

Theoretische Physik I

001

Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Teil I Theoretische / klassische / analytische Mechanik

Motivation:

- tieferes Verständnis der Newtonschen Mechanik
- verschiedene (mathematische) Grundkonzepte
 - ↳ Anwendung auf unterschiedliche Bereiche
 - z.B. E-Dynamik, QM, ART aus Variationsprinzip

1) Newtonsche Mechanik

Newtonsche Axiome

- 1) Kräftefreien Körper (Masse) bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit

2) Kraft gleich Masse mal Beschleunigung

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

3) Actio = Reactio : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

2) Newtonsches Weltbild (Weltbild der nicht-relativistischen klassischen Mechanik) :

- Materie : läßt sich durch (unzerstörbare) Massenpunkte eindeutig beschreiben
- Zeit : eindimensionaler Parameter zur Beschreibung von Bahnen / Trajektorien :
passiv, unbeeinflussbar
- Raum : 3D "Bühne" der Physik
unveränderlich, Beschreibung mit Koordinaten
(z.B. kartesisches Koordinatensystem)

↳ Raum + Zeit sind absolut

- Bewegungen sind deterministisch

⇒) Limitierungen:

- Elementarteilchen sind ununterscheidbar
- QM: nicht deterministisch → probabilistisch
u. a. Unschärferelation
- SRT: Zeit ist abhängig von Relativbewegung
- ART: Raum + Zeit werden durch Materie / Energie
gekrümmert

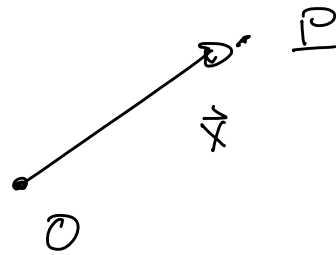
↳ nicht absolut, sondern dynamisch (z.B. GW)
Inhalt hat Einfluß auf "Bühne"

"Mathematisierung"

Zeit: $t \in \mathbb{R}$; Einheit Sekunde [s]

Raum: Beschreibung mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x, y, z)$
Dimension $|\vec{x}|$; Einheit Meter [m]

z.B. kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung
in O



Änderung des Bezugssystems: "Beobachterwechsel"

a) Translation: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$

b) Rotation: $\vec{x}' = R \vec{x}$; R : Rotationsmatrix
(orthogonal: $R^T R = \mathbb{1}$)

\Rightarrow Gruppe Koordinatentransformationen:

Euklidische Gruppe

auch allgemein: Koordinatentransformation: Verwendung einer
anderen "Karte"; z.B. Kugelkoordinaten $\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \varphi)$

wobei $|\vec{x}| =$ Länge aber $\theta, \varphi =$ Winkel

Inertialsystem

Inertiales Koordinatensystem, in dem keine äußeren Kräfte wirken und es gilt

$$\vec{a} = 0$$

Postuliertes Koordinatensystem: beschreibt Klasse von Koordinatensystemen, die durch die Euklidische Gruppe + Geschwindigkeits Transformation ineinander überführt werden kann: Galilei-Gruppe

$$\text{Transformation: } \vec{x}' = \vec{x} - \vec{b} - \vec{v}t ; \vec{b}, \vec{v} = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}' = 0 = \ddot{x}$$

Galileische Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Alle physikalischen Gesetze sind dort gleich. ("Physik" im fahrenden Zug = "Physik" im ruhenden System)

Newton'sches Determiniertheitsprinzip

für jedes System mit N Massenpunkten sind die Bahnen vollständig bestimmt (determiniert) wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt alle Orte und Geschwindigkeiten gegeben sind, d. h. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \dots, \dot{\vec{x}}_N)$ gegeben
 Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i \quad \Rightarrow \text{Anfangswertproblem}$$

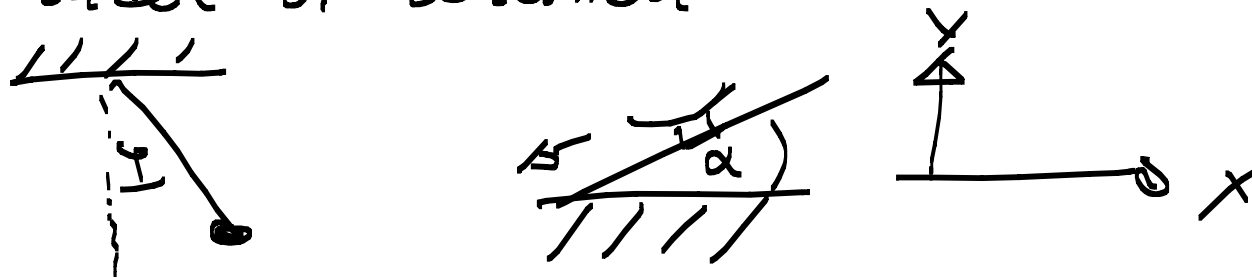
Lagrange - Mechanik

- Newtonsche Mechanik
Bahnen/Trajektorien bestimmt durch Bewegungsgl.
+ Anfangswerte
- Lagrange - Mechanik
Bahnen bestimmt durch "Randwerte" (auch z.B.
kürzeste Strecke)

Zwangsbedingungen

Systeme oft eingeschränkt (geometrische Bedingungen)

z.B. Pendel o. Schienen



Zwangskräfte i. A. nicht (im Detail) bekannt
(z.B. Auftriebskraft o. Fadenspannung)

Formulierung mit

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i(\text{ext.}) + \vec{N}_i \leftarrow \text{Zwangskraft}$$

Schwierig

- Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$

nicht unabhängig

z.B. Zahn auf schiefer Ebene: $y = \tan \alpha \cdot x$

Terminologie / Klassifizierung von Zwangsbedingungen

- holonome Zwangsbedingung

$$f(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{d.h. Formulierung mit Gleichung möglich}$$

$$\text{z.B. } y - \tan \alpha \cdot x = 0$$

- nicht-holonome Zwangsbedingungen
Formulierung mit Gleichung nicht möglich
Elimination von redundanten Koordinaten nicht möglich
z. B. Teilchen in Hohlkugel: $|\dot{\vec{x}}| \leq R$

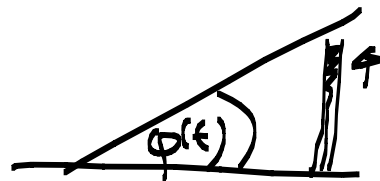
- skleronome ZB
zeitunabhängige Zwangsbedingungen
 $f(\vec{x}) = 0$ holonome-skleronome ZB

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

- rheonome ZB: $f(\vec{x}, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$$

z. B. schiefe Ebene zeitabhängig



Holonome Zwangsbedingungen

010

Freiheitsgrade für Systeme ohne zB

$3N$ für N Teilchen

mit p holonome zBs: Reduktion der Freiheitsgrade

$$f = 3N - p$$

⇒ Beschreibung mit f generalisierten Koordinaten

q_1, q_2, \dots, q_f möglich

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$$

q_i unabhängig von einander; d.h. $f(q_1, q_2, \dots, q_f) = 0$

kann nicht mehr formalisiert werden

bilden Konfigurationsraum mit einem f -dimensionalen Konfigurationsvektor $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

⇒ generalisierte Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$$

mit Anfangswerte bei t_0 : $q(t_0) = \underline{q}_0$ und $\dot{q}(t_0) = \underline{\dot{q}}_0$

System mit Bewegungsgleichungen (müssen noch bestimmt werden) bestimmt

Bem.: q_i 's nicht eindeutig; unterschiedliche generalisierte Koordinaten möglich

q_i 's: nicht notwendigerweise Längen
(z.B. Winkel)

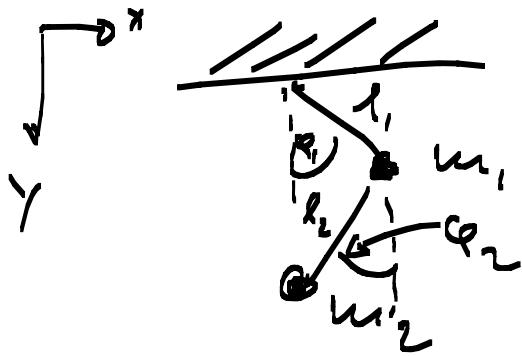
z.B. • Teilchen auf Kugeloberfläche fixiert; Radius R

$$\text{Zwangsbedingung: } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

↳ mögliche generalisierte Koordinaten:

θ : Polarwinkel; φ : Azimut-Winkel

- Doppelpendel in der Ebene



2-Körper Problem:

ursprünglich 6 Freiheitsgrade
4 holonome Zwangsbedingungen

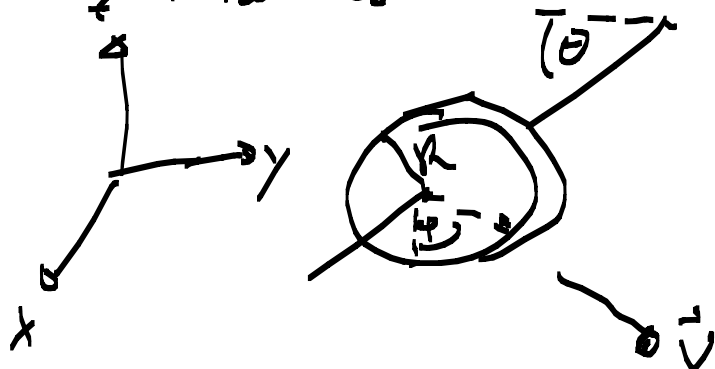
$$z_1 = 0 = z_2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

- Bsp.: nicht-holonome Zwangsbedingung

z rollendes Rad



Beschreibung des Systems
mit "Auflagepunkt" in der
(x, y) Ebene und Winkel
(phi, theta) : 4 Freiheitsgrade
(ignoriere z = 0)

holonome Zwangsbedingungen möglich?

Wahrheit: Koordinaten sind unabh. von einander

formal: "Rollen":

Geschwindigkeit Achse (\dot{x}, \dot{y})

= Geschwindigkeit Rad

v-Rad: $v = R\dot{\varphi}$

Richtung: $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \dot{x} = v \cos\theta = R\dot{\varphi} \cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R \cos(\theta(t))$$

$$\dot{y} = v \sin\theta = R\dot{\varphi} \sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} = R \sin(\theta(t))$$

nicht integrierbar, da $\theta(t)$ unbekannt (hier:
keine Bestimmungsgleichung für $\theta(t)$)

d'Alembert Prinzip

Ziel: Aufstellen der Bewegungsgleichungen unter
Einbeziehung der Zwangsbedingungen
↳ differentielle Formulierung der Lagrange -
mechanik

Def: virtuelle Verschiebung $\delta \vec{x}_i$

infinitesimale Änderung der Orte (Koordinaten) eines
mechanischen Systems bei festgehaltener Zeit t ,
die mit den Zwangsbedingungen im Einklang stehen
(virtuell = willkürlich, d.h. nicht durch physikalische
Kräfte verursacht)

festgehaltene Zeit: $\delta t = 0$

mit $\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \delta t$$

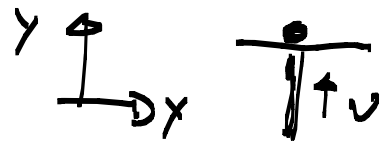
$\delta = 0 \leftarrow$ virtuell

(Verwendung von δ genau wie Differential)

Anmerkung: für skleronome Zwangsbedingungen:
 $\delta \vec{x}$ real ausführbar

für rheonome ZBs nicht real ausführbar

z.B.



Teilchen im Aufzug

$$d\vec{x} = (dx, dy) = (dx, v dt) \quad \text{real} \quad \text{Umschiebung}$$

$$\delta \vec{x} = (\delta x, \delta y) = (\delta x, 0) \quad \text{nicht real} \quad \text{durchführbar}$$

Def.: Virtuelle Arbeit

$$\delta W = - \sum_i^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i \quad i = 1, \dots, N \quad \text{Teilchen}$$

$$\text{mit } \vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{z}_i \quad \vec{F}_a : \text{äußere Kraft}$$

$$\vec{z} : \text{Zwangskraft}$$

mit Newtonsche Bewegungsgl.:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{z}_i = m_i \vec{a}_i \quad ; \quad \vec{a}_i = \ddot{\vec{x}}_i$$

$$\text{bzw. } \vec{F}_{a,i} + \vec{z}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i = 0 \quad \text{dynamisches Gleichgewicht}$$

$$\Rightarrow \sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i + \sum_i \vec{z}_i \delta \vec{x}_i = 0$$

d'Alembert'sche Prinzip: die von den Zwangskräften geleistete virtuelle Arbeit ist null; bzw. Zwangskräfte leisten keine virtuelle Arbeit

$$\left. \delta W_z = - \sum_i \vec{z}_i \delta \vec{x}_i = 0 \right\}$$

Bem.: skleronome Zwangsbedingungen: Zwangskräfte leisten
keine reale Arbeit

theonom: ... können reale Arbeit leisten

auch d'Alembert'sche Prinzip

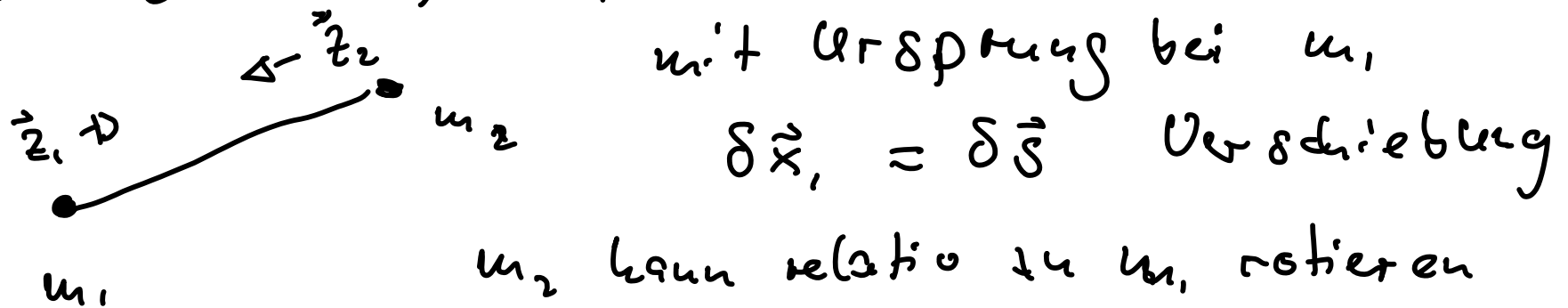
$$\left. \sum_i^N (\vec{F}_{qi} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0 \right\}$$

Vorteil: Formulierung ohne (komplizierte) Zwangskräfte

aber: $\delta \vec{x}_i$ nicht unabhängig voneinander.

(z.B. holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{x}) = 0$)

Bsp.: $\delta W = 0$; kräftefreie Hartel



$$\delta \vec{x}_2 = \delta \vec{s} + \delta \vec{R}$$

d'Alembertsches Prinzip:

$$\delta W_z = 0 = -\vec{z}_1 \delta \vec{s} - \vec{z}_2 (\delta \vec{s} + \delta \vec{R})$$

$$= - \underbrace{(\vec{z}_1 + \vec{z}_2)}_{=0} \delta \vec{s} - \underbrace{\vec{z}_2 \delta \vec{R}}_{\vec{z}_2 \perp \delta \vec{R}}$$

$= 0 \Rightarrow$ keine virtuelle (auch keine reale) Arbeit

Ziel: Bewegungsgleichungen mit generalisierten Koordinaten
(unabhängige Koordinaten)

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) \quad ; \quad \underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f) \\ \text{Konfig. Raum}$$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \left(\text{Einstein Summenkonvention:} \right. \\ \left. \delta \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right)$$

virtuell: $\delta t = 0$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \delta t = 0$$

1. Term aus Summe

$$\sum_i \vec{F}_{a,i} \delta \vec{x}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j$$

$$\text{mit } Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$$

generalisierte
Kraftkomponenten

Bem.: $[Q_j] \neq$ Kraft i. A.

aber $[Q_j q_j] =$ Energie

mit konserativen Kräften

$$\vec{F}_{a,i} = - \vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n); \quad V: \text{Potential}$$

$$= - \sum_j (\vec{\nabla}_i q_j) \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = - \sum_i (\vec{\nabla}_i V) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

2. Term:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i &= \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i,j} m_i \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\
&= \sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right) \right] \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^f \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j
\end{aligned}$$

mit $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$ kinetische Energie des N -Teilchen Systems

$$\Rightarrow \left[\sum_{j=1}^f \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \right]$$

d'Alembertsche Prinzip

mit holonomen Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \right]$$

q_j unabhängig
von einander

für konservatives System:

$$V = V(\underline{q}) \text{ unabhängig von } \underline{\dot{q}} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T-V) \right] \delta q_j = 0$$

Def.: $\boxed{L = T - V}$

$$= L(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$$

Lagrange-Funktion

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

holonom + konservativ

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \right)$$

Lagrange - Gleichung

2. Art

Lagrange - Bewegungsgleichung

Vergleich mit Newton:

- Energie (Skalar) vs. Kraft (Vektor)

- keine Zwangskräfte

- invariant unter beliebiger Koordinatentransformation

- Formulierung in rein differentieller Form

Koordinatentransformation:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{\tilde{x}} ; \quad \vec{x} = \vec{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

Beschleunigung: $\ddot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}})$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_j}{dt} \quad (\text{Summenkonvention})$$

$$\ddot{x}_i = \underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial \tilde{x}_n \partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_n}{dt} \frac{d\tilde{x}_j}{dt}} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d^2 \tilde{x}_j}{dt^2}$$

zusätzlicher Term \rightarrow Newtonsche Bewegungsgl.
nicht form invariant

$$\tilde{F}_i = \tilde{F}_j \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \quad \text{allgem. Transformation eines Vektors}$$

Lagrange Gleichung unter Koordinatentransformation

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{\dot{q}}, t) = L(q, \dot{q}, t)$$

Skalar: Wert bleibt
unter Koordinaten-
trafo gleich
(z.B. Temperatur)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$1) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u} \right) \frac{\partial \tilde{q}_u}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_u}{\partial q_j}$$

