funktion der
ursprünglichen q und
transformierten $\tilde{q}$

F_1 : Erzeugende der Transformation

Beweis:

1) modifiziertes Hamilton-Prinzip erfüllt:

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \right)$$

↳ kanonische Gleichungen

- Bestimmung von $\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t)$ aus F_1 :

$$dF_1 = dF_1(q, \tilde{q}, t) = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} d\tilde{q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

$$\text{und } dF_1 = \sum_i (p_i dq_i - \tilde{p}_i d\tilde{q}_i) + (\tilde{H} - H) dt$$

aus Koeffizientenvergleich:

$$\left| p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right| ; \left| \tilde{p}_i = - \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \right| ; \left| \tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right|$$

$$\Rightarrow \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1(q, \tilde{q}, t)}{\partial t}$$

Bemerkung: F_1 bestimmt Phaseentrformierung v ollständig

$$\text{aus } p_i = p_i(q, \tilde{q}, t) = \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t)$$

durch Umkehrung

$$\text{in } \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q, \tilde{q}, t) = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i}$$

$$\hookrightarrow \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q, p, t)$$

$$\text{mit } S' = \int_{t_A}^{t_E} \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H}(q, p, t) \right) dt = \int_{t_A}^{t_E} \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H}(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t) + \frac{d}{dt} F_1 \right) dt$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} \right) dt + F_1(q_E, \tilde{q}(t_E), t_E) - F_1(q_A, \tilde{q}(t_A), t_A)$$

$$\Rightarrow \delta S' = \int_{t_A}^{t_E} \left(\sum_i \left[\dot{\tilde{q}}_i \delta \tilde{p}_i + \tilde{p}_i \delta \dot{\tilde{q}}_i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \delta \tilde{q}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \delta \tilde{p}_i \right] + \delta [F_1|_{t_E} - F_1|_{t_A}] \right) dt$$

$$\text{mit } \int dt \tilde{p}_i \delta \dot{\tilde{q}}_i = \int dt \tilde{p}_i \frac{d}{dt} \delta \tilde{q}_i = - \int dt \dot{\tilde{p}}_i \delta \tilde{q}_i + \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i \Big|_{t_A}^{t_E}$$

$$\text{beachte: } \delta \tilde{q}_i(t_{A,E}) \neq 0$$

$$\delta q \tilde{q}_i(t_{A,E}) = \tilde{q}_i(q_{A,E}, p(t_{A,E}), t_{A,E})$$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i \left[\left(\dot{\tilde{q}}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \right) \delta \tilde{p}_i - \left(\dot{\tilde{p}}_i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \right) \delta \tilde{q}_i \right]$$

$$+ \sum_i \underbrace{\left(\tilde{p}_i + \frac{\partial F_i}{\partial \tilde{q}_i} \right)}_{=0} \delta \tilde{q}_i$$

$$; \quad S[F_{I,E} - F_{I,A}] = \sum_i \left. \frac{\partial F_i}{\partial \tilde{q}_i} \right|_{t_A}^{t_E} \delta \tilde{q}_i$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \dot{\tilde{q}}_i \\ \tilde{q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \end{array} \right] ; \left[\begin{array}{c} \dot{\tilde{p}}_i \\ \tilde{p}_i = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \end{array} \right]$$

d.h. kanonische
Gleichungen

$\hat{=}$ kanonische
Transformation

Bsp.: Harmonischer Oszillator

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{wobei:} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{Feder} \\ \quad = \frac{g}{l} \quad \text{Pendel} \end{array} \right)$$

mit $\overline{F}_1(q, \tilde{q}) = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \cot \tilde{q}$
(motiviert durch Vereinfachung)

$$p = \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial q} = m \omega_0 q \cot \tilde{q}$$

$$\tilde{p} = - \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial \tilde{q}} = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 \tilde{q}}$$

$$q = \sqrt{\frac{2 \tilde{p}}{m \omega_0}} \sin \tilde{q} ; \quad p = \sqrt{2 \tilde{p} m \omega_0} \cos \tilde{q}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t) &= H(q(\tilde{q}, \tilde{p}, t), p(\tilde{q}, \tilde{p}, t), t) + \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial t} \\ &= H(q, p) \end{aligned}$$

$$= \tilde{p} \omega_0 \cos^2 \tilde{q} + \tilde{p} \omega_0 \sin^2 \tilde{q}$$

$$= \tilde{p} \omega_0 \quad \text{nur von } \tilde{p} \text{ abhängig}$$

$$\dot{\tilde{p}} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = 0 = \tilde{p} = \tilde{p}_0$$

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = \omega_0 \rightarrow \tilde{q} = \omega_0 t + \tilde{q}_0$$

$$\rightarrow q(t) = \sqrt{\frac{2\tilde{p}_0}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + \tilde{q}_0)$$

$$p(t) = \sqrt{2\tilde{p}_0 m\omega_0} \cos(\omega_0 t + \tilde{q}_0)$$

=> Problem sehr vereinfacht durch passende Transformation

aber: Bestimmung der Erzeugende?

↳ Aufgabe der Hamilton-Jacobi-Theorie

Weitere Erzeugende

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_1(q, \tilde{q}, t)$$

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_2(q, \tilde{p}, t)$$

$$\overline{F}_3 = \overline{F}_3(p, \tilde{q}, t)$$

$$\overline{F}_4 = \overline{F}_4(p, \tilde{p}, t)$$

Bestimmung der Erzeugenden $F_2, \tilde{F}_2, F_2$ durch Legendre-Transform. 112

$$\underline{F_2 = F_2(q, \tilde{p}, t)}$$

$$F_2(q, \tilde{p}, t) = F_1(q, \tilde{q}, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \tilde{q}_i = F_1(q, \tilde{q}, t) + \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{q}_i$$

$$\text{mit } dF_1 = \sum_{i=1}^n (p_i dq_i - \tilde{p}_i d\tilde{q}_i) + (\tilde{H} - H) dt$$

$$dF_2 = dF_1 + \sum_{i=1}^n (\tilde{p}_i d\tilde{q}_i + \tilde{q}_i d\tilde{p}_i) = \sum_{i=1}^n (p_i dq_i + \tilde{q}_i d\tilde{p}_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}} ; \boxed{\tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i}} ; \boxed{\tilde{H} - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}} + (\tilde{H} - H) dt$$

F_2 erzeugt kanonische Transformation

↳ zu zeigen aus modifiziertem Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta S = 0 = \delta \int dt (\tilde{p} \dot{\tilde{q}} - \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t))$$

$$\boxed{\bar{F}_3 = \bar{F}_3(p, \tilde{q}, t)}$$

$$= \bar{F}_1 - \sum \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} q_i$$

$$\boxed{q_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial p_i}}$$

$$\boxed{p_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \tilde{q}_i}}$$

$$\boxed{\tilde{H} - H = \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial t}}$$

$$\boxed{\bar{F}_4 = \bar{F}_4(p, \tilde{p}, t)}$$

$$= \bar{F}_1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} q_i - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \tilde{q}_i} \tilde{q}_i \right) = \bar{F}_1 - (\underline{p} \cdot \underline{q} + \underline{\tilde{p}} \cdot \underline{\tilde{q}})$$

$$\Rightarrow \boxed{q_i = -\frac{\partial \bar{F}_4}{\partial p_i}}$$

$$\boxed{\tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial \tilde{p}_i}}$$

$$\boxed{\tilde{H} - H = \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial t}}$$

	$\tilde{q}$	$\tilde{p}$
	$\bar{F}_1(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t)$	$\bar{F}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t)$
q	$p_i = \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} ; \tilde{p}_i = -\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \tilde{q}_i}$	$p_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i} ; \tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \tilde{p}_i}$
	$\bar{F}_3(\underline{p}, \underline{\tilde{q}}, t)$	$\bar{F}_4(\underline{p}, \underline{\tilde{p}}, t)$
p	$q_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial p_i} ; \tilde{p}_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \tilde{q}_i}$	$q_i = -\frac{\partial \bar{F}_4}{\partial p_i} ; \tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial \tilde{p}_i}$

Bsp.: 1) Punkttransformation

$$\text{mit } \bar{F}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t) = \sum_{i=1}^n f_i(\underline{q}, t) \tilde{p}_i$$

$$\tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = f_i(\underline{q}, t)$$

Punkttransformation im
Konfigurationsraum

$$p_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \tilde{p}_j \rightarrow \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t)$$

kanonisch konjugierte Impulse durch Richttransformation,

115

z.B. Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = f_r$$

$$\varphi = \arctg(y/x) = f_\varphi$$

$$p_x = \frac{\partial f_r}{\partial x} p_r + \frac{\partial f_\varphi}{\partial x} p_\varphi = \frac{x}{r} p_r - \frac{y}{r^2} p_\varphi$$

$$p_y = \frac{\partial f_r}{\partial y} p_r + \frac{\partial f_\varphi}{\partial y} p_\varphi = \frac{y}{r} p_r + \frac{x}{r^2} p_\varphi$$

$$\omega \quad p_r = \frac{x p_x + y p_y}{r} ; \quad p_\varphi = x p_y - y p_x \quad \text{Drehimpuls}$$

2) mechanische Eichtransformation

mit $f(q, t)$ Eichfunktion

$$\tilde{H} = H - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{aus} \quad \tilde{L} = L + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\bullet \quad q_i = \tilde{q}_i \quad \text{und} \quad \tilde{p}_i = p_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

Konstruktion der Erzeugenden
aus Legendre-Transformation:

$$\bar{F}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t) = \sum_{i=1}^n q_i \tilde{p}_i - f(\underline{q}, t)$$

$$\omega \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = q_i \quad \text{und} \quad p_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i} = \tilde{p}_i - \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial t} = H - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Phasentransformation kanonisch wenn fundamentale
Poisson-Klammeren erfüllt sind

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = 0 \quad \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0 \quad ; \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}$$

Hamilton-Jacob-Gleichungen

Motivation: Vereinfachung des Systems (Hamilton-Funktion,
Differentialgleichungen) durch geeignete Transformation:

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial t} = 0 \quad (*)$$

⇒ Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = 0 & \Rightarrow \tilde{q} &= \text{const} \\ \dot{\tilde{p}}_i &= - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = 0 & \Rightarrow \tilde{p} &= \text{const} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = 0 \\ \dot{\tilde{p}}_i &= - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = 0 \end{aligned}} \right\} \text{triviale Lösungen der Differentialgleichungen}$$

mögliche Erzeugende: $\bar{F} = \bar{F}_2 = F_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t)$

(andere Erzeugende auch möglich)

$$p_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i} \quad ; \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = \text{const}$$

in (*)

$$\left| H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial t} = 0 \right|$$

Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung
Bestimmungsgleichung für Erzeugende $\bar{F}_2$

Bemerkungen:

- Hamilton-Jacobi-Gleichung
 - nicht-lineare, partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für $\bar{T}_2$ mit $n+1$ Variablen $(q, \dots, q_n, t)$

nicht-linear: H i. A. quadratische Funktion der Impulse

1. Ordnung: nur $\partial \bar{T}_2 / \partial q_i$ und $\partial \bar{T}_2 / \partial t$ treten auf

- mit $n+1$ Ableitungen 1. Ordnung:
 $n+1$ Integrationskonstanten: $C_1, \dots, C_n, C_t$

für Lösung:

$$\bar{T}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t | C_1, \dots, C_n) + C_t$$

vollständige
Lösung

aber H hängt nur von Ableitungen
von $\bar{T}_2$ ab $\Rightarrow C_t = 0$ o. B. A.

- konstante Impulse
 $\underline{\tilde{p}}$: unbestimmt

daher möglich $\tilde{p}_i = C_i$

$\Rightarrow$ vollständige Lösung für $\bar{F}_2$

$$\bar{F}_2(q, t | \underline{c}) \quad ; \quad \underline{c} = (c_1, \dots, c_n) \text{ Konstanten}$$

- Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung ist die Wirkung S der zugehörigen Hamilton-Funktion

$$\bar{F}_2 = S$$

$$\frac{d}{dt} \bar{F}_2 = \sum_{i=1}^n (\bar{p}_i \dot{q}_i + \dot{\bar{q}}_i \bar{p}_i) + \bar{H} - H$$

$$= \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \dot{q}_i - H \quad (\dot{\bar{p}} = 0 ; \bar{H} = 0)$$

$$= L$$

$$\Rightarrow \bar{F}_2 = \int dt L = S \quad \text{im Hamilton-Jacobi-Formalismus}$$

$\Rightarrow$ "physikalische Bedeutung"

Lösungsmethode mit der Hamilton-Jacobi-Theorie

120

1) Hamiltonfunktion $H = H(\underline{q}, \underline{p}, t)$ aufstellen

2) kanonische Impulse

$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ durch partielle Ableitungen ersetzen

3) Lösen der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

$$\bar{F}_2 = S(\underline{q}, t | \underline{c}) ; \underline{c} = (c_1, \dots, c_n) \text{ Integrations-} \\ \text{konstanten}$$

wobei $\tilde{\underline{p}} = \underline{c}$ konstante "neue" Impulse

4) Berechnung der generalisierten Koordinaten

$$\tilde{q}_i := \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial S}{\partial c_i} = \tilde{q}_i(\underline{q}, t | \underline{c}) = \underline{\alpha} = \text{const.} \\ (\text{aus } \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \tilde{p}} = 0)$$

und nach $\underline{q}$ auflösen

$$\underline{q} = \underline{q}(\tilde{\underline{q}}, t | \underline{c}) = \underline{q}(t | \underline{\alpha}, \underline{c})$$

5) Berechnung der generalisierten Impulse

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q(t | \underline{\alpha}, \underline{c})) = p_i(t | \underline{\alpha}, \underline{c})$$

6) Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = t_0$

$$q(t_0 | \underline{\alpha}, \underline{c}); \quad p(t_0 | \underline{\alpha}, \underline{c})$$

$$\text{liefert } \tilde{\underline{q}}_0 \text{ und } \tilde{\underline{p}}_0 \rightarrow \underline{\alpha}, \underline{c}$$

7) einsetzen in $\underline{q}$ und $\underline{p}$ liefert vollständige Lösung

$$(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = \underline{\pi}(t)$$

Bsp.: Harmonischer Oszillator (1D)

$$1) \quad H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega_0^2 m q^2$$

$$2) \quad p = \partial F_2 / \partial \dot{q} = \partial S / \partial \dot{q}$$

$$H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t}$$

3) Lösung der Hamilton-Jacob-Gleichung
hier Separationsansatz:

$$S(q, t | \tilde{p}) = W(q | \tilde{p}) + V(t | \tilde{p})$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 = - \frac{\partial V}{\partial t}$$

W und V sind unabhängig; abh. von unabhängigen Variablen (hier: $W(q)$; $V(t)$)

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 = C$$

$$\frac{dV}{dt} = -C$$

zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\rightarrow V(t|C) = -Ct + V_0 \quad ; \quad V_0 = 0 \quad \text{o. B. A}$$

$$\frac{dW}{dq} = \sqrt{m^2 \omega_0^2 \left(\frac{2C}{m \omega_0^2} - q^2 \right)}$$

$$W(q|C) = m \omega_0 \int dq \sqrt{\frac{2C}{m \omega_0^2} - q^2}$$

$$= m \omega_0 \left[\frac{1}{2} q \sqrt{\frac{2c}{m \omega_0^2} - q^2} + \frac{c}{m \omega_0^2} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m \omega_0^2}{2c}} \right) \right]$$

$$\rightarrow S(q, t | c) = m \omega_0 \left[\frac{1}{2} q \sqrt{\frac{2c}{m \omega_0^2} - q^2} + \frac{c}{m \omega_0^2} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m \omega_0^2}{2c}} \right) \right] - ct$$

$$4) \quad \tilde{q} = \frac{\partial S}{\partial p^2} = \frac{\partial S}{\partial c} = \frac{\partial \omega}{\partial c} + \frac{\partial \psi}{\partial c}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\omega_0} \int dq \left(\frac{2c}{m \omega_0^2} - q^2 \right)^{-1/2}}_{\frac{1}{\omega_0} \arcsin \left(q \omega_0 \sqrt{\frac{m}{2c}} \right)} - t$$

$$= \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left(q \omega_0 \sqrt{\frac{m}{2c}} \right) - t$$

$$= \alpha = \text{const.}$$

Dimensionen: Zeit

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{2c}{m\omega_0^2}} \sin(\omega_0(t + \alpha)) = q(t | \alpha, c)$$

$$\begin{aligned} 5) \quad p &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}} = m\omega_0 \sqrt{\frac{2c}{m\omega_0^2} - \dot{q}^2} \\ &= \sqrt{2cm} \cos(\omega_0(t + \alpha)) \\ &= p(t | \alpha, c) \end{aligned}$$

6) Anfangsbedingungen: $t_0 = 0$; $p_0 = 0$; $q_0 \neq 0$

$$0 = \frac{2c}{m\omega_0^2} - q_0^2 \Rightarrow c = \frac{1}{2} m\omega_0^2 q_0^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 = E$$

$\Rightarrow \tilde{p} = c = E$: Gesamtenergie

mit $[\tilde{q}] = \text{Zeit}$

$\Rightarrow E$ und t sind kanonisch-konjugierte Variablen

(vgl. $[\tilde{E}, t] = i\hbar \hat{=}$ Heisenbergsche Unschärferelation)

$$\text{mit } \alpha = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \sqrt{\frac{m\omega_0^2 q_0^2 / 2}{E}} = \frac{1}{\omega_0} \arcsin(1) = \frac{\pi/2}{\omega_0}$$

7) vollständige Lösung

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\hat{E}}{m\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t) ; \quad p(t) = -\sqrt{2\hat{E}m} \sin(\omega_0 t)$$

Bemerkung:

$F_1(q, \tilde{q}) = \frac{1}{2} m \omega_0 q \cot(\tilde{q})$ kann Legendre-Transformation
aus $F_2(q, \tilde{p})$ gewonnen werden

Hamiltonsche charakteristische Funktion

Separationssatz für F_2 (in Hamilton-Jacobi-Gleichung)
sich voll, wenn

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H : \text{Integral der Bewegung}$$

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Hamilton-Jacobi-
Gleichung

$$\Rightarrow S(q, \tilde{p}, t) = W(q | \tilde{p}) - Et$$

Separationssatz

$$\Rightarrow H(q, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}) = E$$

Gesamtenergie für
Skalaronome Zwangsbed.