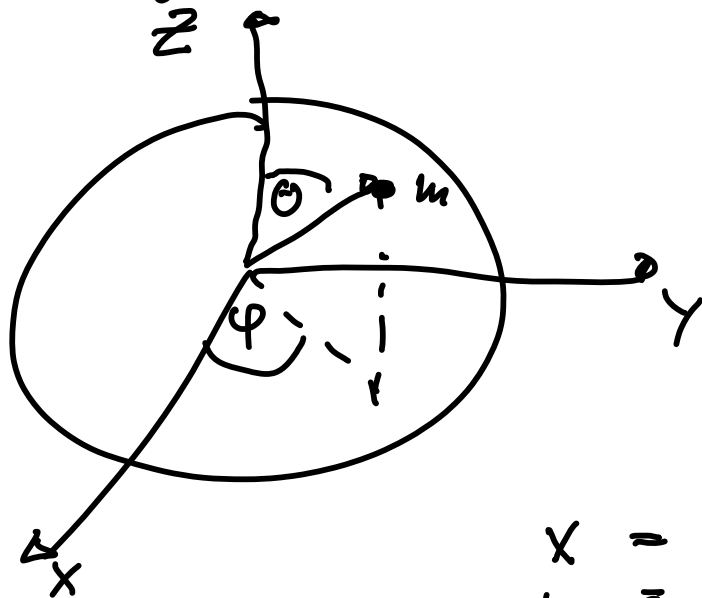
$$2) \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_u} \frac{\partial \tilde{q}_u}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_u} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_u}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 = \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_u} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_u} \right)}_{=0} \frac{\partial \tilde{q}_u}{\partial q_j}$$

\Rightarrow Lagrange-Gleichung forminvariant unter
Koordinatentransformation! \Rightarrow

Anwendungen

1) Teilchen auf Kugeloberfläche im Schwerfeld der Erde



Zwangsbedingung: holonom-skleronom
 $r = |\vec{x}| = R$

generalisierte Koordinaten

Θ : Polarwinkel : q_1

φ : Azimut : q_2

$$\begin{aligned} x &= R \sin \Theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \Theta \sin \varphi \\ z &= R \cos \Theta \end{aligned}$$

Kraft: $\vec{F}_a = -mg \vec{e}_z = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ q_1, q_2

Lagrange-Funktion: $L = T - V = L(\Theta, \varphi)$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\Theta}^2 + \sin^2 \Theta \dot{\varphi}^2)$$

V aus generalisierter Kraft:

$$Q_1 = Q_\theta = \frac{\partial v}{\partial \dot{\theta}} = -mg(-k \sin \theta) = mgk \sin \theta$$

$$Q_2 = Q_\varphi = \frac{\partial v}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

konservative Kraft: $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow V(\theta) = -\int d\theta Q_\theta = -mgk \int d\theta \sin \theta = mgk(1 + \cos \theta)$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} k^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgk(1 + \cos \theta)$$

Lagrange-Gleichungen / Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mk^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + mgk \sin \theta$$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi$ ist zyklische Koordinate
 \hookrightarrow Erhaltungsgröße

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mk^2 \dot{\theta}$$

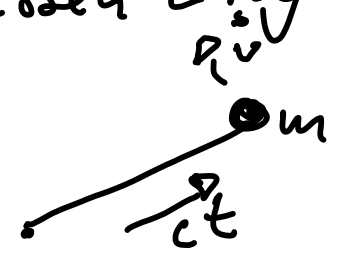
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mk^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Theta : \ddot{\Theta} - (\cos\Theta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}) \sin\Theta = 0 \\ \varphi : \frac{d}{dt} (\sin^2\Theta \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (\vec{L} = \vec{x} \times \vec{v})$$

Lösung liefert Bahn auf Kugeloberfläche
(nicht trivial, auf $\dot{\varphi} = 0$)

$$\Rightarrow \ddot{\Theta} = \frac{g}{R} \sin\Theta \quad \text{vgl. Pendel} \quad \left. \begin{array}{l} \ddot{\Theta} = -\frac{g}{R} \sin\Theta \\ z = \frac{g}{R} \Theta \end{array} \right)$$

2) Teilchen an masseloser Stange,
dessen Länge sich linear mit der Zeit ändert
Bewegung nur in x-y-Ebene
 $z = 0$ holonom-skleronom



$|\vec{x}| = R + ct$ holonom-rheonom
 c : konst. Längenänderung

mit Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos\varphi = (R + ct) \cos\varphi & ; \varphi_1 &= \varphi \\ y(t) &= r(t) \sin\varphi = (R + ct) \sin\varphi \end{aligned}$$

Lagrange-Funktion: $L = \underline{T} - V$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (c^2 + (k+ct)^2 \dot{\varphi}^2) ; V = 0$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \text{ zyklische Koordinate}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(k+ct)^2 \dot{\varphi} = \text{konst}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 = m(k+ct) ((k+ct) \ddot{\varphi} + 2c \dot{\varphi})$$

Lösung: triviale Lösung $\dot{\varphi} = 0$

$$\text{aus } \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = k \Rightarrow d\varphi = \frac{h/m}{(k+ct)^2} dt$$

$$\omega \varphi(t) = -\frac{1}{c} \frac{h/m}{(k+ct)}$$

Verallgemeinerte Potentiale

/ geschwindigkeitsabhängige Potentiale

030

Lagrange-Gleichung für holonome Systeme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

wenn

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

auch für nicht konservative Systeme

mit verallgemeinerte Potential:

$$U = U(q_j, \dot{q}_j)$$

=> Lagrange-Funktion

$$L = T - U$$

=>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

verallgem. Lagrange-Funktion

Bsp.: Teilchen im Elektromagnetischen Feld
 Kraft: $\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right)$ in Gauß-Einheiten

mit Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad ; \quad \vec{j} : \text{Stromdichte}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad \rho : \text{Ladungsdichte}$$

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} ; \vec{A}$ Vektorpotential

$$\text{Inclusion: } \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\text{Lösung: } \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{in Lorentzkraft: } \vec{F} = e \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right)$$

$$\text{suche } U(\vec{x}, \vec{v}) \text{ mit } \vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} U - \vec{\nabla} U$$

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = e \left(-\vec{\nabla} \left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \right)$$

$$\text{mit } \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} (\vec{A} \cdot \vec{v})$$

$$= e \left(-\vec{\nabla} \left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right)$$

\Rightarrow verallgemeinertes Potential

$$U(\vec{x}, \vec{v}) = e \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \right)$$

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e \left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right)$$

für
Lorentzkraft

Systeme mit Reibung

- meist geschwindigkeitsabhängig

- nicht energieerhaltend

↳ $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ nicht möglich

↳ keine Lagrange-Funktion $L = T - V$

aber
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

d'Alembertsches Prinzip
für holonome Zwangs-
bedingungen

mit
$$\vec{F} = \vec{F}^{(k)} + \vec{F}^{(r)}$$

$$\vec{F}^{(k)} = -\vec{\nabla}V \text{ konservativer Anteil}$$

$$\vec{F}^{(r)}$$
 : Reibungskraft

↳ $L = T - V$

⇒
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(r)}$$

Beispiel: Reibungskraft $\propto v$: Stokes'sche Reibung
↳ Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2} \sum_{e,m} \beta_{em} \dot{q}_e \dot{q}_m ; \beta_{em} \text{ Dissipations-koef. - Tensor}$$

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right\} \text{ modifizierte Lagrange-Gleichung}$$

$$\hookrightarrow Q_j^{(2)} = - \sum_{h=1}^f \beta_{jh} \dot{q}_h$$

Energie dissipation

$$\text{Gesamtenergie: } E = T + V = 2T - L$$

mit skleronomen Zwangsbedingungen:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{e,m} \mu_{em} \dot{q}_e \dot{q}_m$$

Konservatives System (bis auf Reibung)

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \right)$$

\dot{q}_j * Lagrange - Gleichung

$$\dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = -2D$$

$$\left(\begin{array}{l} \dot{q}_j \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 2D \\ \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} = 2T \end{array} \right)$$

$$2\dot{T} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

$$\text{mit } \dot{L} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \rightarrow \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{L} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

$$\hookrightarrow 2\dot{T} - \dot{L} = -2D$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{E} = -2D}$$

Energie dissipation
bei Reibung

Nicht-holonome Systeme

Lagrange - Multiplikatoren

036

• Zwangsbedingungen in der Form $f(\vec{x}, t) = 0$
nicht möglich

↳ Angabe von unabhängigen generalisierter Koordinaten
nicht möglich

aber: Zwangsbedingungen in differentieller Form
unter Umständen möglich, z.B. "rollende Rad"

⇒ Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

Betrachte System mit $3N$ Freiheitsgraden
($N = \#$ Teilchen)

\tilde{f} : Anzahl Zwangsbedingungen, wobei

$f \leq \tilde{f}$: z.B. in differentieller Form:

$$\sum_{m=1}^{3N} g_{im}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dx_m + h_i(x_1, \dots, x_{3N}, t) dt = 0$$

$$i = 1, \dots, f$$

verwendete Anzahl holonomer Zwangsbed. $(\tilde{f} - f)$
 zur Reduktion der Anzahl der Koordinaten:

$$n = 3N - (\tilde{f} - f)$$

↳ verwende n generalisierte Koordinaten: q_1, \dots, q_n

$$\Rightarrow \vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

aber q_j nicht unabhängig voneinander

umschreiben der differentiellen Zwangsbedingungen

$$\sum_{m=1}^n a_{im}(q_1, \dots, q_n, t) dq_m + b_i(q_1, \dots, q_n, t) dt = 0$$

Vergleich mit rein holonomem System

$f = 0$ und es existieren \tilde{f} Gleichungen

$$g_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad i = 1 \dots \tilde{f}$$

$$\Rightarrow dg_i = 0 = \sum_m \frac{\partial g_i}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial g_i}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow a_{im} = \frac{\partial g_i}{\partial q_m} ; b_i = \frac{\partial g_i}{\partial t}$$

partielle Ableitungen
die zu ausgedrückten

Lagrange-Gleichung für Systeme mit nicht-holonomem
Zwangsbedingungen?

(aber in differentieller Form)

- für virtuelle Verschiebungen ($\delta t = 0$) gilt:

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \delta q_m = 0 \quad i = 1, \dots, \tilde{f}$$

- mit Lagrange-Multiplikatoren:

$$\lambda_i \quad ; \quad i = 1, \dots, f$$

unabhängig von \underline{q}
aber evtl. abhängig
von t

• verwendet für generelle Optimierungsprobleme mit Neben- (Zwangs-) Bedingungen

• müssen noch bestimmt werden:

$$\sum_{i=1}^f \lambda_i \sum_m^n a_{im} \delta q_m = 0$$

- für konservative Systeme:

$$\sum_{m=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right) \delta q_m = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$$

wg. \tilde{f} Zwangsbedingungen: $n - f$

unabh. generalisierte
Koordinaten

$q_u : u = 1, \dots, u-f$ unabh.

$q_e : e = u-f+1, \dots, u$ abhängig

mit f Bestimmungsgleichungen für λ_i
(frei wählbar)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L}{\partial q_u} - \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{iu} = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} u = u-f+1, \dots \\ u \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{u=1}^u (\dots) \delta q_u = \sum_{u=1}^{u-f} (\dots) \delta q_u + \sum_{u=u-f+1}^u (\dots) \delta q_u = 0$$

wg. 1 Summand mit unabh. q_u und Bestimmungsgleichung für λ_i :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L}{\partial q_u} = \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{iu}} \quad u = 1, \dots, u$$

Lagrange-Gleichung 1. Art

n Gleichungen $n + f$ Unbekannte:

n Koordinaten q_m

+ f Multiplikatoren λ_i

f Bestimmungsgleichungen gegeben durch
differentialen Zwangsbedingungen:

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \dot{q}_m + b_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, f$$

physikalische Interpretation
vgl. holonomes System

der λ_i 's:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m$$

$$\Rightarrow Q_m = \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{im} \quad ;$$

Komponenten einer generalisierten
Kraft: hier gegeben durch
Zwangskräfte

Zwangskräfte

für Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

N -Teilchen System

$$f_j(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0 \quad j = 1, \dots, f \quad f: \# \text{ ZB}$$

Wende keine generalisierte Koordinaten,
d.h. ZB's nicht zur Reduktion der Freiheitsgrade;
aber: nur $3N - f$ unabh. Koordinaten

$$df_j = \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot d\vec{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0: \quad \text{reale Verschiebung}$$

für virtuelle Verschiebung ($\delta t = 0$)

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot \delta \vec{x}_i = 0$$

mit f Lagrange-Multiplikatoren

$$\sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \lambda_j \delta \vec{x}_i = 0$$

mit d'Alembert'sches Prinzip:

$$\sum_{i=1}^2 (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^2 \left(\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i + \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{D}_i f_j) \right) \delta \vec{x}_i = 0$$

wähle λ_j so da $\beta (\dots) = 0$

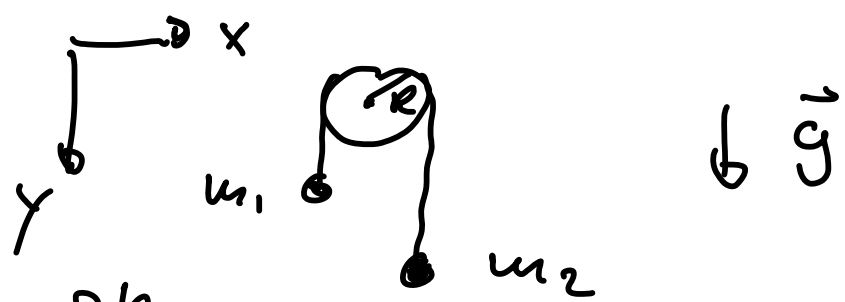
$$\Rightarrow \boxed{m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{D}_i f_j)}$$

vgl. mit Newton
 $m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{Z}_i = \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{D}_i f_j)} : \text{Zwangskraft}$$

Bestimmung der Zwangskräfte u. U. einfacher mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren

Beispiel: Suche Fadenspannung
Atwoodsche Fallmaschine



z.B.

$$z_1 = 0 = z_2 ; x_1 = 0 ; x_2 = 2R$$

$Y_1 + Y_2 + \pi R = \ell$: wird hier nicht verwendet

↳ Anzahl generalisierter Koordinaten: $6 - 4 = 2$

$$q_1 = Y_1 ; q_2 = Y_2$$

$$f(q_1, q_2) = 0 = q_1 + q_2 + \pi R - \ell$$

$$\hookrightarrow \delta f = \delta q_1 + \delta q_2 = 0$$

$$\hookrightarrow a_{11} = 1 = a_{12}$$

ein Lagrange-Multiplikator: λ f
aus generalisierter Kraft: $Q_{im} = \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{im}$

$$Q_1 = \lambda = Q_2 \quad \text{Fadenspannung}$$

$$\text{Lagrange-Funktion: } L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) + g (m_1 q_1 + m_2 q_2)$$

L G6:

$$m_1 \ddot{q}_1 - g m_1 = \lambda$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - g m_2 = \lambda$$

$$+ \text{Zwangsbedingung: } \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0$$

} 3 Gleichungen
für 3 Unbekannte
(q_1, q_2, λ)

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$\Rightarrow \lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Fadenspannung:
für $m_1 \gg m_2$

$$\lambda = -2g m_2$$

für $m_1 = m_2 \Rightarrow \lambda = -g m$

Beispiel: "rollendes Rad"

System mit nicht-holonomen ZB; aber Darstellung
in differentieller Form

generalisierte Koordinaten:

$$\begin{array}{cc} x, y & \text{und} & \varphi, \Theta \\ q_1, q_2 & & q_3, q_4 \end{array}$$

Zwangsbedingung Rollen:

$$\dot{x} - R\dot{\varphi}\cos\Theta = 0 \quad ; \quad \dot{y} - R\dot{\varphi}\sin\Theta = 0$$

mit $\sum_{m=1}^n a_{im}\dot{q}_m = 0$

n : 4 Koordinaten
 $i = 1, 2$ Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc} a_{11} = 1 & a_{12} = 0 & a_{13} = -R\cos\Theta & a_{14} = 0 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 1 & a_{23} = -R\sin\Theta & a_{24} = 0 \end{array}$$

2 Lagrange-Multiplikatoren: λ_1, λ_2
4 generalisierte Kräfte ($Q_m = \sum_{i=1}^2 \lambda_i a_{im}$)

$$Q_1 = \lambda_1 \quad Q_2 = \lambda_2 \quad Q_3 = -\lambda_1 R\cos\Theta - \lambda_2 R\sin\Theta; \quad Q_4 = 0$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\Theta}^2$$

$$I_1 = \frac{1}{2} M R^2 \quad \text{Trägheitsmoment: Drehung um Achse}$$

$$I_2 = \frac{1}{4} M (R^2 + \frac{1}{3} d^2) \quad ; \quad d: \text{Scheibendicke}$$

LGK:

$m\ddot{x} = \lambda_1$; $m\ddot{y} = \lambda_2$; $I_1\ddot{\varphi} = -\lambda_1 R \cos\Theta - \lambda_2 R \sin\Theta$; $I_2\ddot{\Theta} = 0$
 + 2 Zwangsbedingungen: 6 Gleichungen für 6 Unbekannte

1) $\Theta = \dot{\Theta}_0 t$; $\ddot{\Theta} = \text{konst}$

2) $\lambda_1 = mR(\ddot{\varphi} \cos(\dot{\Theta}_0 t) - \dot{\varphi} \dot{\Theta}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t))$

3) $\lambda_2 = mR(\ddot{\varphi} \sin(\dot{\Theta}_0 t) + \dot{\varphi} \dot{\Theta}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t))$

4) $I_1\ddot{\varphi} = -mR^2\ddot{\varphi} \rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \dot{\varphi}_0 = \text{konst.}$

5) $\dot{x} = R\dot{\varphi}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow x(t) = R \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0} \sin(\dot{\Theta}_0 t) + x_0$

6) $\dot{y} = R\dot{\varphi}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow y(t) = -R \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0} \cos(\dot{\Theta}_0 t) + y_0$

Zwangskräfte:

$Q_1 = -mR\dot{\varphi}_0 \dot{\Theta}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t)$; $Q_2 = mR\dot{\varphi}_0 \dot{\Theta}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t)$

haben beide in der "Spur"
 $Q_3 = 0 = Q_4$

Hamiltonsche Prinzip / Variationsprinzip

048

bisher: d'Alembert-Prinzip: Differentialprinzip
↳ Ableitung der Lagrange-Gleichungen
(Bewegungsgleichungen) durch virtuelle
Umschiebungen

Hamilton-Prinzip: Integrationsprinzip

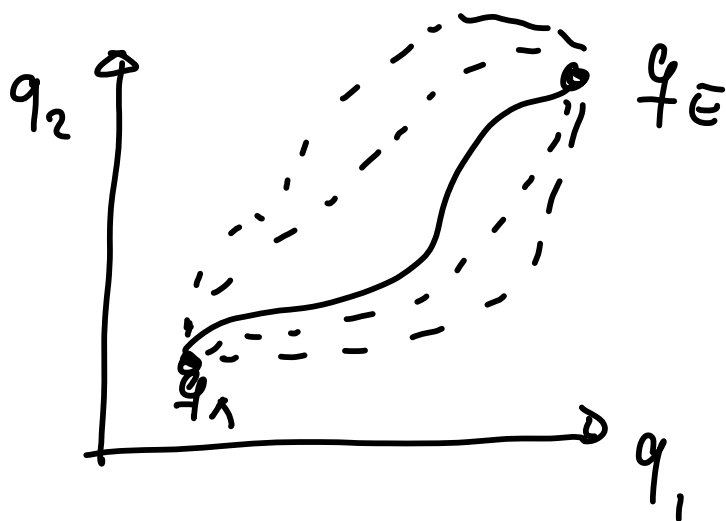
Bestimmung der Bewegungsgleichungen durch
Variation aller möglichen Bahnen + Optimierung
(Extremwertbestimmung)

betrachte Bahnen im \mathbb{R}^n

mit $q = (q_1, \dots, q_n)$ Konfigurationsvektor

Bahnen $t_A \leq t \leq t_E$; $t \mapsto (q_1(t), \dots, q_n(t))$

mit Randwerten $q(t_A) = q_A$; $q(t_E) = q_E$



mit der Funktion : $L = L(q(t); \dot{q}(t), t)$

allgemein : $q(t)$ beliebige Funktionen $= L(t)$

$\dot{q}(t)$ "Änderungsrate" von $q(t)$

und

$$S[L] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t)$$

hier : Wirkung,
Wirkungsfunktional

Funktional (hier
Abb von Funktionen in \mathbb{R} ,
allgem. : Abb. von
Funktionen auf Funktionen)

=> Hamiltonsches Prinzip

Die Bewegung eines Systems erfolgt entlang einer Bahnkurve im Konfigurationsraum, die $S[L]$ stationär macht.

auch: Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\boxed{\delta S = 0} \rightarrow \text{Variationstechnik}$$

S : stationär / extremal

Möglichkeit 1

betrachte Bahnen mit kleiner Variation um
Extremal-Bahn:

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0(t) + \alpha \underline{s}(t) = \underline{q}(t, \alpha)$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{q}}(t, \alpha) = \dot{\underline{q}}_0(t) + \alpha \dot{\underline{s}}(t)$$

mit Randbedingungen: $\underline{s}(t_*) = 0 = \underline{s}(t_e)$

$$\rightarrow L = L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha))$$

$$\rightarrow S(\alpha) = \int_{t_A}^{t_E} dt L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha))$$

$$S: \text{stationär} \quad : \quad \delta S = \left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\underline{\partial}_q L) \cdot \underline{s} + (\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \cdot \underline{\dot{s}} \right]$$

$$\text{p. I} \quad = \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\underline{\partial}_q L) \underline{s} - \frac{d}{dt} (\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \underline{s} \right] + \underbrace{(\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \cdot \underline{s}}_{=0} \Big|_{t_A}^{t_E}$$

$$\rightarrow \int_{t_A}^{t_E} dt \left[(\underline{\partial}_q L) - \frac{d}{dt} (\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \right] \cdot \underline{s}$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

Randterm

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) - \nabla_q L = 0 \right]$$

Euler-Gleichung der Variationsrechnung
+ Mechanik

↳ Euler-Lagrange-Gleichungen

(ELG oder ELDG)

Möglichkeit 2

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} L dt = \int_{t_A}^{t_E} \delta L dt$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} \left[(\nabla_q L) \delta q + (\nabla_{\dot{q}} L) \delta \dot{q} \right] dt ; \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} \left[(\nabla_q L) \delta q - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) \delta q \right] dt + \left. (\nabla_{\dot{q}} L) \delta q \right|_{t_A}^{t_E}$$

$\leftarrow = 0$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \underbrace{\left[(\nabla_q L) - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) \right]}_{=0} \delta q$$

= 0 wg. unabhängig von δq

\Rightarrow ELG

Vergleich mit d'Alembert Prinzip

d'Alembert Prinzip : $\sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$

mit $\ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x} = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{x}} \delta \vec{x}) - \dot{\vec{x}} \delta \dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{x}} \delta \vec{x}) - \frac{1}{2} \delta \dot{\vec{x}}^2$

Integration

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i \left(\underbrace{\vec{F}_{a,i} \cdot \delta \vec{x}_i}_{(1)} - \underbrace{\frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x})}_{(2)} + \underbrace{\frac{m_i}{2} \delta \dot{\vec{x}}_i^2}_{(3)} \right)$$

$$\textcircled{1} \quad \sum_i \vec{F}_{ext,i} \delta \vec{x}_i = \sum_j Q_j \delta q_j = - \sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j = - \delta U$$

für konservativ
e Systeme

$$\textcircled{2} \quad \int_{t_A}^{t_E} dt \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i \Big|_{t_A}^{t_E}$$

= 0 Start- und Endpunkte
werden nicht variiert

$$\textcircled{3} \quad \sum_i \frac{m_i}{2} \delta \dot{\vec{x}}_i^2 = \delta T \quad T: \text{kinetische Energie}$$

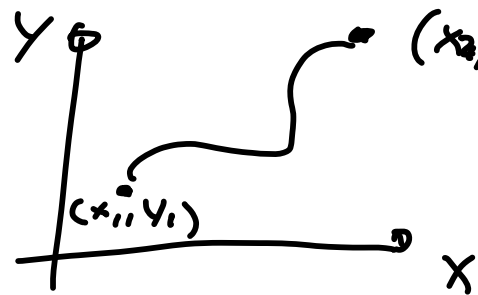
$$\Rightarrow 0 = \int_{t_A}^{t_E} dt (\delta T - \delta U) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt (T - U) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt L$$

$\Rightarrow L$: Lagrange-Funktion

\Rightarrow d'Alembert'sches Prinzip ist äquivalent zu
Hamilton'schen Prinzip

Variationsrechnung Beispiele

1) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene



Kurve: $y = y(x)$ gesucht
mit Parameter x

infinitesimales Wegsegment: ds

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Wegstrecke:
$$s = \int_{p_1}^{p_2} ds = \int_{p_1}^{p_2} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\Rightarrow L = L(y, y') \stackrel{\text{hier}}{=} L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\Rightarrow \text{Euler-Lagrange-Gleichungen: } \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} y' \right)$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } y' = \text{const.} \Rightarrow y(x) = ax + b$$

Gerade

2) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf
Kugeloberfläche

Koordinaten: Θ, φ ; $R = \text{const.}$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= R^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2)$$

und t : beliebiger Parameter; z.B. Zeit : $\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt}$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt R (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)^{1/2}$$

$$\delta S = 0 = \int dt \frac{1}{2} R (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)^{-1/2} \delta (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)$$

(\rightarrow Geodätengleichung)

betrachte $\tilde{L} = \dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2 = L(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\varphi})$

$$\Rightarrow \text{EGL: } \left. \begin{array}{l} \Theta: \ddot{\Theta} = \sin\Theta \cos\Theta \dot{\varphi}^2 \\ \varphi: \ddot{\varphi} = -2 \frac{\cos\Theta}{\sin^3\Theta} \dot{\Theta} \dot{\varphi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } \Theta = \pi/2 \\ \omega \ddot{\varphi} = 0 \\ \omega \dot{\varphi} = \text{const.} \end{array}$$

Bemerkung: unterschiedliche Lagrange-Funktionen

z.B. Kugeloberfläche:

$$ds = R d\theta \sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'} \quad ; \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta}$$

$\Rightarrow L(\varphi', \theta)$ hier: θ (Integrations)parameter $\hat{=}$ "zeit"

$$ds = R d\varphi \sqrt{\theta' + \sin^2 \theta}$$

$\Rightarrow L(\theta, \theta')$: ohne "zeit"

Geodätengleichung (= extremale Bahnen in beliebiger Geometrie)

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j = g_{ij} dx_i dx_j \quad (\text{Summenkonvention})$$

x_i : beliebige Koordinaten

g_{ij} : Metrik, metrischer Tensor
als Matrix darstellbar

z.B. $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$; $\underline{x} = (r, \theta, \varphi)$

$$\Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j} \quad ; \quad t : \text{beliebiger Parameter}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} (g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j)^{-1/2} \delta (g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} (\quad)^{-1/2} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \delta x_k \dot{x}_i \dot{x}_j + \underbrace{g_{ij} \delta (\dot{x}_i \dot{x}_j)}_{\frac{\partial \dot{x}_i \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_k} \delta \dot{x}_k} \right]$$

$\frac{\partial \dot{x}_i \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_k} \delta \dot{x}_k$
 \uparrow
 $\frac{d}{dt} \delta x_k$

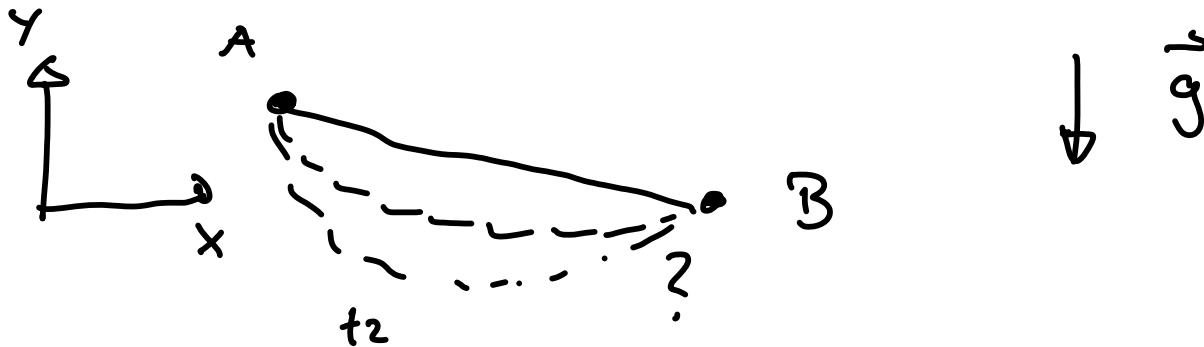
part. Integration

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} (\dots)^{-1/2} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_i \dot{x}_j - 2 \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{x}_j) \right] \delta x_k$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{x}_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 \right] \text{ Geodäten-Gleichung}$$

Bewegungsgleichung für Teilchen aber auch Licht
in gegebener Geometrie (z.B. Planetenbahnen,
Lichtbeugung)

Brachistochronenproblem
(gr. brachyistos = kürzeste, chronos = Zeit)
schnellster Weg im Schwerfeld der Erde



$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \quad \rightarrow \quad \text{extremal: } \delta S = 0$$

aus Energieerhaltung

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgy = mgh$$

$$A: (0, h) ; B: (x_B, 0)$$

$$\Rightarrow v(y) = \sqrt{2g(h-y)}$$

$$\text{mit } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$S = \int_0^{x_B} dx \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} \Rightarrow \text{Lagrange-Funktion:}$$

$$L(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

$$\text{ELG: } \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(h-y)}(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g(h-y)}(1+y'^2)^{3/2}} \left[\frac{1}{2} \frac{y'^2}{2g(h-y)} + \frac{y''}{1+y'^2} \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} \cdot \frac{1}{h-y}$$

$$\Rightarrow \boxed{2(h-y)y'' = 1+y'^2} \quad \text{Euler DGL}$$

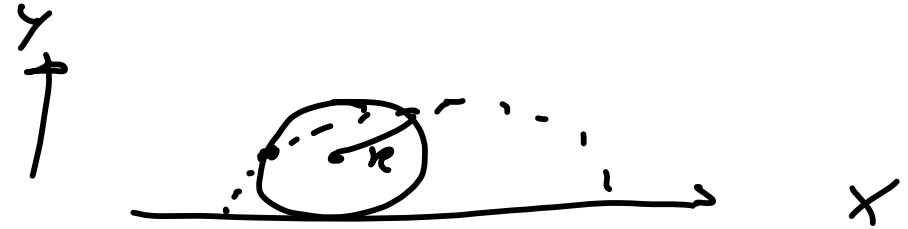
$$\text{Lösung: } \frac{d}{dx} \left((h-y)(1+y'^2) \right) = 0$$

$$\Rightarrow (h-y)(1+y'^2) = a = \text{const.}$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{a-(h-y)}{h-y} = \frac{a-\tilde{y}}{\tilde{y}} \quad ; \quad \tilde{y} = h-y$$

Lösung: Teil einer Zykloidenbahn:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2R-y}{y}$$



$$x = R(\varphi + \sin\varphi)$$

$$y = R(1 + \cos\varphi)$$

Bemerkung: wenn $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ $t =$ Parameter zur Beschreibung des Problems (s.o. $t = x$)

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{const.} \right]$$

Bsp. kürzeste Strecke in der Ebene:

$$ds = dx \sqrt{1+y'^2} \rightarrow L(y') \text{ bzw. } \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\text{aus } y' \frac{\partial L}{\partial y'} = L = \text{const.} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\text{Lösung } \Rightarrow y(x) = ax + b$$

Variationsrechnung mit Nebenbedingung

Hamiltonsche Prinzip \Leftrightarrow Lagrange-GL. 1. Art

betrachte System mit f nicht-holonomen Zwangsbedingungen die sich in differentieller Form darstellen lassen:

$$\sum_{m=1}^n a_{im}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_m + b_i = 0 \quad i = 1, \dots, f$$

mit Hamiltonschen Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m = 0$$

q_m 's nicht unabh. voneinander $\rightarrow (\dots) \neq 0$

mit HP: Endpunkte bleiben unverändert: $\delta t = 0$

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \delta q_m = 0$$

mit Lagrange-Multiplikatoren λ_i : $\int dt \sum a_{im} \lambda_i = 0$

$$\Rightarrow \int_{t_A}^{t_B} \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^f a_{im} \lambda_i \right) \delta q_m = 0$$

wähle λ_i so daß $(\dots) = 0$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^f a_{im} \lambda_i \right) \quad \text{Lagrange-Gl. 1. Art}$$

n Gleichungen (q_m) für $n+f$ Unbekannte
 + f Gleichungen aus Zwangsbedingungen

betrachte Systeme mit Nebenbedingungen bzw.
 holonome Zwangsbedingungen

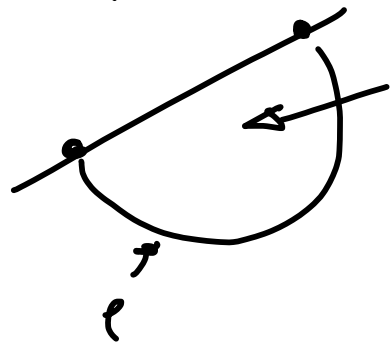
$$g_i(\underline{q}, t) = 0 \Rightarrow dg_i = 0 \Rightarrow a_{im} = \frac{\partial g_i}{\partial q_m}$$

\Rightarrow modifizierte Grundfunktion bzw. mod. Lagrange-Funktion

$$\tilde{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + \sum_{i=1}^f \lambda_i g_i(\underline{q}, t)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_m} = 0 \right)$$

Bsp. Isoperimetrisches Problem



max. Fläche?

Fläche

$$F = \int_{x_1}^{x_2} dx y \quad ; \quad y = y(x)$$

$$L = L(y)$$

Nebenbedingung: $l = \int_{p_1}^{p_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_g$

$$\Rightarrow \tilde{L} = y + \lambda \sqrt{1+y'^2} = L(y, y')$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{L} - y' \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'} = \text{const} = h$$

Lösung: $x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - \sqrt{\lambda^2 - h^2})^2 + (y - h)^2 = \lambda^2$

Kreisbogen mit $x_2 = 2\sqrt{\lambda^2 - h^2}$

• Variationsrechnung mit Nebenbedingung

allgemein: $t \in \mathbb{R}$

$$Q = \int_{t_k}^{t_E} G(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) dt = \text{const.}$$

(z.B. Isoperimetrische Probleme, "gleicher Umfang")

mit modifizierter Grundfunktion / modifizierte Lagrange-Funktion

$$\tilde{L} = L + \sum_{i=1}^f \lambda_i G_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \quad ; f: \text{Anzahl der Nebenbed.}$$

⇒ Lösung des Problem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \underline{\dot{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \underline{q}} = 0$$

Euler-Gleichung mit modifizierter Grundfunktion

n - Gleichungen ($\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$) für $n+f$ Unbekannte ($\lambda_i : i = 1 \dots f$) + Nebenbedingungen

Erhaltungssätze / Noether Theorem

066

allgemein mechanische Systeme

Änderung von \underline{q} und $\underline{\dot{q}}$

mit $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$; $\underline{\dot{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$; $2n$ Größen

Integral der Bewegung / Bewegungsintegral

$$I_n = \bar{I}_n(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = C_n = \text{konstant}$$

entlang Trajektorie, die durch ELG (Newtonschen Bewegungsgleichungen) bestimmt ist.