$\omega(q/\tilde{p})$: Hamiltonsche charakteristische Funktion

$\hat{=}$ Erzeugenden einer kanonischen Transformation im
eigenen Sinne mit

$$p_i = \frac{\partial \omega}{\partial q_i} ; \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{p}_i} \quad \text{durch Einsetzen:}$$

$$\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p})$$

Weitere Separation von Variablen

6 mögliche Problemlösungen, die nur mit dem Hamilton-
Jacobi-Verfahren möglich sind. z.B. 3 Körper-Problem,
Zweizentrenproblem; A_2^+ von

$$\text{mit } H(q, \frac{\partial \omega}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial q_n}) = E$$

wenn q_1 und $\partial \omega / \partial q_1$ in der Form $f(q_1, \frac{\partial \omega}{\partial q_1})$

$$\rightarrow H(f, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial \omega}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial q_n}) = E$$

→ möglicher Ansatz

$$\omega(\underline{q} | \underline{\tilde{p}}) = \omega'(\underline{q}_2 \dots \underline{q}_n | \underline{\tilde{p}}) + \omega_1(q_1, \underline{\tilde{p}})$$

$$\Rightarrow f(q_1, \frac{\partial \omega}{\partial q_1}) = C_1 = f(q_1, \frac{d\omega}{dq_1}) \quad \text{gewöhnliche DGL}$$

$$\Rightarrow \#(C_1, q_2 \dots q_n, \frac{\partial \omega}{\partial q_2} \dots \frac{\partial \omega}{\partial q_n}) = E$$

Idealfall: alle generalisierten Koordinaten und Ableitungen lassen sich separieren

$$\omega = \sum_i \omega_i(q_i | \underline{\tilde{p}})$$

→ Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H_i(q_i, \frac{d\omega}{dq_i} | \underline{\tilde{p}}) = \alpha_i = \tilde{p}_i$$

↖ mögliche Wahl

vollständig separabel in gewöhnliche Differentialgleichungen

Bsp.: Teilchen im Zentralpotential : $V(r)$

- Beschreibung mit Kugelkoordinaten, wobei $\theta = \pi/2$
 (r, θ, φ)

$$\Rightarrow \underset{(1)}{q_r} = r ; \quad \underset{(2)}{q_\varphi} = \varphi$$

$$\Rightarrow H(r, p_r, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r)$$

$$p_r = m \dot{r} ; \quad p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}$$

φ : zyklisch $\rightarrow p_\varphi = \text{const}$: Drehimpuls

Ausatz:

$$W = W_r + \alpha_\varphi \varphi$$

Bemerkung:
 $W = \dots \alpha_u q_u$

wenn q_u
 zyklisch
 $\alpha_u = \text{const}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r) = \hat{E}$$

$$\text{mit } W_r = \int dr \sqrt{2m(\hat{E} - V(r)) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}$$

aus $\mathcal{S} = \mathcal{W} - Et$ und $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tilde{p}_1} = \tilde{q}_1 = \text{const}$

$\tilde{p}_1$: unbestimmt : wähle $\tilde{p}_1 = \tilde{E} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tilde{E}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{E}} - t = \tilde{q}_0 = t_0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{E}} = t + t_0 = \int \frac{m \, dr}{\sqrt{2m(\tilde{E} - V(r)) - \frac{\alpha_{\tilde{q}}^2}{r^2}}}$$

durch Umkehrung : $r(t)$

bzw $\tilde{q}_2 = \text{const} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tilde{p}_2} = \frac{\partial \mathcal{W}_r}{\partial \alpha_\varphi} + \varphi = \varphi_0$

(wähle $\tilde{p}_2 = \alpha_\varphi$)

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int dr \frac{\alpha_\varphi / r^2}{\sqrt{2m(\tilde{E} - V(r)) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}}$$

$\Rightarrow r(\varphi)$

z.B. $V(r) = -\frac{mGM}{r}$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}$$

ρ : Halbparameter

Standardverfahren
für zentrallast-
probleme; auch
für Mehr-körper-
problemen

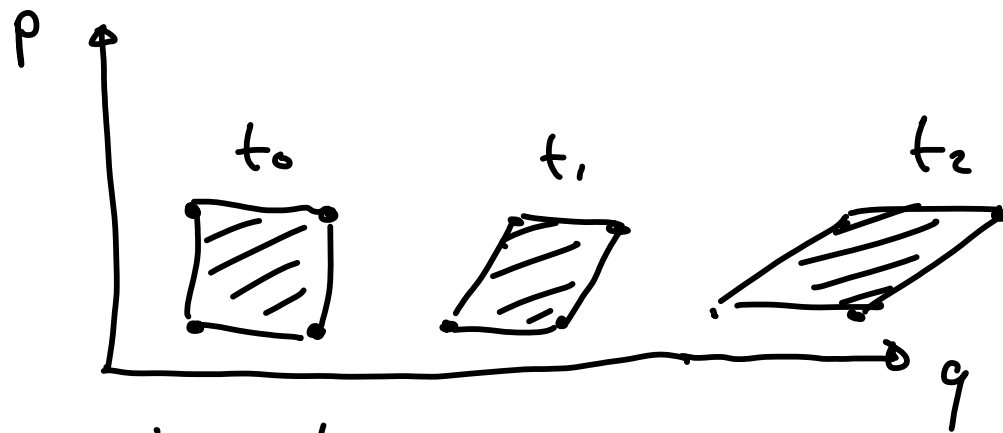
Satz von Liouville

auch Liouville-Theorem:

Aussage über Erhaltung des Phasenraum-Volumens

Bsp. freies Teilchen

$$H = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \dot{p} = 0; \quad \dot{q} = \frac{p}{m} \rightarrow q(t) = \frac{p_0}{m}t + q_0$$



Phasenraum-
volumen auf-
gepunkt von
4 Teilchen
bleibt erhalten

Liouville-Theorem:

$$\left| \frac{d}{dt} V_\pi = 0 \right|$$

Volumen des Phasenraums für
zeitunabhängige Hamiltonsche
Systeme erhalten

mit $\underline{\pi} = (\underline{q}, \underline{p})$ Phasenraum

Differential Phasenraumvolumen:

$$dV_{\pi} = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = d^n q d^n p$$

zeitliche Entwicklung

$$\frac{d}{dt} V_{\pi} = \int d\underline{A} \cdot \underline{\dot{\pi}}$$

$$= \int dV \underline{\nabla} \cdot \underline{\dot{\pi}}$$

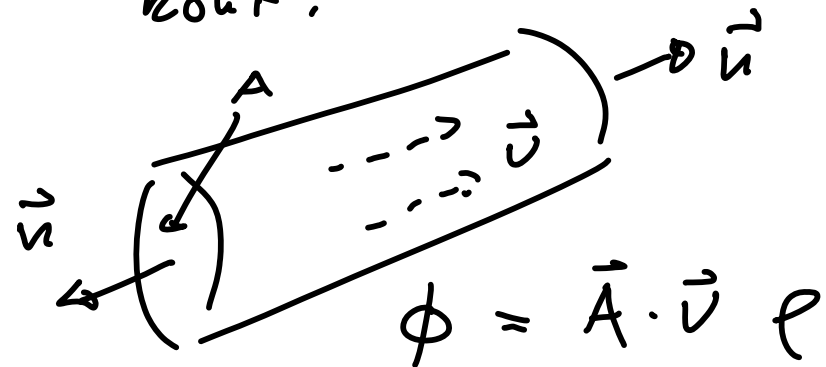
$$= \int dV \underline{\nabla} \cdot \{\underline{\pi}, H\}$$

$$= 0$$

A : Fläche, die das Phasenraumvolumen einschließt

$d\underline{A} = \underline{u} dA$; $\underline{u}$: Flächennormale

vgl. Fluß von Materie durch Rohr:



Wichtig für makroskopische Zustände ($N \sim N_A \sim 10^{24}$)