Bsp.: zyklische Koordinate $\rightarrow \bar{I}_n$

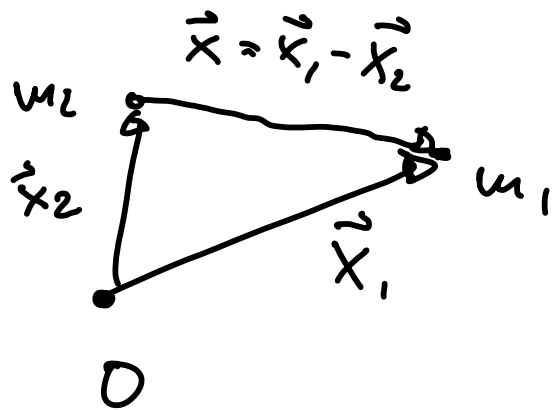
$$\text{zyklische Koordinate: } \frac{\partial L}{\partial q_n} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{I}_n; \bar{I}_n = \text{const.}$$

abhängig von der Wahl des Koordinatensystems
 \hookrightarrow wähle Koordinatensystem, so daß \bar{I}_n 's einfach gefunden werden können

anschaulich: Kepler-Problem / 2-Körper-Problem

067



Potential nur von Abstand abhängig: $V = V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$

mit Gesamtmasse: $M = m_1 + m_2$

reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Schwerpunkt: $\vec{k} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2) = (X, Y, Z)$

relative Koordinate: $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = r \begin{pmatrix} \sin\Theta \cos\varphi \\ \sin\Theta \sin\varphi \\ \cos\Theta \end{pmatrix} = (q_4, q_5, q_6)$

$(r, \Theta, \varphi) = (q_4, q_5, q_6)$

$$\Rightarrow L = \frac{M}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{\mu}{2} (\dot{q}_4^2 + q_4^2 (\dot{q}_5^2 + \sin^2 q_5 \dot{q}_6^2)) - V(q_4)$$

zyklische Koordinaten: q_1, q_2, q_3, q_6

$$\Rightarrow p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = M \dot{q}_1 = M \dot{x} = \text{const} = \bar{I}_1$$

$$p_2 = M \dot{q}_2 = M \dot{y}; \quad p_3 = M \dot{q}_3 = M \dot{z}$$

\rightarrow Impulserhaltung des Schwerpunkts

$$p_6 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_6} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = I_c \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung}$$

p_i 's : generalisierte Impulse

vgl.: in kartesischen Koordinaten

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

\Rightarrow keine zyklische Koordinate

Noether Theorem

Frage nach "Symmetrien" eines Systems und

Zusammenhang mit Erhaltungssätzen

betrachte zyklische Koordinate:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_u} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_u} = 0 \Rightarrow p_u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_u} = \text{const.}$$

Intepretation : zyklische Koordinate

$L(q, \dot{q}, t)$ ist invariant unter Koordinatentransformation

$$q_k \rightarrow Q_k(\lambda) = q_k + \lambda$$

Translation \rightarrow Symmetrie (entlang Richtung q_k)

$$\text{und } Q_j(\lambda) = q_j \text{ für } j \neq k$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{Q}} = \underline{\dot{q}}$$

$$\Rightarrow L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) \Leftrightarrow \frac{\partial L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t)}{\partial \lambda} = 0$$

Verallgemeinerung : beliebige Koordinatentransformation

$$Q_i(\lambda) = Q_i(q, t) ; \lambda \in \mathbb{R} ; \text{ d.h. einparametrische Schar von Koordinatentransfo}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_i(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \quad i = 1 \dots n$$

mit $Q_i(0) = q_i ; \dot{Q}_i(0) = \dot{q}_i$ für $\lambda = 0$ sind Q_i und q_i identisch

Def.: Transformation ist Symmetrie - Transformation

von $L = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ falls

$$\left. \frac{\partial L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0$$

d.h. L ist invariant unter einparametrischen
Koordinatentransformation

Bsp.: 1) zyklische Koordinate

2) Drehung in Ebene

$$X(\lambda) = x \cos \lambda + y \sin \lambda \quad \rightarrow \quad \dot{X} = -x \sin \lambda + y \cos \lambda$$

$$Y(\lambda) = y \cos \lambda - x \sin \lambda \quad \dot{Y} = -y \sin \lambda - x \cos \lambda$$

mit $L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r) \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2$

$$= \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - V(\rho) \quad ; \quad \rho^2 = X^2 + Y^2$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial L(X, \dot{X}, Y, \dot{Y})}{\partial \lambda} = 0$$

hier: keine Abhängigkeit
von λ

Noether Theorem

sei L invariant unter Symmetrietransformation
dann ist I Konstante der Bewegung

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\lambda=0}$$

Beweis:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

(gilt für einparametrische Symmetrietransf.)

mit ELG: $\partial L / \partial q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{dt} I \Rightarrow I \text{ konstante der Bewegung}$$

Bsp. : 1) zylindrische Koordinate

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} = \begin{cases} 0 & i \neq \mu \\ 1 & i = \mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \sum_i \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = p_\mu = \text{const.}$$

2) Drehung

$$\left. \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = Y \quad ; \quad \left. \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = -X$$

$$I = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = y m \dot{x} - x m \dot{y}$$

$$= -m (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})_z = -L_z \quad \begin{array}{l} z\text{-komponente} \\ \text{Drehimpuls} \end{array}$$

Allgemein: Homogenität des Raums:

Ursprung nicht ausgezeichnet

→ Symmetrie transformation möglich

hier: Translation

$$\vec{x}_i \rightarrow \vec{Q}_i = \vec{x}_i + \lambda \vec{u} \quad ; \quad \vec{u} \text{ beliebige Richtung}$$

z.B. N-Körper - Wechselwirkung nur abhängig von Abständen $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$:

$$V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) = V(|\vec{Q}_i - \vec{Q}_j|)$$

Noether - Konstante / Noether - Ladung:

$$\frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} = \vec{h} \quad ; \quad T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \dot{\vec{x}}_i^2$$

$$\vec{I} = \sum_i^N \left. \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \right|_{\lambda=0} = \sum_i^N \vec{h} \cdot (m_i \dot{\vec{x}}_i)$$

$\Rightarrow \vec{P} = \sum_i^N m_i \dot{\vec{x}}_i$ Gesamt linear - Impuls
= Erhaltungsgröße

$\vec{h} = \frac{1}{M} \sum_i^N m_i \dot{\vec{x}}_i$ Schwerpunkt : $\ddot{\vec{h}} = 0$

• Homogenität des Kerns

\Leftrightarrow Gesamtimpulserhaltung

\Leftrightarrow System (L) translationsinvariant
(= Symmetrietransformation)

- Isotropie des Raums

$\hookrightarrow L$ invariant unter Drehung: $\vec{Q}_i = D \vec{x}_i$

D : Drehmatrix: $D = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hier: um z -Achse

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \Big|_{\lambda=0} ; \quad \frac{\partial D}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i (-y_i \dot{x}_i + x_i \dot{y}_i) = \sum_i L_{z,i}$$

$= L_z$ z -Komponente des Gesamtdrehimpuls
 \rightarrow erhalten

Drehrichtung beliebig $\Rightarrow \vec{L}$ Gesamtdrehimpuls erhalten

- Isotropie des Raums

\Leftrightarrow Gesamtdrehimpulserhaltung

\Leftrightarrow System invariant unter Drehung
 (= Symmetrie-Transformation)

- Homogenität der Zeit

betrachte $\underline{q}(t)$: Lösung der ELG

mit $\underline{q}(t_A) = \underline{q}_A$ und $\underline{q}(t_E) = \underline{q}_E$

System "zeitlich homogen" : invariant unter
Zeittranslation : $t \rightarrow t + \Delta t$

↳ $\underline{q}(t_A + \Delta t) = \underline{q}_A$; $\underline{q}(t_E + \Delta t) = \underline{q}_E$

⇒ L kann nicht explizit von der Zeit t abhängig sein,
da $\underline{q}(t)$ aus L gewonnen wird :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L}$$

Konstante entlang

ELG - Bahn

Integral der Bewegung

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H &= \sum_i \left(\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \dot{q}_i \right) \\ &= \sum_i \dot{q}_i \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)}_{ELG = 0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H = \text{const}$$

$H = ?$ Lagrange-Funktion: $L = T - V$
 + skleronome Zwangsbedingungen
 + konservativ

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mu_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\text{da } \dot{\vec{x}} = \sum_i \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \quad \text{mit } \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = 0$$

konservativ: $V = V(\underline{q})$

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

$$H = 2T - L = T + V \quad \text{Gesamtenergie}$$

Eichtransformation

$$L \rightarrow \tilde{L} = \alpha L + \frac{d}{dt} f(\underline{q}, t) \quad ; \alpha = \text{const}$$

\tilde{L} erfüllt gleiche ELG wie $L = L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$

$f = f(\underline{q}, t)$: Eichfunktion

• $\tilde{L} = \alpha L$ offensichtlich, da ELG linear in L

• $\tilde{L} = L + \frac{d}{dt} f(\underline{q}, t)$

aus Variationsprinzip: $\delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt L = 0$

$$\delta \tilde{S} = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt \frac{d}{dt} f = \delta [f(\underline{q}_E, t_E) - f(\underline{q}_A, t_A)] = 0$$

keine Variation

aus ELG:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{d}{dt} f \right) - \frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{dt} f \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q} - \dot{q} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t} \\
 &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \dot{q} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t} = 0 \\
 \Rightarrow & \left| \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = 0 \right.
 \end{aligned}$$

"Physik" unabhängig
von Eichtransformation

Symmetrie - Transformation

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) &= L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) + \frac{d}{dt} f(\underline{Q}, t) \\
 &= L(\underline{q}(\underline{Q}, t), \underline{\dot{q}}(\underline{Q}, t), t)
 \end{aligned}$$

$\underline{Q}_i = \underline{Q}_i(\underline{q}, t, \lambda)$ einparametrische Transformation

=> Noether - Konstante / Ladung

$$J(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i(\underline{Q}, t)}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\lambda=0} - \frac{\partial f(\underline{Q}, t)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$$

$\frac{d}{dt} J = 0$

symmetrie-Transformation: $\frac{\partial L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0$

=> $0 = \frac{\partial L(q(\underline{Q}, t), \dot{q}(\underline{Q}, t), t)}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{d}{dt} f(\underline{Q}, t) \quad \text{bei } \lambda = 0$

$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q(\underline{Q}, t)}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \underline{Q}} \frac{d}{dt} f(\underline{Q}, t) \right)$
 siehe Noether-Theorem ELG + Eichfunktion

$= \dots - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \underline{Q}} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{Q}} \dot{Q} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right)$
 $\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \underline{Q}} \frac{\partial f}{\partial \underline{Q}} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial q(\mathbf{q}, t)}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial f(\mathbf{q}, t)}{\partial \lambda} \right] \Big|_{\lambda=0}$$

Bsp. Galilei-Transformation
im kräftefreien Fall

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}(\lambda)t \quad ; \quad \text{mit } \vec{v}(0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 1$$

$$L'(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) = L(\vec{x}(\vec{x}', t), \dot{\vec{x}}(\vec{x}', t), t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}'^2$$

$$= L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) + \frac{d}{dt} f(\vec{x}', t)$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{\vec{x}}' - \vec{v})^2 = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}'^2 + \underbrace{\frac{m}{2} \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{v} - 2 \dot{\vec{x}}')}_{\frac{d}{dt} f(\vec{x}', t)}$$

$$\hookrightarrow f(\vec{x}', t) = \frac{m}{2} \vec{v}(\vec{v} \cdot t - 2 \dot{\vec{x}}')$$

Erhaltungsgröße / Noether-Ladung

$$\vec{x}(\vec{x}', t) = \vec{x}' - \vec{v}t \quad ; \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} = -t$$

$$\text{mit } J(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} - \left. \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$$

$$= m \dot{\vec{x}} (-t) - (-m \dot{\vec{x}})$$

$$= m(\vec{x} - \dot{\vec{x}} t)$$

äquivalent zur Bewegungsgleichung: $\ddot{\vec{x}} = 0$

$$\hookrightarrow \text{Lösung: } \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$\Rightarrow J = m \dot{\vec{x}}_0$$

Bemerkung:

aus Symmetrietransformation folgt Erhaltungsgröße $(\vec{I}, \vec{\tau})$:

Noether-Theorem

aber: Erhaltungsgrößen lassen nicht auf notwendige

Symmetrietransformation schließen (z.B. Lenzsche

Vektor: $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha \vec{e}_r$; für $\vec{F} = \alpha/r^2 \vec{e}_r$

\hookrightarrow keine Periheldrehung)

Hamilton - Mechanik

082

Lagrange-Mechanik: gegeben: generalisierten Koordinaten q_i mit $i = 1 \dots n$ (n -dimensionaler Konfigurationsraum q)
und generalisierte Geschwindigkeiten (Änderung) \dot{q}_i
aber: bei Koordinatentransformation: Geschwindigkeiten fixiert,
d.h. q und \dot{q} nicht unabhängig voneinander.

\Rightarrow suche Formulierung mit "symmetrischen" / gleichberechtigten Größen

mit: größere Klasse von Variablentransformationen, Ausweitung des Formaldimms auf größere Problemlasse (insb. Quantenmechanik, Thermodynamik, Statistik), evtl. einfachere Problemlösung

Bsp.: $\ddot{x} = \omega^2 x$ neue Variable $y_{\pm} = \omega x \pm \dot{x}$
(anstatt x, \dot{x})

$$\Rightarrow \dot{y}_{\pm} = \omega \dot{x} \pm \ddot{x} = \omega \dot{x} \pm \omega^2 x = \pm \omega (\omega x \pm \dot{x}) = \pm \omega y_{\pm}$$

\hookrightarrow Lösung $y_{\pm}(t) = C_{\pm} e^{\pm \omega t}$; $x(t)$ aus Richttransformation

Wichtige Transformationsklasse in der Physik

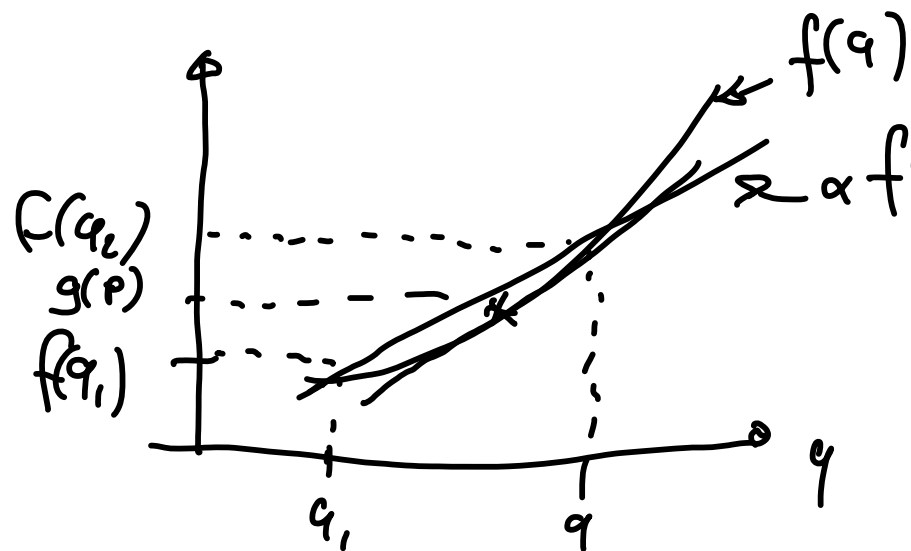
Legendre-Transformation

(auch: Thermodynamik)

Def: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex falls für alle $\underline{q}_1, \underline{q}_2 \in \mathbb{R}^n$

und $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt:

$$f(\alpha \underline{q}_1 + (1-\alpha)\underline{q}_2) \leq \alpha f(\underline{q}_1) + (1-\alpha)f(\underline{q}_2)$$



f ist stetig konvex
für $0 < \alpha < 1$

$$f(\dots) < \alpha f(\underline{q}_1) + (1-\alpha)f(\underline{q}_2)$$

Anwendung: konvexe Funktionen können durch Tangentenflächen beschrieben werden mit Parametrisierung der Steigung $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$:

Tangente : $\underline{p} \cdot \underline{q} - g(\underline{p})$

Bedingung für Berührung:

$$f(\underline{q}) = \underline{p} \cdot \underline{q} - g(\underline{p}) \quad ; \quad \underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$$

Definition:

$$\underline{p} \mapsto g(\underline{p}) = \underline{p} \cdot \underline{q} - f(\underline{q}) \quad \text{mit } \underline{q} \text{ aus}$$

$$\underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$$

Legendre-Transformierte von $f(\underline{q})$

Bemerkungen:

- $\underline{q}, \underline{p}$ korrespondierende Punkte wenn $\underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$
- $g(\underline{p})$ ist konvex, wenn $f(\underline{q})$ konvex
- Legendre-Transformierte von $g(\underline{p})$ ist Ursprungsfunktion $f(\underline{q})$ (Rücktransformation, Rekonstruktion)

Bsp.: $f(q) = aq^2$ mit $a > 0$

$g(p) = pq - f(q)$ mit $p = \frac{df}{dq} = 2aq$

$\hookrightarrow q = \frac{p}{2a}$

$\Rightarrow g(p) = \frac{p^2}{2a} - a\left(\frac{p}{2a}\right)^2 = \frac{p^2}{4a}$

Legendre-Transformierte von $g(p)$:

$h(q) = qp - g(p)$ mit $q = \frac{dg}{dp} = \frac{p}{2a}$

$= aq^2$ Ursprungsfunktion

Wann $g(p) = pq - f(q)$ anstatt $g(p) = f(p)$

z.B. $f(q) = a(q+c)^2$; $p = \frac{df}{dq} = 2a(q+c)$

$\hookrightarrow q = \frac{p}{2a} - c$

mit $g(p) = f(p) = \frac{p^2}{4a}$

\hookrightarrow Nichttransformation nicht Ursprungsfunktion

aber $g(p) = pq - f(q) = \frac{p^2}{4a} - cp \rightarrow$ Nichttransformation
 $\hookrightarrow f(q)$

Hamilton Funktion

$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$: A. konkrete Funktion von $\underline{\dot{q}}$

↳ Hamilton-Funktion = Legendre-transformierte der
Lagrange-Funktion bezüglich $\underline{\dot{q}}$

wobei $\underline{\dot{q}} \rightarrow \underline{p}$: generalisierte Impulse, kanonische
oder konjugierte Impulse

$$\left. \begin{aligned} H(\underline{q}, \underline{p}, t) &= \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \end{aligned} \right\} \text{Hamilton-Funktion}$$

auf Phasenraum $(\underline{q}, \underline{p})$; 2n dim. Raum

$$\underline{p} = \text{grad}_{\underline{\dot{q}}} (L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)) \quad \text{bzw.} \quad \boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

kanonisch-konjugierte Impulse

Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus

=> Hamilton'sche Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{mit } dH &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i dq_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$\text{mit } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$$

$$\Rightarrow dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

mit $H = H(\underline{q}, \underline{p})$

$$\Rightarrow dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

damit

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} & \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Hamilton-Gleichungen = kanonische Gleichungen

das sind $2n$ Differentialgleichungen 1. Ordnung
 für $2 \times n$ kanonischen Variablen q_i und p_i
 ($i = 1 \dots n$); diese spannen den $2n$ -dimensionalen
Phasenraum auf

Bedeutung von H ?

wie gezeigt: $H = T + V$

Gesamtenergie des Systems
 falls nur skleronome Zwangs-
 bedingungen vorliegen und
 System konservativ, d.h.
 $V = V(\underline{q})$

z.B. $L(\dot{\underline{x}}, \underline{x}) = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}^2 - V(\underline{x})$

↳ $H = \frac{\underline{p}^2}{2m} + V(\underline{x})$: Gesamtenergie mit $\underline{p} = m \dot{\underline{x}}$
 Impuls

• zeitliche Änderung von H

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

Poisson-Klammer $\{H, H\}$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{d.h. wenn } \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow H = \text{Bewegungsintegral}$

- wenn q_n zyklische Koordinate:

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \dot{p}_n = 0$$

$\Rightarrow p_n = \text{const.}$ d.h. keine Variable

mit $\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow H$ nicht von q_n abhängig

\hookrightarrow Elimination von zwei Variablen q_n, p_n

- Bsp

1) Harmonischer Oszillator / Fedpendel

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} ; \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H = p \frac{p}{m} - \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 ; \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = E = \text{konst. Gesamtenergie}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2\epsilon/\mu\omega^2} + \frac{p^2}{2m\epsilon} = 1 \quad \text{Ellipse im Phasenraum}$$

mit $a = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\mu\omega^2}}$; $b = \sqrt{2m\epsilon}$

kanonische Gleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\mu\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

2) Teilchen im E-M-Feld mit Ladung e ϕ : el. Potential

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - e (\phi(\vec{x}) - \vec{A}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}) \quad ; \quad \vec{A}: \text{Vektorpotential}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \dot{\vec{x}} + e \vec{A} \quad \text{kanonisch-konjugierte Impuls}$$

\neq mechanischer linearer Impuls

$$H = \dot{\vec{x}} \vec{p} - L = \frac{(\vec{p} - e \vec{A})^2}{2m} + e \phi$$

(in QM: $H \rightarrow \hat{H}$: Hamilton-Operator)

mit $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{Bewegungsintegral}$

Hinweis: H in verschiedenen Koordinatensystemen ohne
Zwangsbedingungen mit $V = V(\vec{x})$

091

• kartesisch: $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$; $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ mechanischer
linearimpuls

• Zylinderkoordinaten: (ρ, φ, z)

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 + p_z^2 \right) + V(\rho, \varphi, z)$$

$$p_\rho = m \dot{\rho} ; p_\varphi = m \rho^2 \dot{\varphi} ; p_z = m \dot{z}$$

\neq mechanische linearimpulse

• Kugelkoordinaten: (r, Θ, φ)

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\Theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} p_\varphi^2 \right) + V(r, \Theta, \varphi)$$

$$p_r = m \dot{r} ; p_\Theta = m r^2 \dot{\Theta} ; p_\varphi = m r^2 \sin^2 \Theta \dot{\varphi}$$

Hamilton-Gleichungen aus Variationsprinzip / Prinzip der
kleinsten Wirkung

$$\text{mit } L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p})$$

mit \underline{q} und \underline{p} unabhängige Variablen

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt L = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}) \right)$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

mit $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$ und $\int dt p_i \delta \dot{q}_i = - \int dt \dot{p}_i \delta q_i$ p. I.

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{i=1}^n \left(\delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}} \quad \text{und} \quad \boxed{\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

da q_i und p_i unabh. kon-
einander

Fermatsche Prinzip

für konservatives System $H = T + V = \text{const}$
gilt (Satz)

$$\Delta S' = \Delta \int_{t_A}^{t_E} dt \, \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} = 0$$

wobei $\Delta q = \delta q + \dot{q} \Delta t$

hier: unterschiedliche Lauf-
zeiten der Testbahnen
möglich

für kreisförmige Bewegung:

$$v = \text{const} \Rightarrow T = \text{const.}$$

$$\text{mit } \Delta S' = 2T \Delta \int_{t_A}^{t_E} dt = 0$$

vgl. virtuelle Umkehrung
 $\delta t = 0 \Rightarrow$ alle Testbahnen
haben gleiche Laufzeit

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = 2T$$

\Rightarrow Bahn mit minimaler
Laufzeit wird
realisiert

\Rightarrow Fermat'sche Prinzip (vgl. Optik)

für kräftefreie Bewegung: $v = \text{const}$ (Geschw.)

$$dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow \Delta s' = 0 = \frac{2T}{v} \Delta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

\Rightarrow zugleich extreme (minimale) Wegstrecke

= Geodäte

Poisson-Klammer

nützliches mathematisches Werkzeug; z.B. kompakte Darstellung der Bewegungsgleichungen

Vorbemerkung: (mechanische) Systeme beschrieben in unterschiedlichen Darstellungsräumen:

1) Konfigurationstraum: $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$; $\dim = n$

(generalisierte) Koordinaten

2) Ereignisraum: $\underline{q} + t = \text{Zeit}$; $\dim = n+1$

(Ereignis-)Bahnen bestimmt durch $2n$ Anfangsbedingungen, z.B. $\underline{q}(t_A)$ und $\underline{q}(t_E)$ oder

$\underline{q}(t_0)$ und $\underline{\dot{q}}(t_0)$ Orte und Geschwindigkeiten (*) 095

Lagrange - Formalismus

(\Rightarrow) Ereignisraum

(*) + Euler-Lagrange - Gleichungen
(DGLs 2. Ordnung)

3) Phasenraum: $(\underline{q}, \underline{p})$ Dim = $2n$

mit $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$; $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$

\underline{p} und \underline{q} gleichberechtigte Variablen

$\underline{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$

Menge aller Punkte, die im Phasenraum $\underline{\pi}$ durchlaufen werden: Phasenbahn, Phasentrajektorie

z.B. harmonischer Oszillator:

$$\frac{p^2}{2m\epsilon} + \frac{q^2}{2\epsilon/m\omega^2} = 1 \quad \text{Ellipse}$$

4) Zustandsraum:

Phasenraum + Zeit t ; Dim = $2n + 1$

$(\underline{\pi}, t)$: allgemeinstes Darstellungsräum, andere Räume sind Projektionen aus Zustandsraum (z.B. Konfigurationsraum)

Bewegen durch Hamilton Bewegungsgleichungen im Zustandsraum (= Phasentrajektorien)

DBCs 1. Ordnung \rightarrow bestimmt für alle Zeiten durch

$$\underline{\pi}(t_0) = \underline{\pi}_0$$

Hamilton-Formalismus \Leftrightarrow Zustandsraum

Poisson-Klammern

zur Formalisierung von Bewegungsgleichungen und Erhaltungsgrößen

betrachte Funktionen auf Zustandsraum (z.B. Hamilton-Funktion)

$$f(\underline{\pi}, t) = f(\underline{q}, \underline{p}, t)$$

$$\text{mit } \frac{d}{dt} f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{\text{Poisson-Klammer } f \text{ mit } H} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Poisson-Klammer f mit H : $\{f, H\}_{\underline{q}, \underline{p}}$

Def.: $f(\underline{q}, \underline{p})$ und $g(\underline{q}, \underline{p})$ Funktionen von $\underline{q}, \underline{p} \in \mathbb{R}^n$

$$\left\{ f, g \right\}_{\underline{q}, \underline{p}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Poisson-Klammer f mit g

d.h. zeitliche Änderung von f entlang Bewegungsbahn
= Zustandsraum

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\text{Bsp.: } H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{p_i}{m}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x})$$

insbesondere:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad ; \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

Fundamentale Poisson-Klammer

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0 \right)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}$$

Poisson-Klammern unabhängig von der Wahl der kanonischen Variablen:

kanonisch-konjugierte Variablen erfüllen fundamentale Poissonklammern, d. h. wenn Transformation

$$\underline{Q} = \underline{Q}(q, p, t) \quad \text{und} \quad \underline{P} = \underline{P}(q, p, t) \quad \text{mit}$$

$$\tilde{H}(\underline{Q}, \underline{P}) = H(\underline{Q}, \underline{P}) \quad \text{durch einsetzen} \\ = H(q, p)$$

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\} \quad \text{und} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \left| \{F, G\}_{\underline{Q}, \underline{P}} = \{F, G\}_{q, p} \right|$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial F(\underline{Q}, \underline{P})}{\partial q_i} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right)$$

$$\text{analog} \quad \frac{\partial F(\underline{Q}, \underline{P})}{\partial p_i} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right)$$

$$\begin{aligned}
\{F, G\}_{q,p} &= \sum_i \left[\sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right) - \sum_k \left(\frac{\partial G}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \right) \right] \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \right) \underbrace{\sum_j \left(\frac{\partial q_j}{\partial q_i} \frac{\partial p_k}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \right)}_{\delta_{jk}} \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \right) \\
&= \{F, G\}_{q,p}
\end{aligned}$$

Rechenregeln:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad ; \quad \{f, f\} = 0$$

linear:

$$\{\alpha f_1 + \beta f_2, g\} = \alpha \{f_1, g\} + \beta \{f_2, g\}$$

Produktregel:

$$\{f, gh\} = g \{f, h\} + \{f, g\} h$$

Jacobi-Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

(zyklische Vertauschung)

Konstante der Bewegung

$F(q, p, t)$ Konstante der Bewegung

$$\frac{d}{dt} F = 0 = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \{H, F\} = -\frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{Kriterium für Bewegungsintegral}$$

z.B. Hamilton-Funktion H

$$\frac{d}{dt} H = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

d.h. H Bewegungsintegral, wenn H nicht explizit von t abhängig

bei skleronomen Zwangsbedingungen

$$H = E \quad \text{Gesamtenergie}$$

Poisson'scher Satz:

wenn I_1 und I_2 Integrale der Bewegung, dann

$I_3 = \{I_1, I_2\}$ auch Bewegungsintegral

mit

$$0 = \{H, \{I_1, I_2\}\} + \underbrace{\{I_1, \{I_2, H\}\}}_{-\frac{\partial I_2}{\partial t}} + \underbrace{\{I_2, \{H, I_1\}\}}_{\frac{\partial I_1}{\partial t}}$$

verwende:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$$

$$\Rightarrow 0 = \{H, \{I_1, I_2\}\} + \frac{\partial}{\partial t} \{I_2, I_1\}$$

$$\Rightarrow \{H, \{I_1, I_2\}\} = -\frac{\partial}{\partial t} \{I_1, I_2\}$$

Anmerkung: Ausblick auf QM

Axiomatische Formulierung mit verallgemeinerter Poisson-Klammer

$$\{A, B\} \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad \text{Kommutatoren}$$

\hat{A}, \hat{B} : Operatoren (z.B. Differentialoperatoren, Matrizen)

- Observablen / Meßgrößen: Eigenwerte der Operatoren
- Fundamentalklammer

$$[q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \Rightarrow \text{Heisenbergsche Unschärferelation}$$

$\hbar = h/2\pi$; h : Plancksches Wirkungsquantum

- Hamilton-Funktion
↳ Hamilton-Operator

- Bewegungsgleichung: $\frac{d}{dt} \hat{A} = \frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}$

Hamilton-Jacobi-Theorie

Lösungen des Systems (Differentialgleichungen) durch geeignete Wahl kanonischer Transformation

Lagrange- und Hamilton-Gleichungen sind form-invariant unter Punkttransformation $\underline{q} \rightarrow \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q})$ und

mechanische Eichtransformation: $L \rightarrow L + \frac{d}{dt}f$

$$\left(\rightarrow \tilde{H} = H - \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

kanonische Phasenraumtransformation

$$\underline{\pi} \rightarrow \tilde{\underline{\pi}} = \tilde{\underline{\pi}}(\underline{\pi}) \quad \text{bzw.} \quad (\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\tilde{\underline{q}}, \tilde{\underline{p}}) \\ = (\tilde{q}(\underline{q}, \underline{p}), \tilde{p}(\underline{q}, \underline{p}))$$

kanonisch wenn

kanonischen Gleichungen erhalten bleiben:

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \quad ; \quad \dot{\tilde{p}}_i = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}$$

Bemerkung: Bestimmung von \tilde{H} nicht vorgeschrieben

$$\text{aber } \tilde{H} = H(\underline{q}(\tilde{q}, \tilde{p}, t), \underline{p}(\tilde{q}, \tilde{p}, t), t)$$

durch Einsetzen: kanonisch im eigentlichen Sinne

Fundamentale Poisson-Klammern erhalten

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = 0 = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} ; \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}$$

Bsp.:

1) $\tilde{q}_i = -p_i$ und $\tilde{p}_i = q_i$ "Vertauschung" von q und p

$$\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = H(\tilde{p}, -\tilde{q})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{p}_i}}_{\delta_{ji}} = \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = \dot{\tilde{q}}_i$$

$$\text{analog } \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = -\dot{p}_i$$

kanonische Gleichungen bleiben erhalten

→ Bedeutung von q und p im Hamilton-Formalismus
abstrakt

2) zyklische Koordinaten / Variablen
 Transformation möglich, sodaß alle Koordinaten q
 zyklisch?

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \text{const.} \quad i = 1 \dots n$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i(h_1, \dots, h_n) \quad ; \quad h_i = \text{const.}$$

$$\hookrightarrow q_i = \text{const.} \quad ; \quad \text{Annahme} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

im Prinzip möglich \rightarrow Hamilton-Jacobi-Theorie

Erzeugende Funktionen der Transformation

für kanonische Transformation $(\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}})$ gilt

(Satz)

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} + \frac{d}{dt} \bar{F}_1$$

wobei $\bar{F}_1 = \bar{F}_1(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t)$

beliebige Funktion der
 ursprünglichen q und
 transformierten \tilde{q}

\bar{F}_1 : Erzeugende der Transformation

Beweis:

1) modifiziertes Hamilton-Prinzip erfüllt:

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_B} dt \left(\sum_i \bar{p}_i \dot{\bar{q}}_i - \tilde{H}(\bar{q}, \bar{p}, t) \right)$$

↳ kanonische Gleichungen

- Bestimmung von $\tilde{H}(\bar{q}, \bar{p}, t)$ aus \bar{F}_1 :

$$d\bar{F}_1 = d\bar{F}_1(q_i, \bar{q}_i, t) = \sum_i \left(\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{q}_i} d\bar{q}_i \right) + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial t} dt$$

$$\text{und } d\bar{F}_1 = \sum_i (p_i dq_i - \tilde{p}_i d\bar{q}_i) + (\tilde{H} - H) dt$$

aus Koeffizientenvergleich:

$$\left. \left[p_i = \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} \right] ; \left[\tilde{p}_i = - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{q}_i} \right] ; \right\} \tilde{H} = H + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \tilde{H}(\bar{q}, \bar{p}, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial \bar{F}_1(q, \bar{q}, t)}{\partial t}$$

Bemerkung: \bar{F}_1 bestimmt Phasentransformation vollständig

$$\text{aus } p_i = p_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow \underline{\tilde{q}} = \underline{\tilde{q}}(\underline{q}, \underline{p}, t)$$

durch Umkehrung

$$\text{in } \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t) = -\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \tilde{q}_i}$$

$$\hookrightarrow \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\underline{q}, \underline{p}, t)$$

mit

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H}(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t) \right) = \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H}(\underline{q}_i, \underline{\tilde{p}}_i, t) + \frac{d}{dt} F_1 \right) \\ &= \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} \right) + F_1(\underline{q}_E, \underline{\tilde{q}}(t_E), t_E) - F_1(\underline{q}_A, \underline{\tilde{q}}(t_A), t_A) \\ \Rightarrow \delta S' &= \int_{t_A}^{t_E} dt \left[\sum_i \left(\dot{\tilde{q}}_i \delta \tilde{p}_i + \tilde{p}_i \delta \dot{\tilde{q}}_i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \delta \tilde{q}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \delta \tilde{p}_i \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta [F_{1,E} - F_{1,A}] \right] \end{aligned}$$

$$\text{mit } \int dt \tilde{p}_i \delta \dot{q}_i = \int dt \tilde{p}_i \frac{d}{dt} \delta q_i = - \int dt \dot{\tilde{p}}_i \delta q_i + \tilde{p}_i \delta q_i \Big|_{t_A}^{t_E}$$

$$\text{beachte: } \delta \tilde{q}_i(t_{A,E}) \neq 0$$

$$\text{da } \tilde{q}_i(t_{A,E}) = \tilde{q}_i(q_{A,E}, p(t_{A,E}), t_{A,E})$$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i \left[\left(\dot{\tilde{q}}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \right) \delta \tilde{p}_i - \left(\dot{\tilde{p}}_i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \right) \delta \tilde{q}_i \right]$$

$$+ \sum_i \underbrace{\left(\tilde{p}_i + \frac{\partial F_i}{\partial \tilde{q}_i} \right)}_{=0} \delta \tilde{q}_i$$

$$; \quad \delta [F_{i,E} - F_{i,A}] = \sum_i \left. \frac{\partial F_i}{\partial \tilde{q}_i} \right|_{t_A}^{t_E} \delta \tilde{q}_i$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \\ \dot{\tilde{p}}_i = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \end{array} \right|$$

d. h. kanonische
Gleichungen

$\hat{=}$ kanonische
Transformation

Bsp.: Harmonischer Oszillator

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2$$

$$\left(\begin{array}{l} \omega_0 \text{ bei:} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{Feder} \\ = \frac{g}{l} \quad \text{Pendel} \end{array} \right.$$

mit $\bar{F}_1(q, \tilde{q}) = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \cot \tilde{q}$
(motiviert durch Vereinfachung)

$$p = \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q} = m \omega_0 q \cot \tilde{q}$$

$$\tilde{p} = - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \tilde{q}} = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 \tilde{q}}$$

$$q = \sqrt{\frac{2 \tilde{p}}{m \omega_0}} \sin \tilde{q} ; \quad p = \sqrt{2 \tilde{p} m \omega_0} \cos \tilde{q}$$

mit $\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t) = H(q(\tilde{q}, \tilde{p}, t), p(\tilde{q}, \tilde{p}, t), t) + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial t}$

$$= H(q, p)$$

$$= \tilde{p} \omega_0 \cos^2 \tilde{q} + \tilde{p} \omega_0 \sin^2 \tilde{q}$$

$$= \tilde{p} \omega_0 \quad \text{nur von } \tilde{p} \text{ abhängig}$$

$$\dot{\tilde{p}} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = 0 = \tilde{p} = \tilde{p}_0$$

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = \omega_0 \rightarrow \tilde{q} = \omega_0 t + \tilde{q}_0$$

$$\rightarrow q(t) = \sqrt{\frac{2\tilde{p}_0}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + \tilde{q}_0)$$

$$p(t) = \sqrt{2\tilde{p}_0 m\omega_0} \cos(\omega_0 t + \tilde{q}_0)$$

=> Problem sehr vereinfacht durch passende Transformation

aber: Bestimmung der Erzeugende?