- Thermodynamik
- Statistische Physik

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \{\underline{\pi}, H\} &= \frac{\partial}{\partial q} \{q, H\} + \frac{\partial}{\partial p} \{p, H\} \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p} \left(- \frac{\partial H}{\partial q} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mechanik der Kontinuuen (Felder)

132

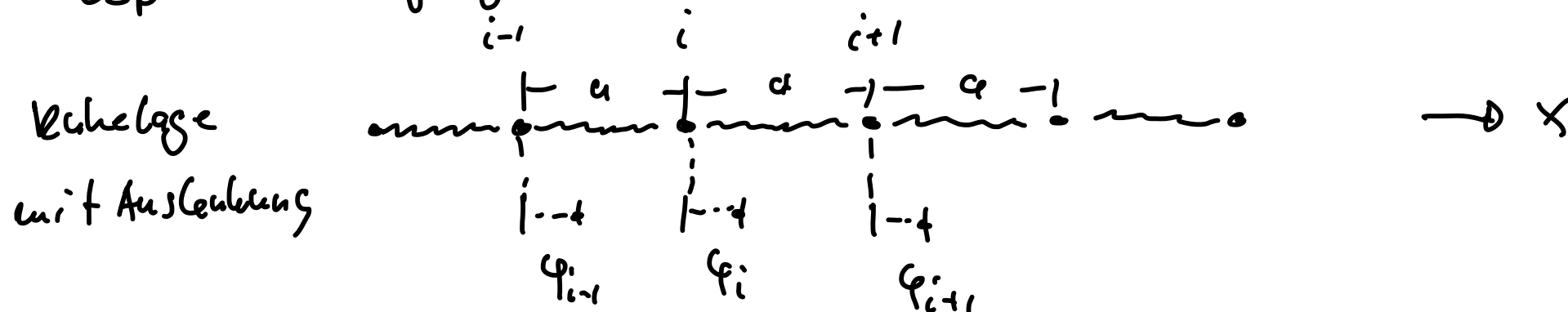
bisher: Betrachtung abzählbar endliche Massenpunkte
(Teilchen)

aber: Beschreibung von $N \sim N_A$ Massenpunkten
(z.B. Gas, Flüssigkeiten, ausgedehnte Körper): Massen-
punktbeschreibung nicht sinnvoll.

→ Übergang $\sum_i m_i \rightarrow \int dV \rho(\vec{x})$ mit
 $\rho(\vec{x})$: Kontinuum / Feld

Übergang: N -Teilchen $\rightarrow$ Kontinuum

Bsp.: Schwingung von Massenpunkten an Federn:



$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N \dot{\varphi}_i^2 \quad \text{gleiche Massen: } m$$

$$V = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \quad \text{gleiche Feder}$$

$$\hookrightarrow F_j = - \frac{\partial V}{\partial \varphi_j} = -k(\varphi_j - \varphi_{j-1}) - k(\varphi_j - \varphi_{j+1})$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (m \dot{\varphi}_i^2 - k (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2) ; \quad N \gg 1 : \text{ ignore } \dot{\varphi}_N$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} a \left(\mu \dot{\varphi}_i^2 - x \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a} \right)^2 \right) ; \quad \mu = \frac{m}{a} \quad \text{Masse pro Länge}$$

x : Elastizitätsmodul
 $x = a k$

$$= \frac{1}{2} \sum_i a \mathcal{L}_i ; \quad \mathcal{L}_i : \text{Lagrange-Funktion pro Länge}$$

FL 6:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = 0$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\varphi}_i + \kappa \left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{a^2} + \frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{a^2} \right) = 0$$

$$\mu \ddot{\varphi}_i - \kappa \left(\frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{a^2} \right) = 0$$

für $N \rightarrow \infty$: N : # Massenpunkte an Feder
 ↳ kontinuierlicher elastischer Stab

+ $a \rightarrow 0$

mit $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, t) - \varphi(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

i -ter Massenpunkt: $\varphi_i(t) \rightarrow \varphi(x, t)$

$$\text{und } \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{a^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x - \Delta x, t) - 2\varphi(x, t) + \varphi(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Zeitableitungen $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$; $\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$

Lagrange - Funktion

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x \mathcal{L}_i = \int_0^l dx \mathcal{L} \quad ; \quad l : \text{Länge des Stabes}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \mathcal{L}(\partial_t \varphi, \partial_x \varphi) = \mathcal{L}(\dot{\varphi}, \varphi, x)$$

Lagrange - Dichte

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen

$$\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{\kappa} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit } c_s = \sqrt{\kappa/\mu}$$

Lagrange - Formalismus für kontinuierliche Systeme

Allgemein (3D) Lagrange - Funktion

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad ; \quad \mathcal{L} : \text{Lagrange - Dichte}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_t \varphi, \partial_{\vec{x}} \varphi, \vec{x}, t) \quad ; \quad \partial_{\vec{x}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi$$

d.h. $\underline{q} \rightarrow \varphi$; $\underline{\dot{q}} \rightarrow \dot{\varphi}$; $\partial_{\vec{x}} \varphi$ unabhängige Größen

hier für ein Feld $\varphi(\vec{x}, t)$

Bewegungsgleichung?

aus Hamiltonschem Prinzip

$$\delta S = 0 = \delta \int dt d^3x \mathcal{I}$$

Integration über

$$\Omega = t \times V$$

- Variation δ nur bezüglich

$\varphi, \dot{\varphi}, \partial_{\vec{x}} \varphi$, da $\delta t = 0$ und $\delta \vec{x} = 0$ feste
Endpunkte für Zeit und Raum

- keine Variation des Feldes φ an der Oberfläche $\partial\Omega$

$$\delta \varphi(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\text{aber } \delta(\dot{\varphi}, \partial_{\vec{x}} \varphi) \Big|_{\partial\Omega} \neq 0 \quad (\text{vgl. } \dot{q} \Big|_{t_A, t_E} \neq 0)$$

$$0 = \int dt d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\varphi_{,i})} \delta (\varphi_{,i}) \right] \quad \begin{array}{l} \text{Summation} \\ \text{über } i \end{array} \quad 137$$

mit $\delta \dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \delta \varphi$ und $\delta (\varphi_{,i}) = \partial_i \delta \varphi$ ($\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$)

+ part. Integration

$$\int dt d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} = \int d^3x \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi \right]_{t_A}^{t_E}}_{= \text{6 wg. Randbed.}} - \int dt \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta \varphi$$

$$\Rightarrow 0 = \int dt d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \right) \right] \delta \varphi$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{x_i} \varphi)} \right|$$

Euler-Lagrange-Gleichung für kontinuierliche Systeme (Lagrange-dichten)

Vgl. mit elastischem Stab:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2$$

ELG:

$$\Rightarrow 0 = \mu \ddot{\varphi} - \kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Bsp.:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad \Rightarrow \quad - \frac{\partial V}{\partial \varphi} = m \ddot{\varphi}$$

• Klein-Gordon-Gleichung / Boson-Feld

$$\text{aus } \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 - (\vec{\nabla} \varphi)^2) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

$$\Rightarrow -m^2 \varphi = \ddot{\varphi} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad (\square - m^2) \varphi = 0$$

$\square$: d'Alembert-Operator
 $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$

• EM-Feld

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{wobei } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Lorentz-kovariante Formulierung für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ -Felder

Hamiltonsche Formulierung

139

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

zu $\varphi(\vec{x}, t)$ kanonisch konjugierte
Feld; generalisierte Impulsdichte

Hamilton Dichte:

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi, \varphi_{,i}, t) = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} \quad \text{durch Legendre-Transformation}$$

Hamilton-Funktion:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\varphi} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi} \quad ; \quad \dot{\pi} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi}$$

$$\text{wobei} \quad \frac{\delta}{\delta \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_{,i}} \quad \text{Funktional-ableitung}$$

$$\text{vgl.} \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = 0 \quad \text{Euler-Lagrange-Gleichung}$$

oder:

$$\dot{\varphi} = \{ \varphi, \mathcal{H} \} \quad ; \quad \dot{\pi} = \{ \pi, \mathcal{H} \}$$

$$\text{wobei } \{A, B\} = \int d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta \varphi} \frac{\delta B}{\delta \pi} - \frac{\delta A}{\delta \pi} \frac{\delta B}{\delta \varphi} \right)$$

Poisson-
Klammer
für Funktionen

Fundamentale Poissonklammer

$$\{ \varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t) \} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad ; \quad \delta - \text{Funktional}$$