↳ Aufgabe der Hamilton-Jacobi-Theorie

Weitere Erzeugende

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_1(q, \tilde{q}, t)$$

$$\bar{F}_2 = \bar{F}_2(q, \tilde{p}, t)$$

$$\bar{F}_3 = \bar{F}_3(p, \tilde{q}, t)$$

$$\bar{F}_4 = \bar{F}_4(p, \tilde{p}, t)$$

Bestimmung der Erzeugenden F_2, F_3, F_4 durch Legendre-Transformation. 112

$$\underline{F_2 = F_2(q, \tilde{p}, t)}$$

$$F_2(q, \tilde{p}, t) = F_1(q, \dot{q}, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = F_1(q, \tilde{q}, t) + \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{q}_i$$

$$\text{mit } dF_1 = \sum_{i=1}^n (p_i dq_i - \tilde{p}_i d\tilde{q}_i) + (\tilde{H} - H) dt$$

$$dF_2 = dF_1 + \sum_{i=1}^n (\tilde{p}_i d\tilde{q}_i + \tilde{q}_i d\tilde{p}_i) = \sum_{i=1}^n (p_i dq_i + \tilde{q}_i d\tilde{p}_i) + (\tilde{H} - H) dt$$

$$\Rightarrow \left[p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right] ; \left[\tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} \right] ; \left[\tilde{H} - H = \frac{\partial F_2}{\partial t} \right]$$

F_2 erzeugt kanonische Transformation

↳ zu zeigen aus modifiziertem Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta S = 0 = \delta \int dt (\tilde{p} \dot{\tilde{q}} - \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t))$$

$$\boxed{\bar{F}_3 = \bar{F}_3(p, \tilde{q}, t)}$$

$$= \bar{F}_1 - \sum \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} q_i$$

$$\boxed{q_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial p_i}}$$

$$\boxed{p_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \tilde{q}_i}}$$

$$\boxed{\tilde{H} - H = \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial t}}$$

$$\boxed{\bar{F}_4 = \bar{F}_4(p, \tilde{p}, t)}$$

$$= \bar{F}_1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} q_i - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \tilde{q}_i} \tilde{q}_i \right)$$

$$= \bar{F}_1 - (\underline{p} \cdot \underline{q} + \tilde{\underline{p}} \cdot \tilde{\underline{q}})$$

$$\Rightarrow \boxed{q_i = -\frac{\partial \bar{F}_4}{\partial p_i}}$$

$$\boxed{\tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial \tilde{p}_i}}$$

$$\boxed{\tilde{H} - H = \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial t}}$$

Zusammenfassung (z.B. Noether's)

	\tilde{q}	\tilde{p}
q	$\bar{F}_1(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t)$ $p_i = \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} ; \tilde{p}_i = -\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \tilde{q}_i}$	$\bar{F}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t)$ $p_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i} ; \tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \tilde{p}_i}$
p	$\bar{F}_3(\underline{p}, \underline{\tilde{q}}, t)$ $q_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial p_i} ; \tilde{p}_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \tilde{q}_i}$	$\bar{F}_4(\underline{p}, \underline{\tilde{p}}, t)$ $q_i = -\frac{\partial \bar{F}_4}{\partial p_i} ; \tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial \tilde{p}_i}$

Bsp.: 1) Punkttransformation

mit $\bar{F}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t) = \sum_{i=1}^n f_i(\underline{q}, t) \tilde{p}_i$

$\tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = f_i(\underline{q}, t)$

Punkttransformation im Konfigurationsraum

$p_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \tilde{p}_j \rightarrow \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\underline{q}, \underline{p}, t)$

Kanonisch konjugierte Impulse durch Richttransformation

z.B. Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = f_r$$

$$\varphi = \arctan(y/x) = f_\varphi$$

$$p_x = \frac{\partial f_r}{\partial x} p_r + \frac{\partial f_\varphi}{\partial x} p_\varphi = \frac{x}{r} p_r - \frac{y}{r^2} p_\varphi$$

$$p_y = \frac{\partial f_r}{\partial y} p_r + \frac{\partial f_\varphi}{\partial y} p_\varphi = \frac{y}{r} p_r + \frac{x}{r^2} p_\varphi$$

$$\omega \quad p_r = \frac{x p_x + y p_y}{r} \quad ; \quad p_\varphi = x p_y - y p_x \quad \text{Drehimpuls}$$

2) mechanische Eichtransformation

mit $f(q, t)$ Eichfunktion

$$\tilde{H} = H - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{aus} \quad \tilde{L} = L + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\bullet \quad q_i = \tilde{q}_i \quad \text{und} \quad \tilde{p}_i = p_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

Konstruktion der Erzeugenden
aus Legendre-Transformation:

$$\bar{F}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t) = \sum_{i=1}^n q_i \tilde{p}_i - f(\underline{q}, t)$$

$$\circ \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = q_i \quad \text{und} \quad p_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i} = \tilde{p}_i - \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial t} = H - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Phasentransformation kanonisch wenn fundamentale
Poisson-Klammern erfüllt sind

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = 0 \quad \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0 \quad ; \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}$$

Hamilton-Jacob-Gleichungen

Motivation: Vereinfachung des Systems (Hamilton-Funktion,
Differentialgleichungen) durch geeignete Transformation:

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial t} = 0 \quad (*)$$

⇒ Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = 0 & \Rightarrow \tilde{q} &= \text{const} \\ \dot{\tilde{p}}_i &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = 0 & \Rightarrow \tilde{p} &= \text{const} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = 0 \\ \dot{\tilde{p}}_i &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = 0 \end{aligned}} \right\} \text{triviale Lösungen} \\ & & & & & & & \text{der Differentialgleichungen}$$

mögliche Erzeugende: $\bar{F} = \bar{F}_2 = F_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t)$

(andere Erzeugende auch möglich)

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad ; \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} = \text{const}$$

in (*)

$$H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung
Bestimmungsgleichung für Erzeugende F_2

Bemerkungen:

- Hamilton-Jacobi-Gleichung
- nicht-lineare, partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für \bar{F}_2 mit $n+1$ Variablen (q, \dots, q_n, t)

nicht-linear: H i. A. quadratische Funktion der Impulse
1. Ordnung: nur $\partial \bar{F}_2 / \partial q_i$ und $\partial \bar{F}_2 / \partial t$ treten auf \bar{P}

- mit $n+1$ Ableitungen 1. Ordnung:
 $n+1$ Integrationskonstanten: C_1, \dots, C_n, C_t

für Lösung:

$$\bar{F}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t | C_1, \dots, C_n) + C_t$$

vollständige
Lösung

aber H hängt nur von Ableitungen
von \bar{F}_2 ab $\rightarrow C_t = 0$ o. B. A.

- konstante Impulse

$\underline{\tilde{p}}$: unbestimmt

daher möglich $\tilde{p}_i = C_i$

⇒ vollständige Lösung für \bar{F}_2

$$\bar{F}_2(q, t | c) \quad ; \quad c = (c_1, \dots, c_n) \text{ Konstanten}$$

- Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung ist die Wirkung
 S der zugehörigen Hamilton-Funktion

$$\bar{F}_2 = S$$

$$\frac{d}{dt} \bar{F}_2 = \sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i + \tilde{q}_i \dot{\tilde{p}}_i) + \tilde{H} - H$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \quad (\dot{\tilde{p}} = 0 ; \tilde{H} = 0)$$

$$= L$$

$$\Rightarrow \bar{F}_2 = \int dt L = S \quad \text{im Hamilton-Jacobi-Formalismus}$$

⇒ "physikalische
Bedeutung"

Lösungsmethode mit der Hamilton-Jacobi-Theorie

1) Hamiltonfunktion $H = H(\underline{q}, \underline{p}, t)$ aufstellen

2) kanonische Impulse

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad \text{durch partielle Ableitungen ersetzen}$$

3) Lösen der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

$$\bar{F}_2 = S(\underline{q}, t | \underline{c}) ; \quad \underline{c} = (c_1, \dots, c_n) \quad \text{Integrations-} \\ \text{konstanten}$$

wobei $\bar{p} = \underline{c}$ konstante "neue" Impulse

4) Berechnung der generalisierten Koordinaten

$$\tilde{q}_i := \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{p}_i} = \frac{\partial S}{\partial c_i} = \tilde{q}_i(\underline{q}, t | \underline{c}) = \alpha_i = \text{const.} \\ \text{(aus } \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \text{)}$$

und nach \underline{q} auflösen

$$\underline{q} = \underline{q}(\tilde{\underline{q}}, t | \underline{c}) = \underline{q}(t | \underline{\alpha}, \underline{c})$$

5) Berechnung der generalisierten Impulse

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q(t | \underline{\alpha}, \underline{c})) = p_i(t | \underline{\alpha}, \underline{c})$$

6) Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = t_0$

$$q(t_0 | \underline{\alpha}, \underline{c}); \quad p(t_0 | \underline{\alpha}, \underline{c})$$

Liefert \tilde{q}_0 und $\tilde{p}_0 \rightarrow \underline{\alpha}, \underline{c}$

7) einsetzen in q und p liefert vollständige Lösung

$$(q(t), p(t)) = \underline{\pi}(t)$$

Bsp.: Harmonischer Oszillator (1D)

$$1) \quad H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega_0^2 m q^2$$

$$2) \quad p = \partial F_2 / \partial \dot{q} = \partial S / \partial \dot{q}$$

$$H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t}$$

3) Lösung der Hamilton-Jacob-Gleichung
hier Separationsansatz:

$$S(q, t | \tilde{p}) = W(q | \tilde{p}) + V(t | \tilde{p})$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 = - \frac{\partial V}{\partial t}$$

W und V sind unabhängig; abh. von unabhängigen Variablen (hier: $W(q)$; $V(t)$)

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 = C$$

$$\frac{dV}{dt} = -C$$

zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\rightarrow V(t|C) = -ct + V_0 \quad ; \quad V_0 = 0 \quad \text{o. B. A}$$

$$\frac{dW}{dq} = \sqrt{m^2 \omega_0^2 \left(\frac{2C}{m\omega_0^2} - q^2 \right)}$$

$$W(q|C) = m\omega_0 \int dq \sqrt{\frac{2C}{m\omega_0^2} - q^2}$$

$$= m \omega_0 \left[\frac{1}{2} q \sqrt{\frac{2c}{m \omega_0^2} - q^2} + \frac{c}{m \omega_0^2} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m \omega_0^2}{2c}} \right) \right]$$

$$\rightarrow S(q, t | c) = m \omega_0 \left[\frac{1}{2} q \sqrt{\frac{2c}{m \omega_0^2} - q^2} + \frac{c}{m \omega_0^2} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m \omega_0^2}{2c}} \right) \right]$$

$$4) \quad q^2 = \frac{\partial S}{\partial p^2} = \frac{\partial S}{\partial c} = \frac{\partial W}{\partial c} + \frac{\partial U}{\partial c}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\omega_0} \int dq \left(\frac{2c}{m \omega_0^2} - q^2 \right)^{-1/2}}_{\frac{1}{\omega_0} \arcsin \left(q \omega_0 \sqrt{\frac{m}{2c}} \right)} - t$$

$$= \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left(q \omega_0 \sqrt{\frac{m}{2c}} \right) - t$$

$$= \alpha = \text{const.} \quad \text{Dimensionen: Zeit}$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{2c}{m\omega_0^2}} \sin(\omega_0(t + \alpha)) = q(t | \alpha, c)$$

$$\begin{aligned} 5) \quad p &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\omega_0 \sqrt{\frac{2c}{m\omega_0^2} - \dot{q}^2} \\ &= \sqrt{2cm} \cos(\omega_0(t + \alpha)) \\ &= p(t | \alpha, c) \end{aligned}$$

6) Anfangsbedingungen: $t_0 = 0$; $p_0 = 0$; $q_0 \neq 0$

$$0 = \frac{2c}{m\omega_0^2} - q_0^2 \Rightarrow c = \frac{1}{2} m\omega_0^2 q_0^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 = E$$

$\Rightarrow \tilde{p} = c = E$: Gesamtenergie

mit $[\tilde{q}] = \text{zeit}$

$\Rightarrow E$ und t sind kanonisch-konjugierte Variablen

(vgl. $[\tilde{E}, t] = i\hbar \hat{=} \text{Heisenbergsche Unschärferelation}$)

$$\text{mit } \alpha = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \sqrt{\frac{m\omega_0^2 q_0^2 / 2}{E}} = \frac{1}{\omega_0} \arcsin(1) = \frac{\pi/2}{\omega_0}$$

7) voll ständige Lösung

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\hat{\epsilon}}{m\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t) ; \quad p(t) = -\sqrt{2\hat{\epsilon}m} \sin(\omega_0 t)$$

Bemerkung:

$F_1(q, \tilde{q}) = \frac{1}{2} m \omega_0 q \cot(\tilde{q})$ kann Legendre-Transformation
aus $F_2(q, \tilde{p})$ gewonnen werden

Hamiltonsche charakteristische Funktion

Separationssatz für F_2 (in Hamilton-Jacobi-Gleichung)

sich voll, wenn

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H : \text{Integral der Bewegung}$$

$$H\left(\underline{q}, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Hamilton-Jacobi-
Gleichung

$$\Rightarrow S(\underline{q}, \tilde{p}, t) = W(\underline{q} | \tilde{p}) - Et$$

Separationssatz

$$\Rightarrow H\left(\underline{q}, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = E$$

Gesamtenergie für
Skleronome Zwangsbed.

$\omega(q/\tilde{p})$: Hamiltonsche charakteristische Funktion

$\hat{=}$ Erzeugenden einer kanonischen Transformation im
eigentlichen Sinne mit

$$p_i = \frac{\partial \omega}{\partial q_i} ; \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{p}_i} \quad \text{durch Einsetzen:}$$

$$\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p})$$

Weitere Separation von Variablen

↳ mögliche Problemlösungen, die nur mit dem Hamilton-
Jacobi-Verfahren möglich sind. z. B. 3 Körper-Problem,
Zweizentrenproblem; A_2^+ Ion

$$\text{mit } H\left(q_1, \frac{\partial \omega}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial q_n}\right) = \bar{E}$$

wenn q_1 und $\partial \omega / \partial q_1$ in der Form $f(q_1, \frac{\partial \omega}{\partial q_1})$

$$\rightarrow H\left(f, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial \omega}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial q_n}\right) = \bar{E}$$

→ möglicher Ansatz

$$\omega(\underline{q} | \underline{\tilde{p}}) = \omega'(q_2 \dots q_n | \underline{\tilde{p}}) + \omega_1(q_1 | \underline{\tilde{p}})$$

$$\Rightarrow f(q_1, \frac{\partial \omega}{\partial q_1}) = C_1 = f(q_1, \frac{d\omega}{dq_1}) \quad \text{gewöhnliche DGL}$$

$$\rightarrow \#(C_1, q_2 \dots q_n, \frac{\partial \omega}{\partial q_2} \dots \frac{\partial \omega}{\partial q_n}) = \bar{E}$$

Idealfall: alle generalisierten Koordinaten und Ableitungen lassen sich separieren

$$\omega = \sum_i \omega_i(q_i | \underline{\tilde{p}})$$

→ Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H_i(q_i, \frac{d\omega}{dq_i} | \underline{\tilde{p}}) = \alpha_i = \tilde{p}_i$$

vollständig separabel in gewöhnliche Differentialgleichungen

↙ mögliche Wahl

Bsp.: Teilchen im Zentralpotential : $V(r)$

- Beschreibung mit Kugelkoordinaten, wobei $\theta = \pi/2$
 (r, θ, φ)

$$\Rightarrow q_r = r ; q_\varphi = \varphi$$

(1) (2)

$$\Rightarrow H(r, p_r, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r)$$

$$p_r = m \dot{r} ; p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}$$

φ : zyklisch $\rightarrow p_\varphi = \text{const}$: Drehimpuls

Ausatz:

$$W = W_r + \alpha_\varphi \varphi$$

Bemerkung:
 $W = \dots \alpha_u q_u$

wenn q_u
 zyklisch
 $\alpha_u = \text{const}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r) = \hat{E}$$

$$\text{mit } W_r = \int dr \sqrt{2m(\hat{E} - V(r)) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}$$

aus $S = W - Et$ und $\frac{\partial S}{\partial p_1} = \tilde{q}_1 = \text{const}$

\tilde{p}_1 : unbestimmt: wähle $\tilde{p}_1 = \tilde{E} \rightarrow \frac{\partial S}{\partial \tilde{E}} = \frac{\partial W}{\partial \tilde{E}} - t = \tilde{q}_0 = t_0$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial \tilde{E}} = t + t_0 = \int \frac{m \, dr}{\sqrt{2m(\tilde{E} - V(r)) - \frac{\alpha_G^2}{r^2}}}$$

durch Umkehrung: $r(t)$

bzw. $\tilde{q}_2 = \text{const} = \frac{\partial S}{\partial p_2} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_G} + \varphi = \varphi_0$

(wähle $\tilde{p}_2 = \alpha_G$)

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int dr \frac{\alpha_G / r^2}{\sqrt{2m(\tilde{E} - V(r)) - \frac{\alpha_G^2}{r^2}}}$$

$\Rightarrow r(\varphi)$

z.B. $V(r) = -\frac{mGM}{r}$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}$$

p : Halbparameter

Standardverfahren für zentralen St-probleme; auch für Mehr-Körper-problemen

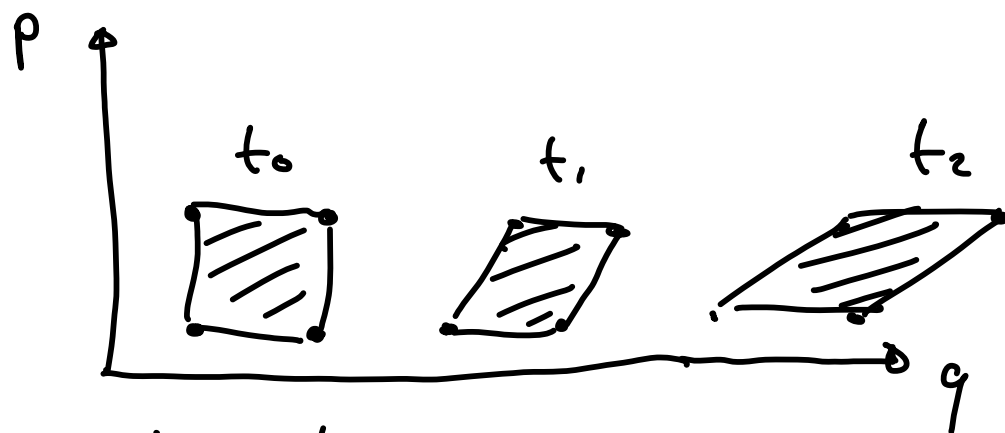
Satz von Liouville

nach Liouville-Theorem:

Aussage über Erhaltung des Phasenraum-Volumens

Bsp. freies Teilchen

$$H = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \dot{p} = 0; \quad \dot{q} = \frac{p}{m} \rightarrow \varphi(t) = \frac{p_0}{m}t + q_0$$



Phasenraum-
volumen auf-
gespannt von
4 Teilchen
bleibt erhalten

Liouville-Theorem:

$$\boxed{\frac{d}{dt} V_{\pi} = 0}$$

Volumen des Phasenraums für
zeitunabhängige Hamiltonsche
Systeme erhalten

mit $\underline{\pi} = (\underline{q}, \underline{p})$ Phasenraum

Differential Phasenraumvolumen:

$$dV_{\pi} = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = d^n q d^n p$$

zeitliche Entwicklung

$$\frac{d}{dt} V_{\pi} = \int dA \cdot \underline{\pi}$$

$$= \int dV \underline{\nabla} \cdot \underline{\pi}$$

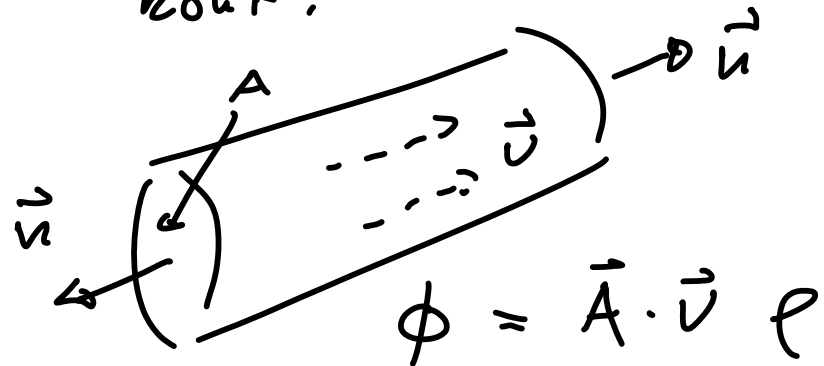
$$= \int dV \underline{\nabla} \cdot \{\underline{\pi}, H\}$$

$$= 0$$

A: Fläche, die das Phasenraumvolumen einschließt

$d\underline{A} = \underline{u} dA$; \underline{u} : Flächennormale

vgl. Fluß von Materie durch Rohr:



Wichtig für makroskopische Zustände ($N \sim N_A \sim 10^{24}$)

- Thermodynamik
- Statistische Physik

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \{\underline{\pi}, H\} &= \frac{\partial}{\partial q} \{q, H\} + \frac{\partial}{\partial p} \{p, H\} \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p} \left(- \frac{\partial H}{\partial q} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mechanik der Kontinuuen (Felder)

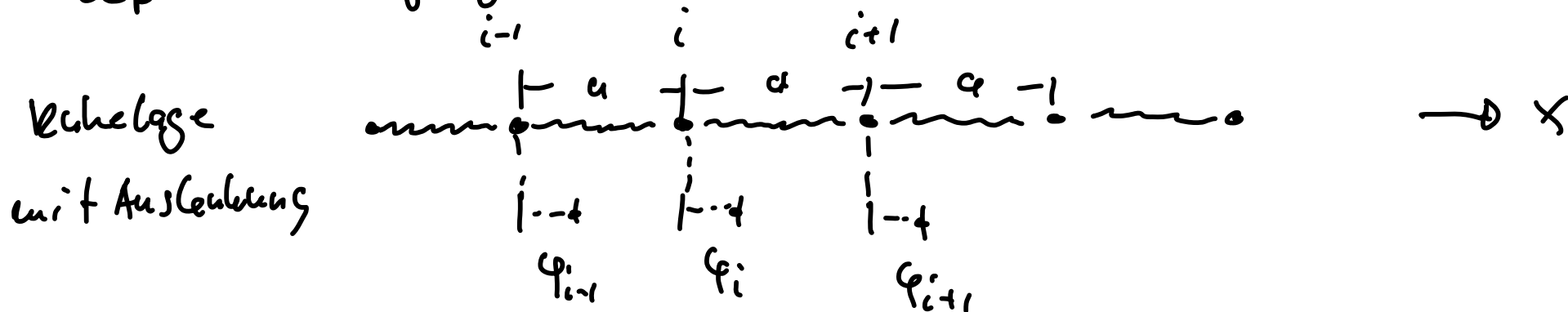
bisher: Betrachtung abzählbar endlich Massepunkte (Teilchen)

aber: Beschreibung von $N \sim N_A$ Massepunkten (z.B. Gas, Flüssigkeiten, ausgedehnte Körper): Massenpunktbeschreibung nicht sinnvoll.

→ Übergang $\sum_i m_i \rightarrow \int dV \rho(\vec{x})$ mit $\rho(\vec{x})$: Kontinuum / Feld

Übergang: N -Teilchen \rightarrow Kontinuum

Bsp.: Schwingung von Massepunkten an Federn:



$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N \dot{\varphi}_i^2 \quad \text{gleiche Massen: } m$$

$$V = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \quad \text{gleiche Feder}$$

$$\hookrightarrow F_j = - \frac{\partial V}{\partial \varphi_j} = -k(\varphi_j - \varphi_{j-1}) - k(\varphi_j + \varphi_{j+1})$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (m \dot{\varphi}_i^2 - k (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2) ; \quad N \gg 1 : \text{ ignore } \varphi_N$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} a \left(\mu \dot{\varphi}_i^2 - \kappa \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a} \right)^2 \right) ; \quad \mu = \frac{m}{a} \quad \text{Masse pro Länge}$$

κ : Elastizitätsmodul
 $\kappa = a k$

$$= \frac{1}{2} \sum_i a \mathcal{L}_i ; \quad \mathcal{L}_i : \text{Lagrange-Funktion pro Länge}$$

FL 6:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = 0$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\varphi}_i + \alpha \left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{a^2} + \frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{a^2} \right) = 0$$

$$\mu \ddot{\varphi}_i - \alpha \left(\frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{a^2} \right) = 0$$

für $N \rightarrow \infty$: N : # Massenpunkte an Feder
 \hookrightarrow kontinuierlicher elastischer Stab

+ $a \rightarrow 0$

wit $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, t) - \varphi(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

i -ten Massenpunkt: $\varphi_i(t) \rightarrow \varphi(x, t)$

wobei $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{a^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x - \Delta x, t) - 2\varphi(x, t) + \varphi(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

zeitableitungen $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$; $\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$

Lagrange-Funktion

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} a \mathcal{L}_i = \int_0^l dx \mathcal{L} \quad ; \quad l: \text{Länge des Stabes}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \mathcal{L}(\dot{\varphi}, \varphi, x) = \mathcal{L}(\dot{\varphi}, \varphi, x)$$

Lagrange-Dichte

\Rightarrow Bewegungsgleichungen

$$\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{\kappa} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit } c_s = \sqrt{\kappa/\mu}$$

Lagrange-Formalismus für kontinuierliche Systeme

Allgemein (3D) Lagrange-Funktion

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad ; \quad \mathcal{L}: \text{Lagrange-Dichte}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_t \varphi, \partial_{\vec{x}} \varphi, \vec{x}, t) \quad ; \quad \partial_{\vec{x}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi$$

d.h. $\underline{q} \rightarrow \varphi$; $\underline{\dot{q}} \rightarrow \dot{\varphi}$; $\partial_{\vec{x}} \varphi$ unabhängige Größen

hier für ein Feld $\varphi(\vec{x}, t)$

Bewegungsgleichung?

aus Hamiltonschem Prinzip

$$\delta S = 0 = \delta \int dt d^3x \mathcal{I} \quad \text{Integration über} \\ \Omega = t \times V$$

- Variation δ nur bezüglich

$\varphi, \dot{\varphi}, \partial_{\vec{x}} \varphi$, da $\delta t = 0$ und $\delta \vec{x} = 0$ feste
Endpunkte für Zeit und Raum

- keine Variation des Feldes φ an der Oberfläche $\partial\Omega$

$$\delta \varphi(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\text{aber } \delta(\dot{\varphi}, \partial_{\vec{x}} \varphi) \Big|_{\partial\Omega} \neq 0 \quad (\text{vgl. } \dot{q} \Big|_{t_A, t_E} \neq 0)$$

$$0 = \int_{\Omega} dt d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\varphi, i)} \delta (\varphi, i) \right] \begin{array}{l} \text{Summation} \\ \text{über } i \end{array}$$

mit $\delta \dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \delta \varphi$ und $\delta (\varphi, i) = \partial_i \delta \varphi$ ($\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$)

+ part. Integration

$$\int dt d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} = \int d^3x \left(\underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi \right]}_{t_x}^{t_e} - \int dt \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta \varphi \right)$$

= 6 wg. Randbed.

$$\Rightarrow 0 = \int dt d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\varphi, i)} \right) \right] \delta \varphi$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \varphi)} \right]$$

Euler-Lagrange-Gleichung für kontinuierliche Systeme (Lagrange-dichten)

Vgl. mit elastischem Stab:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2$$

ELG:

$$\rightarrow 0 = \mu \ddot{\varphi} - \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Bsp.:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad \Rightarrow \quad - \frac{\partial V}{\partial \varphi} = m \ddot{\varphi}$$

• Klein-Gordon-Gleichung / Boson-Feld

$$\text{aus } \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 - (\vec{\nabla} \varphi)^2) - \frac{1}{2} m \varphi^2$$

$$\rightarrow -m \varphi = \ddot{\varphi} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad (\square - m) \varphi = 0$$

\square : d'Alembert-Operator

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

• EM-Feld

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{4\pi} \overline{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{wobei } \overline{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Lorentz-konforme Formulierung für \vec{E} und \vec{B} -Felder

Hamiltonsche Formulierung

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

zu $\varphi(\vec{x}, t)$ kanonisch konjugierte
Feld; generalisierte Impulsdichte

Hamilton Dichte:

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi, \varphi, i, t) = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} \quad \text{durch Legendre-Transformation}$$

Hamilton-Funktion:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\varphi} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi} \quad ; \quad \dot{\pi} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi}$$

wobei $\frac{\delta}{\delta \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_{,i}}$ Funktional-
ableitung

vgl. $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = 0$ Euler-Lagrange-Gleichung

oder:

$$\dot{\varphi} = \{ \varphi, \mathcal{X} \} \quad ; \quad \dot{\pi} = \{ \pi, \mathcal{X} \}$$

$$\text{wobei } \{A, B\} = \int d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta \varphi} \frac{\delta B}{\delta \pi} - \frac{\delta A}{\delta \pi} \frac{\delta B}{\delta \varphi} \right)$$

Poisson-
Klammer
für Funktionen

Fundamentale Poissonklammer

$$\{ \varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t) \} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad ; \quad \delta\text{-Funktional}$$

Energieerhaltung / Noether - Theorem

\mathcal{L} nicht explizit von t abhängig $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right)_{\text{expl.}} = 0$

invariant unter $t \rightarrow t + \delta t$ Zeit-Translation

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_{,i})$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \delta \varphi_{,i}$$

$$\text{mit } \delta \dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \delta \varphi \quad ; \quad \delta \varphi_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \varphi$$

$$+ \text{ELG}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \delta \varphi \right) \quad ; \quad \varphi_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi$$

$$\text{mit } \delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \delta t = \dot{\varphi} \\ = \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \right) \right] \delta t$$

Variation implizit nach t

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t \quad \text{Ableitung im Sinn der Kettenregel auf} \\ \varphi, \dot{\varphi}, \varphi_{,i}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \right) \right] \delta t = 0$$

unabhängig von δt

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \right) \right] = 0$$

Energieerhaltung ($\mathcal{E} = \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L}$: Feldenergie dichte)

Noether-Theorem für $t \rightarrow t + \delta t$ Symmetrie
 Kontinuitätsgleichung für Feldenergie mit entsprechenden
 Feldenergie Strom-Dichte : $j_i = \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}}$

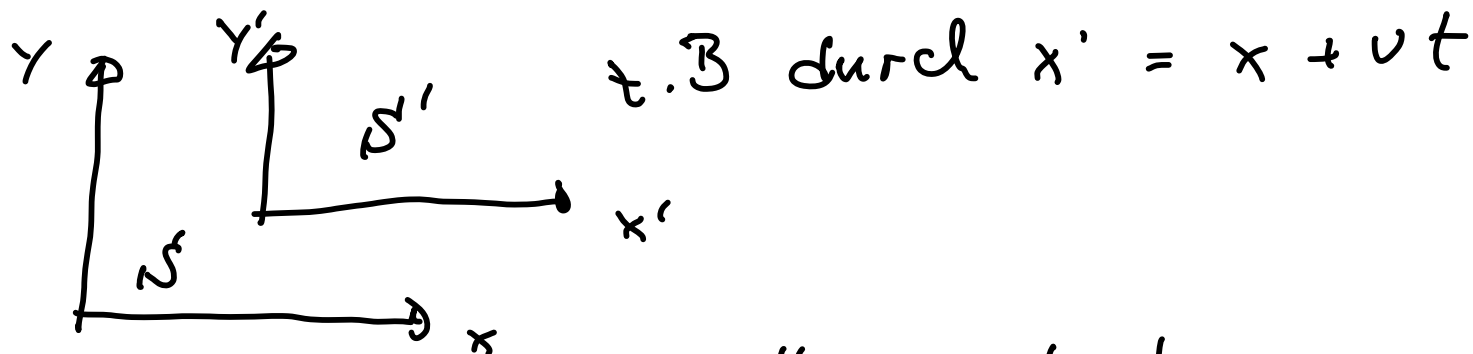
$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \vec{0} \cdot \vec{j} = 0$$

Spezielle Relativitätstheorie

- Vereinheitlichung von Raum + Zeit \rightarrow RAUMZEIT
- Vier-Vektoren / Tensoren
- kovariante (Lorentzinvariante) Formulierung
u.a. Elektrodynamik

Postulate:

- Jedes Inertialsystem ist physikalisch identisch
bzw. Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen
die gleiche Form (forminvariant)



bereits in Newtonscher Physik verwendet

↳ Galilei-Transformation möglich ($t = t'$)

- Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen identisch (im Vakuum)

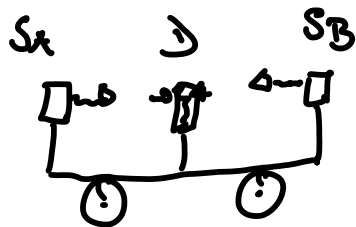
$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

$$\approx 300.000 \text{ km/s}$$

von sequenzen

1) Transformation zwischen Inertialsystemen

①



Externer und interner Experimentator stimmen überein, dass Signale gleichzeitig ausgesendet wurden

②



Externer und interner Exp. stimmen nicht überein, dass Signale gleichzeitig von S_A und S_B ausgesendet wurden, wenn diese gleichzeitig bei D ankommen (= physikalische Ereignis)

=> Konzept der absoluten Gleichzeitigkeit muß aufgegeben werden
↳ Gleichzeitigkeit hängt vom Beobachter ab.

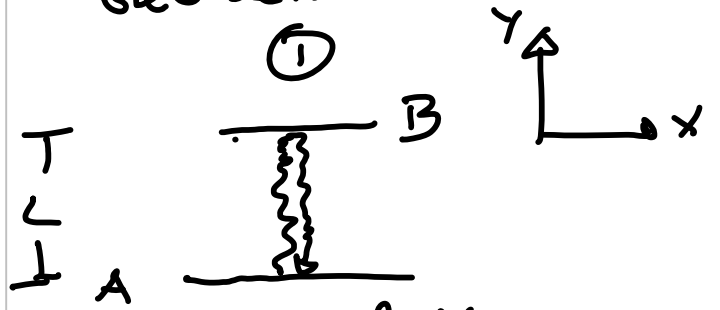
=> Transformation muß Zeit t berücksichtigen

$$S: (t, x, y, z) \rightarrow S' (t', x', y', z')$$

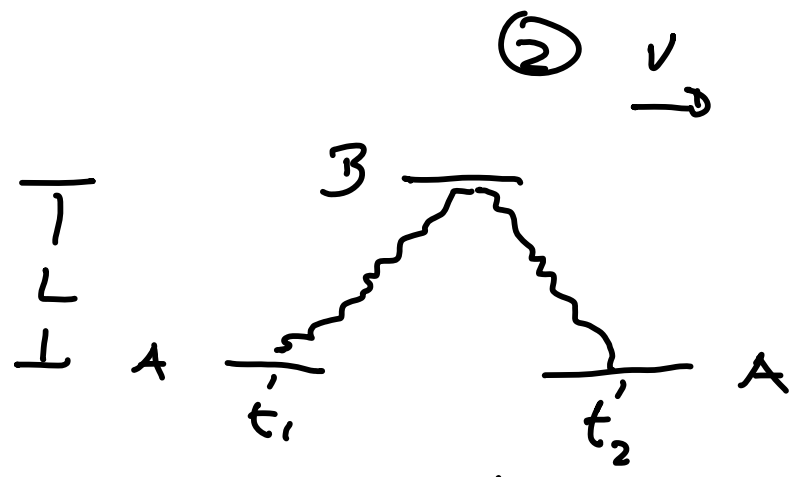
=> RAUMZEIT: Raum + Zeit: 4-dimensionaler \mathbb{R}^4
(Raum wird durch Geometrie bestimmt; z.B. Euklidischer Raum = flacher Raum)

- Geometrie des flachen RAUMZEIT?
- Welche Transformationen sind möglich?