Energieerhaltung / Noether - Theorem

$$\mathcal{L} \text{ nicht explizit von } t \text{ abhängig} \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right)_{\text{expl.}} = 0$$

invariant unter $t \rightarrow t + \delta t$ Zeit-Translation

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_{,i})$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \delta \varphi_{,i}$$

$$\text{mit } \delta \dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \delta \varphi \quad ; \quad \delta \varphi_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \varphi$$

$$\begin{aligned} & + \text{ELG} \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \delta \varphi \right) \quad ; \quad \varphi_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \end{aligned}$$

$$\text{mit } \delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t = \dot{\varphi} \\ = \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \right) \right] \delta t$$

Variation implizit nach t

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t \quad \text{Ableitung im Sinn der Kettenregel auf} \\ \varphi, \dot{\varphi}, \varphi_{,i}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \right) \right] \delta t = 0$$

unabhängig von δt

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \right) \right] = 0$$

Energieerhaltung ($\mathcal{H} = \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L}$: Feldenergiedichte)

Noether-Theorem für $t \rightarrow t + \delta t$ Symmetrie
 Kontinuitätsgleichung für Feldenergie mit entsprechenden
 Feldenergiestrom-Dichte : $j_i = \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}}$

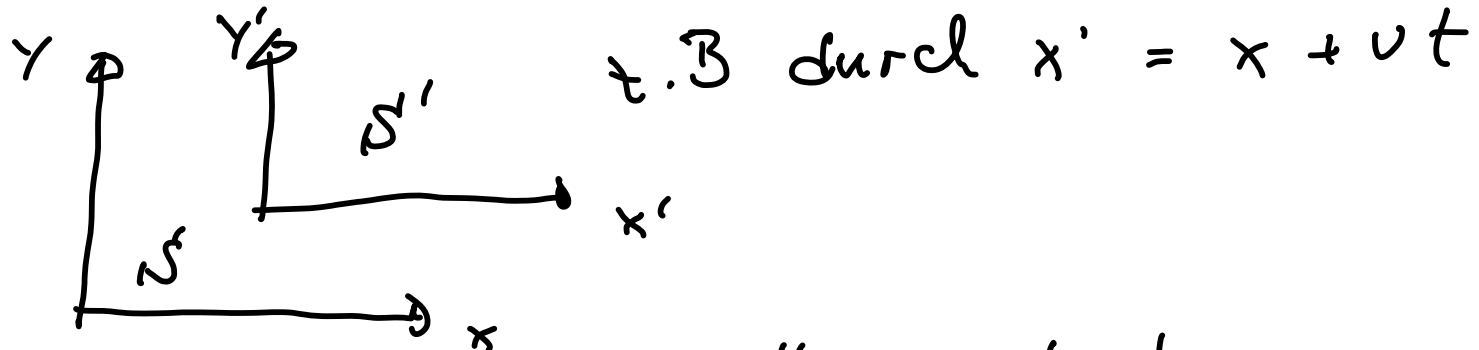
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H} + \vec{0} \cdot \vec{j} = 0$$

Spezielle Relativitätstheorie

- Vereinheitlichung von Raum + Zeit $\rightarrow$ RAUMZEIT
- Vier-Vektoren / Tensoren
- kovariante (Lorentzinvariante) Formulierung
u. a. Elektrodynamik

Postulate:

- Jedes Inertialsystem ist physikalisch identisch
bzw. Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen
die gleiche Form (forminvariant)



bereits in Newtonscher Physik verwendet

↳ Galilei-Transformation möglich ($t = t'$)

- Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen identisch (im Vakuum)

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

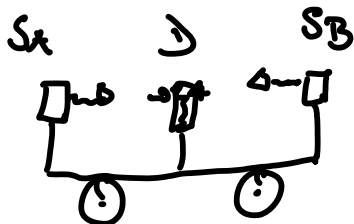
$$\approx 300.000 \text{ km/s}$$

Konsequenzen

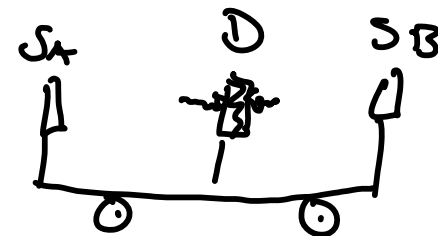
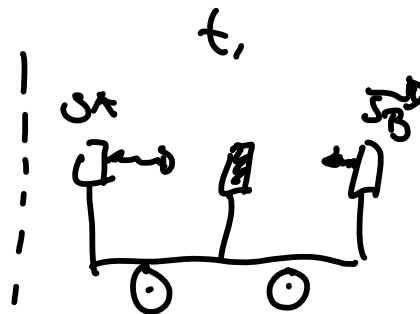
1) Transformation zwischen Inertialsystemen

②

①



Externer und interner Experimentator stimmen überein, dass Signale gleichzeitig ausgesendet wurden



Externer und interner Exp. stimmen nicht überein, dass Signale gleichzeitig von S_A und S_B ausgesendet wurden, wenn diese gleichzeitig bei D ankommen (= physikalische Ereignis!)
 Ereignis!

⇒ Konzept der absoluten Gleichzeitigkeit muß aufgegeben werden 144
 ↳ Gleichzeitigkeit hängt vom Beobachter ab.

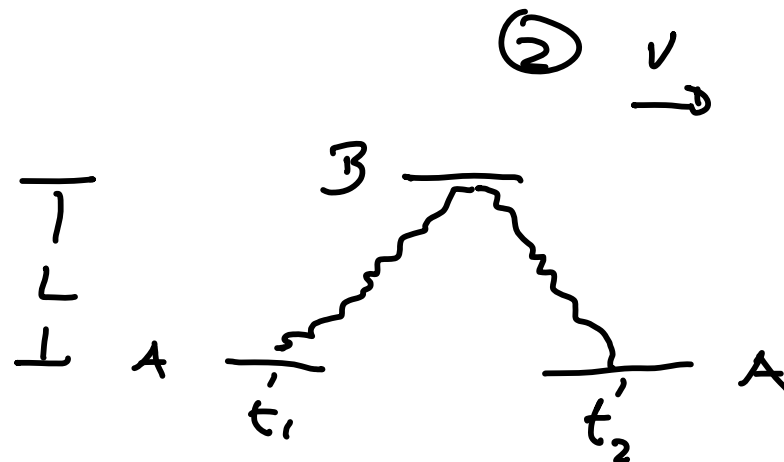
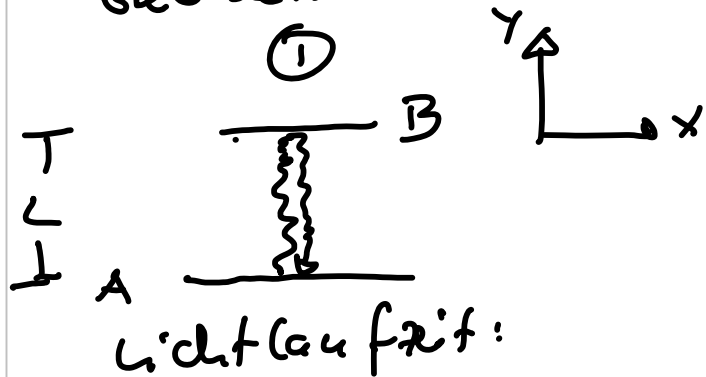
⇒ Transformation muß Zeit t berücksichtigen

$$S: (t, x, y, z) \rightarrow S' (t', x', y', z')$$

⇒ RAUMZEIT: Raum + Zeit: 4-dimensionaler $\mathbb{R}^4$
 (Raum wird durch Geometrie bestimmt; z.B. Euklidischer Raum = flacher Raum)

- Geometrie der flachen RAUMZEIT?
- Welche Transformationen sind möglich?

Geometrie der kt :



Experiment
 mit Relativ-
 geschw. v

$$\Delta t' = 2\sqrt{L^2 + (\Delta x'/2)^2} / c$$

Abnahme : transversale Richtungen unverändert
 - 3D Raum ist Euklidisch = flach

→ L unverändert

$$c^2 \Delta t^2 = 4L^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

$$\rightarrow c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

⇒ invariantes Linienelement

$$\Rightarrow \boxed{\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$$

identisch
in allen
Inertialsystemen

bzw. infinitesimales Linienelement

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Minkowski - Geometrie

= Geometrie der flachen RAUMZEIT

mit 4er Ortsvektor

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3$$

Minkowski-Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$
$$= \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

hier: Signatur:

$$(1, -1, -1, -1)$$

Transformationsvorschrift für Wechsel von Koordinatensystemen

Linienelement ds^2 muß invariant sein

betrachte Relativbewegung in x -Richtung mit

Geschwindigkeit $v = \text{const}$

mit 2×2 Matrix ; $c = 1$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$t' = at + bx$$

$$x' = et + fx$$

$$\Rightarrow ds^2 = dt'^2 - dx'^2 = dt^2 - dx^2$$

$$= (adt + bdx)^2 - (c dt + f dx)^2$$

$$= (a^2 - c^2) dt^2 + (b^2 - f^2) dx^2 + 2(ab - cf) dt dx$$

$\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{aligned} a^2 - c^2 &= 1 \\ b^2 - f^2 &= -1 \\ ab - cf &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a &= \cosh \theta &= t \\ c &= \sinh \theta &= b \\ \cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta &= 1 \end{aligned}$$

Weiterhin
 $\det() = 1$
 $af - bc = 1$

$\Rightarrow$ Lorentz-Transformation

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

vgl. Rotation $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

in 4D-KAUMZEIT: Boost in x -Richtung

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matrix-
multiplikation

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

Verknüpfung mit Relativgeschwindigkeit v :

$$\Theta = \Theta(v)$$

Teilchen in S' in Ruhe : $x' = 0$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Theta & \sinh \Theta \\ \sinh \Theta & \cosh \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$0 = \sinh \Theta \, ct + \cosh \Theta \, x$$

$$\text{mit } v = \frac{x}{t} \Rightarrow v = -c \frac{\sinh \Theta}{\cosh \Theta} = -c \tanh \Theta$$

$$= -c \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 \Theta}}$$

$$\Rightarrow \left[\cosh \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \right] \quad \gamma: \text{Lorentz faktor}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\partial_\mu \Theta = -\beta \gamma$$

$\Rightarrow$ Lorentz-Transformation:

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

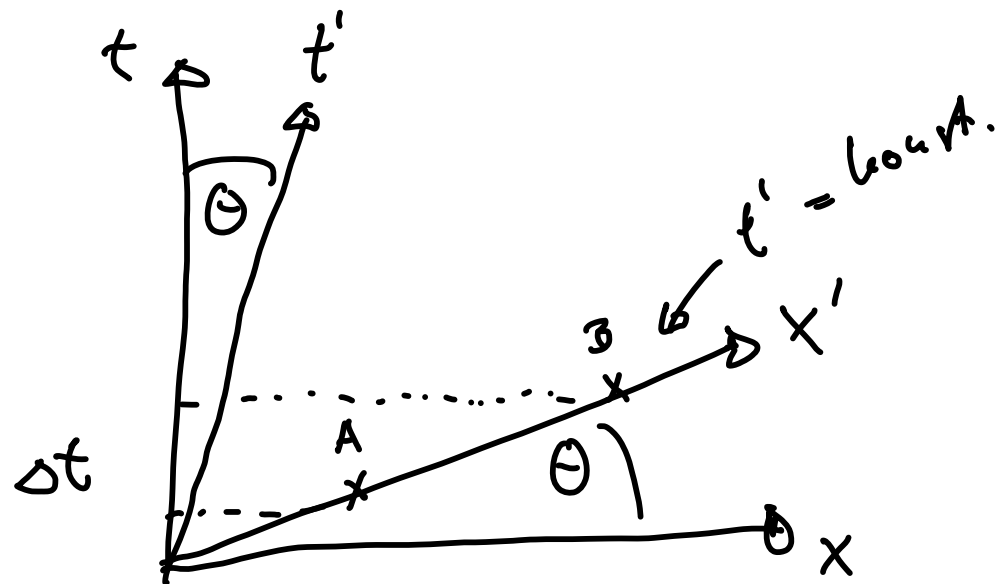
inverse Transformation: $v \rightarrow -v$

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

Konsequenzen aus der LT

mit Raumzeit-Diagrammen / Minkowski-Diagrammen



S' bewegt sich
relativ zu S mit

$$v = \sim \tanh \theta$$

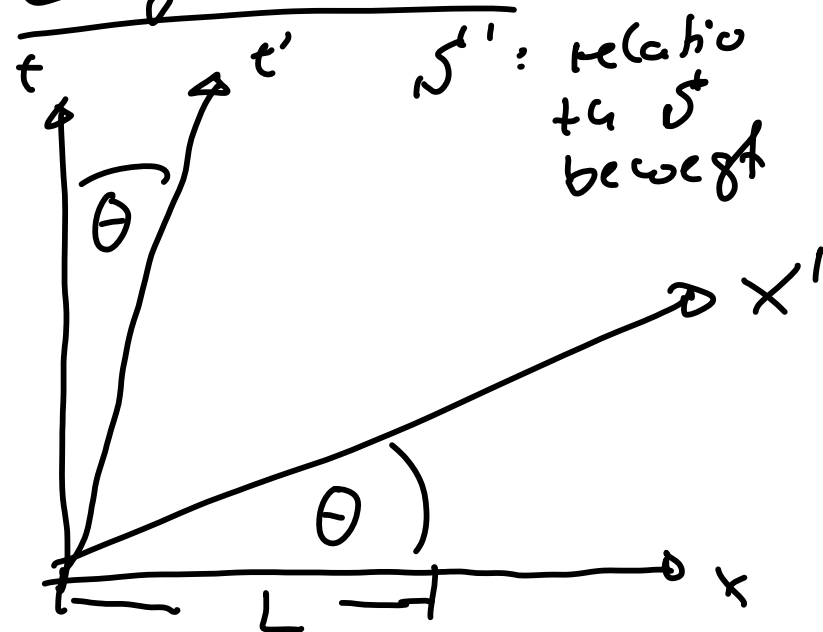
$$\boxed{\text{(hier } c = 1\text{)}}$$

vgl. Rotation: aber auch hier stehen $\vec{e}_t'$ und $\vec{e}_x'$ senkrecht aufeinander

Linien parallel zu x' finden in S' gleichzeitig statt; d.h. $t' = \text{const.}$

$\Rightarrow$ Ereignisse A und B nicht gleichzeitig in S'
(Laborsystem)

• Längenkontraktion



L : Länge einer Stange
im Ruhesystem
= mitbewegtes System
mit Stange

"Länge" eines Objekts:
gleichzeitige Messung der
Enden im ruhenden
System

$$(\Delta t)^2 - L^2 = (\Delta t')^2 - L'^2 \quad \stackrel{!}{=} -L'^2$$

gleichzeitige Messung
der Enden

$$\Delta t = \gamma \left(\underbrace{\Delta t'}_{=0} + v L' \right) = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v L'}{c^2} \right) \quad \text{aus LT}$$

$$\Rightarrow v^2 \gamma^2 L'^2 - L^2 = -L'^2 \quad \Rightarrow \quad L'^2 \underbrace{(1 + v^2 \gamma^2)}_{\gamma^2} = L^2$$

$$\Rightarrow \boxed{L' = L / \gamma} ; \gamma \geq 1$$

Stange ist im nicht-Ruhesystem kürzer,
bzw. kontrahiert

Aussage ist "relativ": relativ zueinander bewegte
Objekte sind kontrahiert

Längenkontraktion:

- kleiner Effekt: z.B. Auto: $360 \text{ km/h} = 100 \text{ m s}^{-1}$
 $\Delta L/L \sim \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \sim 10^{-13}$ $\sim 3 \times 10^{-7} c$

aber: Erklärung für Coulomb-Kraft $\leftrightarrow$
Lorentz-Kraft

Zeitdilatation

bewegte Uhren gehen langsamer

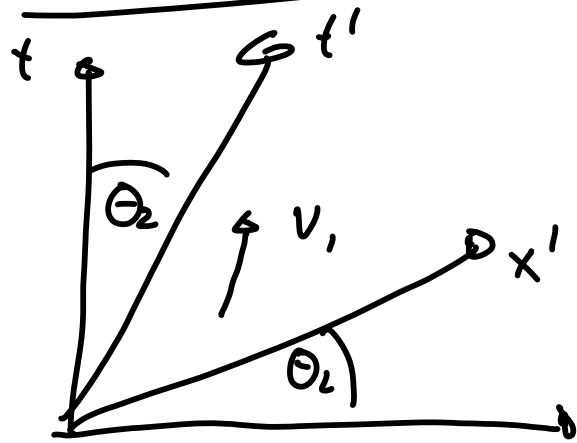
"Uhren": alle physikalischen, biologischen, ...
Zeitmessungen

z.B. Myonen: Erzeugung in Atomsphäre (≈ 10 km Höhe) 153
 durch kosmische Strahlung; $\tau \approx 2 \mu s \rightarrow d \approx 600$ m
 bei $v \approx c$: aber Nachweis an Erdoberfläche möglich

$$D \approx \gamma \tau_0$$

Allgemein: $\Delta t_{\text{bewegt}} = \Delta t_{\text{ruhend}} / \gamma$

Additions-Theorem / Addition von Geschwindigkeiten
 durch hintereinander Ausföhrung
 der Lorentztransformation



mit $v = -\tanh \Theta$

$$\Lambda_3 = \Lambda_2(\Theta_2) \Lambda_1(\Theta_1)$$

mit Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen

$$\Theta_3 = \Theta_1 + \Theta_2$$

wenn v_1 und v_2 in gleicher
 Richtung

$$v_3 = -\operatorname{tg} \varphi(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{\operatorname{tg} \varphi(\theta_1) + \operatorname{tg} \varphi(\theta_2)}{1 + \operatorname{tg} \varphi(\theta_1) \operatorname{tg} \varphi(\theta_2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}}$$

für $v_{1,2} = 1 \quad (= c)$

$$\hookrightarrow v_3 = 1$$

Lichtgeschw. = max.
Geschwindigkeit

Relativistische Kinematik & Dynamik

1) 4er-Geschwindigkeit

vgl. 3er-Geschwindigkeit: $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

$\vec{x}$: Ortsvektor

t : Newtonsche absolute Zeit

in 4D Raumzeit / Minkowski-Raumzeit

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

mit $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 4er-Ortvektor
(mit Index $\mu = 0, 1, 2, 3$)

ds^2 : Lorentz-invariante "Länge" in 4D $\mathbb{R}^4$

=> Lorentz-invariante Zeit :

$$d\tau^2 = ds^2/c^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2$$

τ : "Eigenzeit" : Zeit, die von mitgeführten
Uhren gemessen wird
(im Ruhesystem, d.h. $\Delta x = 0$)

$d\tau^2 \geq 0$ für alle bewegte Objekte
(0 nur für Photonen)

$$\begin{aligned} d\tau &= dt \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2/c^2} && \text{mit } |\vec{v}| = v \\ &= dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = dt/\gamma \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ per Geschwindigkeit:

$$\boxed{u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}}$$

$$\Rightarrow u^0 = u^t = \frac{cdt}{d\tau} = \gamma c$$

$$u^1 = u^x = \frac{dx}{d\tau} = \gamma \frac{dx}{dt} ; u^y = \gamma \frac{dy}{dt} ; u^z = \gamma \frac{dz}{dt}$$

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$$

Betrag: Allgemein $a^2 = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$

a^2 : Lorentz-Skalar:
identisch in allen
Inertialsystemen

R Minkowski-Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2$$

$$\text{bzw. } |u^\mu| = \underline{\underline{c}} = \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}$$

$\Rightarrow$ Alle Objekte "bewegen" sich mit Lichtgeschw.
in der 4D Raumzeit

4er Beschleunigung

für die Bewegungsgleichung; vgl. Newton $m\vec{a} = \vec{F}$

$$\text{aus } \vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\left| a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \right| \text{ 4er Beschleunigung}$$

Bewegungsgleichung im kräftefreien Raum

$$\boxed{a^\mu = 0} \quad (\text{einschl. Gravitation in ART - Formulierung})$$

mit externer Kraft f^μ

$$\boxed{m a^\mu = f^\mu}$$

m : Ruhemasse

$$\text{da } u_\mu u^\mu \equiv \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}(u_\mu u^\mu) = 0 = 2u_\mu a^\mu = 2\eta_{\mu\nu} u^\mu a^\nu$$

$$\Rightarrow u_\mu f^\mu = 0 \rightarrow \text{nur 3 unabhängige Komponenten für } f^\mu$$

- u^μ steht senkrecht auf f^μ

aus $m \vec{a} = \vec{F}_N$; $\vec{F}_N$: Newtonsche Kraftkomponenten

$$\Rightarrow \boxed{f^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \vec{F}_N \cdot \vec{v} \\ \gamma \vec{F}_N \end{pmatrix}}$$

aus LT mit $S'(\vec{v}=0)$

$\hookrightarrow S(\vec{v} \neq 0)$

$$f^\mu = \begin{pmatrix} f^0 \\ \vec{f} \end{pmatrix} \text{ mit } f^0 = \gamma \vec{f}_n \cdot \vec{v} \quad \text{relativ. Leistung} \quad 159$$

4er Impuls / Energie-Impuls Vektor

$$\boxed{p^\mu = m u^\mu} \quad \text{4er Impuls ; } m : \text{ Ruhemasse}$$

$$p_\mu p^\mu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (mc)^2 = m^2 \quad (\text{für } c=1)$$

= Lorentz-Skalar : identisch in allen Inertial-Systemen

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma m c \\ \gamma m \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v}} \quad \text{relativistische 3er Impuls}$$

$$c p^0 = \gamma m c^2 \approx \underbrace{m c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \dots}_{\text{kinetische Energie}} \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \right)$$

$\Rightarrow \bar{E} = c p^0$: Gesamtenergie / relativistische Energie

Energie-Impulsvektor:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \bar{E}/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{E}/c \\ E \vec{v}/c^2 \end{pmatrix}$$

mit $p_\mu p^\mu = (m c)^2 = (\bar{E}/c)^2 - \vec{p}^2$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2}} = \gamma m c^2$$

$$\Rightarrow \bar{E} = m c^2 \quad \text{für } \vec{p} = 0 = \vec{v}$$

Tensoren / 4er Notation

161

wichtig für

- Lorentzinvariante Formulierung /
kovariante Formulierung

- Tensorgleichung unabhängig von Inertialsystem /
Koordinatensystem

1) Kontravarianter Vektor
= kontravarianter Tensor vom Rang 1

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) \quad ; \quad \mu = 0 \dots 3$$

Kontravariant im Sinne Lorentz-Transformation

a^μ kontravariant, wenn Transformationsverhalten
unter Lorentz-Transformation wie 4er-Ortvektor x^μ :

$$\boxed{a^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu}$$

Kontravariant:

Index oben

$$x^\mu = (t, x, y, z) \quad \text{mit } c=1$$

z.B.
mit $\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für Lorentz-Boost
in x-Richtung
mit Geschwindigkeit
 $v = \beta$

mit allgemeiner Transformation (einschl. Koordinaten-
transformation)

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$$

$$\Rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = J^\mu_\nu dx^\nu$$

Transformation des Differentials des Ortsvektors

J^μ_ν : Jacobi-Matrix

Kontravarianter Vektor a^μ : Transformationsverhalten

wie Differential des Ortsvektors unter Koordinaten-
bzw. Lorentz-Transformation

$$\boxed{a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu}$$

kompäibel mit LT-Definition

$$J^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\nu}$$

aber: allgemeine Transformation

$$x'^{\mu}(x^{\nu}) \text{ vorgegeben} \Rightarrow x'^{\mu} \neq \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu}$$

vgl. Polarkoordinaten $(r, \varphi) = x'^{\mu}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \varphi = \arctg y/x$$

$\Rightarrow x^{\mu}$: 4er Ortsvektor im allgemeinen kein
Tensor vom Rang 1

aber dx^{μ} immer kontravarianter Vektor

kovarianter Vektor / kovarianter Tensor vom Rang 1

$$\text{mit } a^2 = \eta_{\mu\nu} a^{\mu} a^{\nu} = a_{\mu} a^{\mu} \Rightarrow a_{\mu} \equiv \eta_{\mu\nu} a^{\nu}$$

$\uparrow$ Skalar / Lorentz-Skalar

$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu$: Index senken (Lowering)

beachte : $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$; $\eta = \eta^T$ symmetrisch
nur in flacher Raumzeit; bzw in Minkowski-RZ

$$\eta = \eta^{-1}$$

immer : $\eta^{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu})^{-1}$

d.h. für allgemeine Metrik $g_{\mu\nu}$

$\Rightarrow g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$ in gekrümmter RZ

a_μ : kovariante Vektor / dualer Vektor zu a^μ

$$a'_\mu = \eta_{\mu\nu} a'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\gamma a^\gamma = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\gamma \eta^{\gamma\lambda} a_\lambda$$

mit $\eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\gamma \eta^{\gamma\lambda} = (\Lambda^{-1})_\mu{}^\lambda$ inverse LT

$$\Rightarrow \boxed{a'_\mu = (\Lambda^{-1})_\mu{}^\lambda a_\lambda} \quad \text{Transformationsverhalten eines kovarianten Vektors}$$

Transformation mit inverser Lorentz-Transformation

$$\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta \quad ; \quad \Lambda \text{ pseudo-orthogonal}$$

$$a^\mu = \eta^{\mu\lambda} a_\lambda \quad : \text{Index heben (raising)}$$

allgemein kovarianter Vektor / Tensor

betrachte der Gradient einer skalaren Funktion

$$f(x^\mu) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{mit } f(x'^\mu) = f(x^\mu) \text{ ugl.} \quad a^2 = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = a_\mu a^\mu$$

$$\partial_\mu f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

bei Transformation

$$\partial'_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}} \partial_\nu f$$

inverse Jacobi-Matrix /
inverse Lorentz-Transformation

$$\Rightarrow \boxed{a'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} a_\nu}$$

Def.: ein kovarianter Vektor transformiert sich wie
der Gradient einer skalaren Funktion unter
Koordinaten- / Lorentz-Transformation; d.h.
mit inverser Jacobi-Matrix / inverser LT

Eigenschaften von Vektoren / Darstellung im Minkowski-Diagramm

167

$$\text{mit } a^2 = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = a_\mu a^\mu \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 = (a^0)^2 - \vec{a}^2$$

Unterscheidung

$$\text{raumartig: } \vec{a}^2 > (a^0)^2 \quad \text{hier } a^2 < 0$$

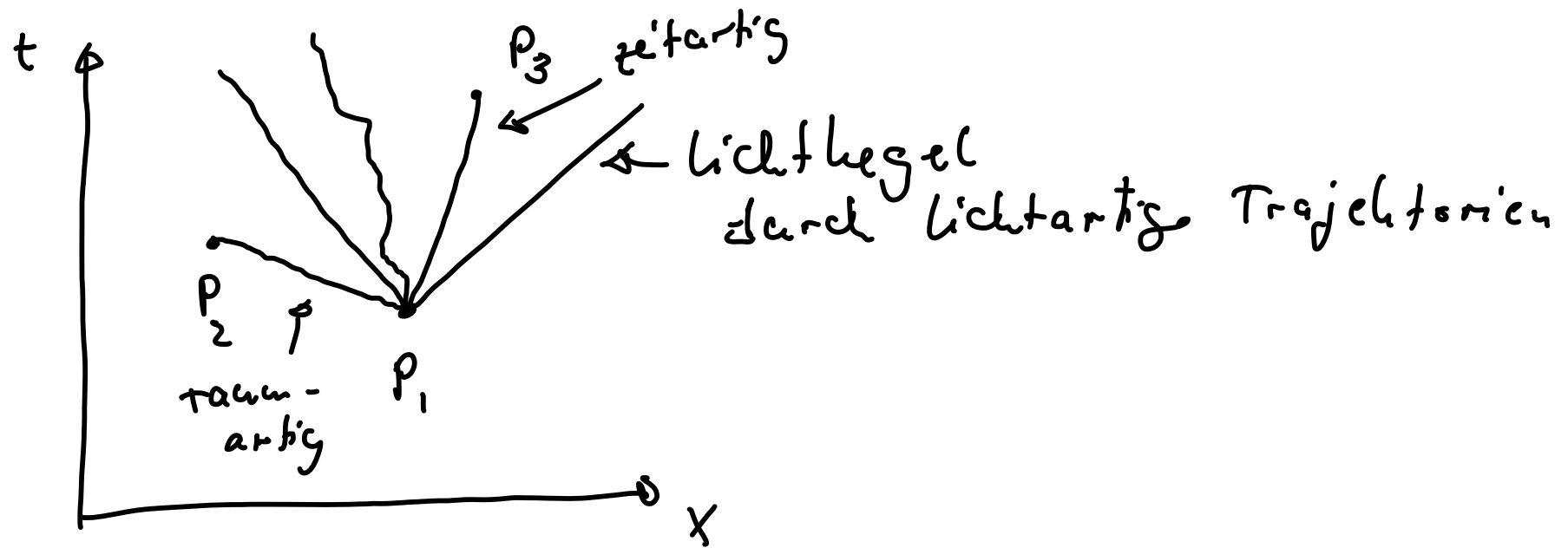
$$\text{zeitartig: } (a^0)^2 > \vec{a}^2 \quad a^2 > 0$$

beachte: Teilchenbahnen / Trajektorien $x^\mu(\tau)$
sind immer zeitartig, d.h.

$$dx_\mu dx^\mu > 0$$

$$\text{lichtartig: } a^2 = 0 \quad \text{bzw. } ds^2 = 0$$

Trajektorie von Photonen / Licht



Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

aus Maxwell-Gleichungen

169

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad : \text{Gau\ss}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad : \text{Amp\`ere-Maxwell}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad : \text{Faraday / Induktion}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad : \text{quellfreies B-Feld}$$

Einheiten: CGS - Gau\ss-System

$$\text{mit } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} ; [\vec{E}] = [\vec{B}] ; [\vec{B}^2] = \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}$$

im Vakuum:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{E} = 0 ; \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{B} = 0$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ erfullen Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit
 $c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$

⇒ muss in allen Inertialsystemen gelten
(EM-Wellen = Licht)

Hilfs: $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$
 $= \partial_\mu \partial^\mu$

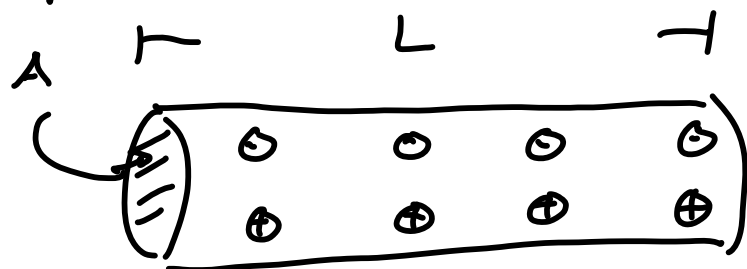
d'Alembert-Operator

Lorentz-invariant

$$\Rightarrow \square' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \vec{\nabla}'^2$$

⇒ Maxwell-Gleichungen implizieren relativistische Formulierung
 aber $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind keine kovarianten Größen
 $\vec{E}$ und $\vec{B}$ -Felder sind abhängig vom Betrachter (Inertialsystem)

Bsp. Stromdurchflussener Leiter



im Laborsystem
 $-q \rightarrow v$

→ v Elektronen: Leiter mit Strom I
 Ladungsträger (e^-) bewegen
 sich mit Geschwindigkeit
 v (Bem. $v \sim 0.1 \text{ mm/s}$
 $\sim 10^{-12} c$)

im Laborsystem S :

stromdurchflossener Leiter erzeugt Magnetfeld:

Biot-Savart - Gesetz / Ampère - Gesetz

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

betrachte Ladung $-q$ mit Geschwindigkeit $v = v_{\text{Elektronen}}$

$\Rightarrow$ Ladung erfährt magnetische Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow -q \text{ wird zum Leiter beschleunigt}$$

aber im mitbewegten System S' : $v = 0$

d.h. keine mag. Lorentz-Kraft; aber physikalisches

Ereignis (Ladung wird zum Leiter beschleunigt) bleibt

in S' :

• Ladungsdichte

$$\rho_- = \frac{N_- q_-}{V} \quad ; \quad \rho_+ = \frac{N_+ q_+}{V}$$

$N_{\pm}$: Anzahl Ladungen

V : Volumen

$$V = A \cdot L$$

Ladungen $Q_{\pm} = V \rho_{\pm}$ identisch in allen Inertialsystemen (Ladungserhaltung)

172

$$\rho' \cdot L' = \rho L \quad ; \text{ da } A' = A \quad v \perp A$$

$$\rho' = \rho \frac{L}{L'} = \gamma \rho \quad \text{wg. Längenkontraktion}$$

im Laborsystem: $\rho_+ + \rho_- = 0$: Leiter neutral

Elektronen (ρ_-) bewegen: $\rho_- = \gamma \rho'_-$; ρ'_- im Ruhesystem der Elektronen

Im Ruhesystem von $-q$: S'
bewegen sich die positiven Ladungen:

$$\rho'_+ = \gamma \rho_+$$

$$\Rightarrow \rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \gamma \rho_+ + \frac{\rho_-}{\gamma} = \rho_+ \gamma \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \rho_+ \gamma \beta^2$$

$(\beta = \frac{v}{c})$

$\Rightarrow$ Im System S' der bewegten Ladung gibt es eine positive Ladungsdichte, diese erzeugt Coulomb-Feld und $-q$ wird zum Leiter beschleunigt

mit Ladung pro Längeneinheit

$$\lambda' = \rho' A' \quad ; \quad A' = A : \text{Querschnittsfläche}$$

$$\Rightarrow E' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \quad ; \quad r : \text{Abstand zum Leiter}$$

$$= \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 r \quad : \text{elektrische Feld im mitbewegten System } S'$$

$\Rightarrow$ Coulomb-Kraft

$$F'_C = -q E' = -q \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 r \quad \overset{v \ll c}{\approx} -q \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\text{in } S : I = v \rho_- A$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

mit

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

$\Rightarrow$ im Laborsystem: nur mag. Lorentz-Kraft

$$F_L = -q v B$$

in S' : nur Coulomb-Kraft, da $v = 0$

$\Rightarrow F_L$ und F_C sind physikalisch identisch

Unterscheidung ($\vec{E}$ oder $\vec{B}$) nur durch Relativbewegung abhängig

bzw. $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind durch Lorentz-Transformation verknüpft

$\Rightarrow$ für kovariante Formulierung: vereinheitlichte Darstellung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ notwendig

- $\vec{E}$ und $\vec{B}$ können gleichzeitig existieren (in einem System)

$\rightarrow$ 4er Vektor nicht ausreichend

$\rightarrow$ mindestens 6 Komponenten

aber Darstellung mit 4er-Vektorpotential möglich:

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad \text{4er Vektor / Tensor von Rang 1}$$