Geometrie der kt :



Lichtlaufzeit:
 $\Delta t = 2L/c$



$$\Delta t' = 2\sqrt{L^2 + (\Delta x'/2)^2} / c$$

Experiment mit Relativgeschw. v

Anzahl der transversalen Richtungen unverändert
- 3D Raum ist Euklidisch = flach

→ L unverändert

$$c^2 \Delta t^2 = 4L^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

$$\rightarrow c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

⇒ invariantes Linienelement

$$\Rightarrow \boxed{\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$$

identisch
in allen
Inertialsystemen

bzw. infinitesimales Linienelement

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Minkowski - Geometrie

= Geometrie der flachen RAUMZEIT

mit 4er Ortsvektoren

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3$$

Minkowski-Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

hier: Signatur:

$$(1, -1, -1, -1)$$

Transformationsvorschrift für Wechsel von Inertialsystemen

Linienelement ds^2 muß invariant sein

betrachte Relativbewegung in x -Richtung mit

Geschwindigkeit $v = c \tanh \alpha$

mit 2×2 Matrix; $c = 1$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$t' = at + bx$$

$$x' = et + fx$$

$$\Rightarrow ds^2 = dt'^2 - dx'^2 = dt^2 - dx^2$$

$$= (adt + bdx)^2 - (c dt + f dx)^2$$

$$= (a^2 - e^2) dt^2 + (b^2 - f^2) dx^2 + 2(ab - ef) dt dx$$

\Rightarrow Koeffizientenvergleich:

$$a^2 - e^2 = 1$$

$$b^2 - f^2 = -1$$

$$ab - ef = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - e^2 = 1 \\ b^2 - f^2 = -1 \\ ab - ef = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$a = \cosh \theta = t$$

$$e = \sinh \theta = b$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$

Weiterhin

$$\det() = 1$$

$$af - be = 1$$

\Rightarrow Lorentz-Transformationsfunktion

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

vgl. Rotation $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

in 4D-KAUMZEIT: Boot in x -Richtung

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matrix-
multiplikation

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Verkürpfung mit beliebigeschwindigkeit v :

$$\Theta = \Theta(v)$$

Teilchen in S' in Ruhe : $x' = 0$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Theta & \sinh \Theta \\ \sinh \Theta & \cosh \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$0 = \sinh \Theta ct + \cosh \Theta x$$

$$\text{mit } v = \frac{x}{t} \Rightarrow v = -c \frac{\sinh \Theta}{\cosh \Theta} = -c \tanh \Theta$$

$$= -c \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 \Theta}}$$

$$\Rightarrow \left[\cosh \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \right] \quad \gamma: \text{Lorentz faktor}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\partial_{\mu} \theta = -\beta \gamma$$

\Rightarrow Lorentz-Transformation:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

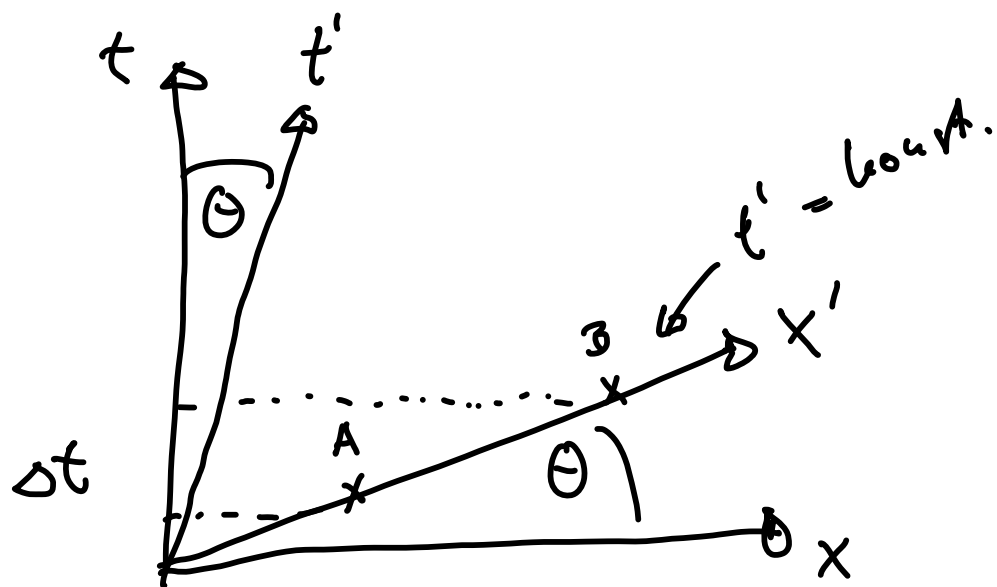
inverse Transformation: $v \rightarrow -v$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right)$$

$$x = \gamma (x' + vt')$$

Konsequenzen aus der LT

mit Raumzeit-Diagrammen / Minkowski-Diagrammen



S' bewegt sich
relativ zu S mit
 $v = \sim \tanh \theta$

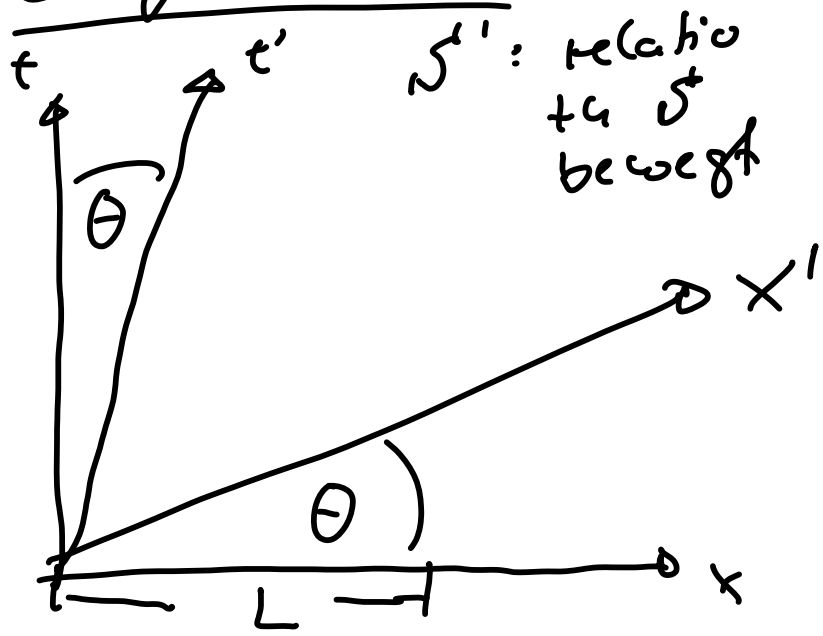
$$\boxed{\text{(hier } c = 1\text{)}}$$

vgl. Rotation: aber auch hier stehen \vec{e}_t' und
 \vec{e}_x' senkrecht aufeinander

Linien parallel zu x' finden in S' gleichzeitig
statt; d.h. $t' = \text{const.}$

\Rightarrow Ereignisse A und B nicht gleichzeitig in S
(Laborsystem)

• Längenkontraktion



L : Länge einer Stange im Ruhesystem = mitbewegtes System mit Stange

"Länge" eines Objekts: gleichzeitige Messung der Enden im ruhenden System

$$(\Delta t)^2 - L^2 = (\Delta t')^2 - L'^2 \quad \stackrel{!}{=} -L'^2$$

↖ gleichzeitige Messung der Enden

$$\Delta t = \gamma (\underbrace{\Delta t'}_{=0} + v L') = \gamma (\Delta t' + \frac{v L'}{c^2}) \quad \text{aus LT}$$

$$\Rightarrow v^2 \gamma^2 L'^2 - L^2 = -L'^2 \quad \Rightarrow \quad L'^2 \underbrace{(1 + v^2 \gamma^2)}_{\gamma^2} = L^2$$

$$\Rightarrow \boxed{L' = L/\gamma} ; \gamma \geq 1$$

Stange ist im nicht-Ruhesystem kürzer,
bzw. kontrahiert

Aussage ist "relativ": relativ zueinander bewegte
Objekte sind kontrahiert

Längenkontraktion:

- kleiner Effekt: z.B. Auto: $360 \text{ km/h} = 100 \text{ m s}^{-1}$
 $\Delta L/L \sim \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 10^{-13}$ $\sim 3 \times 10^{-7} c$

aber: Erklärung für Coulomb-Kraft \leftrightarrow
Lorentz-Kraft

Zeitdilatation

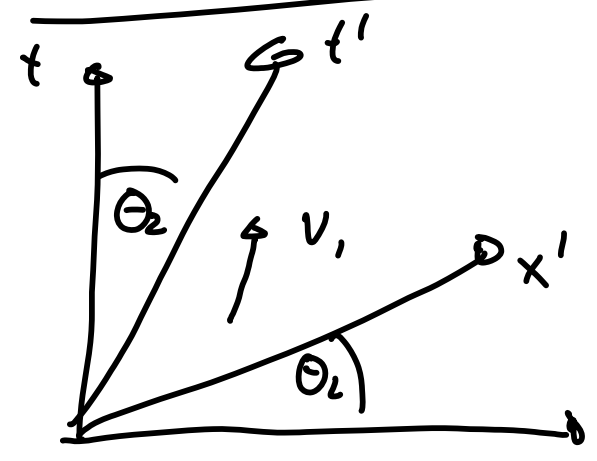
bewegte Uhren gehen langsamer

"Uhren": alle physikalischen, biologischen, ...
Zeitmessungen

z.B. Myonen: Erzeugung in Atmosphäre (≈ 10 km Höhe) durch kosmische Strahlung; $\tau \approx 2 \mu s \rightarrow d \approx 600$ m bei $v \approx c$: aber Nachweis an Erdoberfläche möglich
 $D \approx \gamma \tau_0$

Allgemein: $\Delta t_{bewegt} = \Delta t_{ruhend} / \gamma$

Additions-Theorem / Addition von Geschwindigkeiten durch hintereinander Ausföhrung der Lorentztransformation mit $v = -c \tanh \Theta$



$$\Lambda_3 = \Lambda_2(\Theta_2) \Lambda_1(\Theta_1)$$

mit Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen

$\Theta_3 = \Theta_1 + \Theta_2$ wenn v_1 und v_2 in gleicher Richtung

$$v_3 = -\operatorname{tg} \alpha(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{\operatorname{tg} \alpha(\theta_1) + \operatorname{tg} \alpha(\theta_2)}{1 + \operatorname{tg} \alpha(\theta_1) \operatorname{tg} \alpha(\theta_2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}}$$

für $v_{1,2} = 1$ ($= c$)

$$\hookrightarrow v_3 = 1$$

Lichtgeschw. = max.
Geschwindigkeit

Relativistische Kinematik & Dynamik

1) 4er-Geschwindigkeit

vgl. 3er-Geschwindigkeit: $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

\vec{x} : Ortsvektor

t : Newtonsche absolute Zeit

in 4D Raumzeit / Minkowski-Raumzeit

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

mit $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 4er-Ortsvektor
(mit Index $\mu = 0, 1, 2, 3$)

ds^2 : Lorentz-invariante "Länge" in 4D \mathbb{R}^4

=> Lorentz-invariante Zeit:

$$d\tau^2 = ds^2/c^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2$$

τ : "Eigenzeit": Zeit, die von mitgeführten
Uhren gemessen wird
(im Ruhesystem, d.h. $\Delta x = 0$)

$d\tau^2 \geq 0$ für alle bewegte Objekte
(0 nur für Photonen)

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2/c^2} \quad \text{mit } |\vec{v}| = v$$

$$= dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = dt/\gamma$$

⇒ per Geschwindigkeit:

$$\boxed{u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}}$$

$$\Rightarrow u^0 = u^t = \frac{cdt}{d\tau} = \gamma c$$

$$u^1 = u^x = \frac{dx}{d\tau} = \gamma \frac{dx}{dt} ; u^y = \gamma \frac{dy}{dt} ; u^z = \gamma \frac{dz}{dt}$$

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$$

Betrag: Allgemein $a^2 = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$

a^2 : Lorentz-Skalar:
identisch in allen
Inertialsystemen

R. Minkowski-Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2$$

$$\text{bzw. } |u^\mu| = \underline{\underline{c}} = \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}$$

\Rightarrow Alle Objekte "bewegen" sich mit Lichtgeschw.
in der 4D Raumzeit

4er Beschleunigung

für die Bewegungsgleichung; vgl. Newton $m\vec{a} = \vec{F}$

$$\text{aus } \vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\left. \left. a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \right. \right\} \text{4er Beschleunigung}$$

Bewegungsgleichung im kräftefreien Raum

$$\boxed{a^\mu = 0} \quad (\text{einschl. Gravitation in ART - Formulierung})$$

mit externer Kraft f^μ

$$\boxed{m a^\mu = f^\mu}$$

m : Ruhemasse

$$\text{da } u_\mu u^\mu \equiv \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}(u_\mu u^\mu) = 0 = 2u_\mu a^\mu = 2\eta_{\mu\nu} u^\mu a^\nu$$

$$\Rightarrow u_\mu f^\mu = 0 \quad \rightarrow \text{nur 3 unabhängige Komponenten für } f^\mu$$

- u^μ steht senkrecht auf f^μ

aus $m \vec{a} = \vec{F}_N$; \vec{F}_N : Newtonsche Kraftkomponenten

$$\Rightarrow \boxed{f^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \vec{F}_N \cdot \vec{v} \\ \gamma \vec{F}_N \end{pmatrix}}$$

aus LT mit S' ($\vec{v} = 0$)

$\hookrightarrow S$ ($\vec{v} \neq 0$)

$$f^\mu = \begin{pmatrix} f^0 \\ \vec{f} \end{pmatrix} \text{ mit } f^0 = \gamma \vec{F}_n \cdot \vec{v} \text{ relativ. Leistung}$$

4er Impuls / Energie-Impuls Vektor

$$\boxed{p^\mu = m u^\mu} \quad \text{4er Impuls ; } m: \text{ Ruhemasse}$$

$$p_\mu p^\mu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (mc)^2 = m^2 \text{ (für } c=1)$$

= Lorentz-Skalar: identisch in allen Inertial-Systemen

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma m c \\ \gamma m \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v}} \quad \text{relativistische 3er Impuls}$$

$$c p^0 = \gamma m c^2 \approx \underbrace{m c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \dots}_{\text{kinetische Energie}} \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)$$

$\Rightarrow \bar{E} = c p^0$: Gesamtenergie / relativistische Energie

Energie-Impulsvektor:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \bar{E}/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{E}/c \\ E \vec{v}/c^2 \end{pmatrix}$$

mit $p_\mu p^\mu = (m c)^2 = (\bar{E}/c)^2 - \vec{p}^2$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2}} = \gamma m c^2$$

$$\Rightarrow \bar{E} = m c^2 \quad \text{für } \vec{p} = 0 = \vec{v}$$

Tensoren / 4er Notation

wichtig für

- Lorentzinvariante Formulierung /
kovariante Formulierung

- Tensorgleichung unabhängig von Inertialsystem /
Koordinatensystem

1) Kovarianter Vektor

= kovarianter Tensor vom Rang 1

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) \quad ; \quad \mu = 0 \dots 3$$

Kovariant im Sinne Lorentz-Transformation

a^μ kovariant, wenn Transformationsverhalten
unter Lorentz-Transformation wie 4er-Ortvektor x^μ :

$$\boxed{a^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu}$$

Kovariant:

Index oben

$$x^\mu = (t, x, y, z) \quad \text{mit } c=1$$

z.B. mit $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für Lorentz-Boost
in x-Richtung
mit Geschwindigkeit
 $v = \beta$

mit allgemeiner Transformation (einschl. Koordinaten-
transformation)

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$$

$$\Rightarrow dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} = J^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}$$

Transformation des Differential des Ortsvektors

J^{μ}_{ν} : Jacobi-Matrix

Kontravarianter Vektor a^{μ} : Transformationsverhalten

wie Differential des Ortsvektors unter Koordinaten-
bzw. Lorentz-Transformation

$$\boxed{a'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} a^{\nu}}$$

kompatibel mit LT-Definition

$$J^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\nu}$$

aber: allgemeine Transformation

$$x'^{\mu}(x^{\nu}) \text{ vorgegeben} \Rightarrow x'^{\mu} \neq \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu}$$

vgl. Polarkoordinaten $(r, \varphi) = x'^{\mu}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \varphi = \arctg y/x$$

$\Rightarrow x^{\mu}$: 4er Ortsvektor im allgemeinen kein
Tensor vom Rang 1

aber dx^{μ} immer kontravarianter Vektor

kovarianter Vektor / kovarianter Tensor vom Rang 1

$$\text{mit } a^2 = \eta_{\mu\nu} a^{\mu} a^{\nu} = a_{\mu} a^{\mu} \Rightarrow a_{\mu} \equiv \eta_{\mu\nu} a^{\nu}$$

↑ Skalar / Lorentz-Skalar

$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu$: Index senken (Lowering)

beachte : $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$; $\eta = \eta^T$ symmetrisch

nur in flacher Raumzeit; bzw in Minkowski-Kz

$$\eta = \eta^{-1}$$

immer : $\eta^{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu})^{-1}$

d.h. für allgemeine Metrik $g_{\mu\nu}$

$\Rightarrow g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$ in gekrümmter Kz

a_μ : kovariante Vektor / dualer Vektor zu a^μ

$$a'_\mu = \eta_{\mu\nu} a'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\alpha a^\alpha = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\alpha \eta^{\alpha\lambda} a_\lambda$$

mit $\eta_{\mu\nu} \lambda^\nu \eta^{\rho\lambda} = (\Lambda^{-1})_\mu^\lambda$ inverse LT

$$\Rightarrow \boxed{a'_\mu = (\Lambda^{-1})_\mu^\lambda a_\lambda} \quad \text{Transformationsverhalten eines kovarianten Vektors}$$

Transformation mit inverser Lorentz-Transformation

$$\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta \quad ; \quad \Lambda \text{ pseudo-orthogonal}$$

$$a^\mu = \eta^{\mu\lambda} a_\lambda \quad : \quad \text{Index heben (raising)}$$

allgemein kovarianten Vektor / Tensor

betrachte der Gradient einer skalaren Funktion

$$f(x^\mu) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{mit } f(x'^\mu) = f(x^\mu) \text{ vgl. } a^2 = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = a_\mu a^\mu$$

$$\partial_\mu f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

bei Transformation

$$\partial'_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}}_{\text{inverse Jacobi-Matrix / inverse Lorentz-Transformation}} \partial_\nu f$$

inverse Jacobi-Matrix /
inverse Lorentz-Transformation

$$\Rightarrow \boxed{a'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} a_\nu}$$

Def.: ein kovarianter Vektor transformiert sich wie der Gradient einer skalaren Funktion unter Koordinaten- / Lorentz-Transformation; d.h. mit inverser Jacobi-Matrix / inverser LT

Eigenschaften von Vektoren / Darstellung im Minkowski-Diagramm

$$\text{mit } a^2 = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = a_\mu a^\mu \stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} 0 = (a^0)^2 - \vec{a}^2$$

Unterscheidung

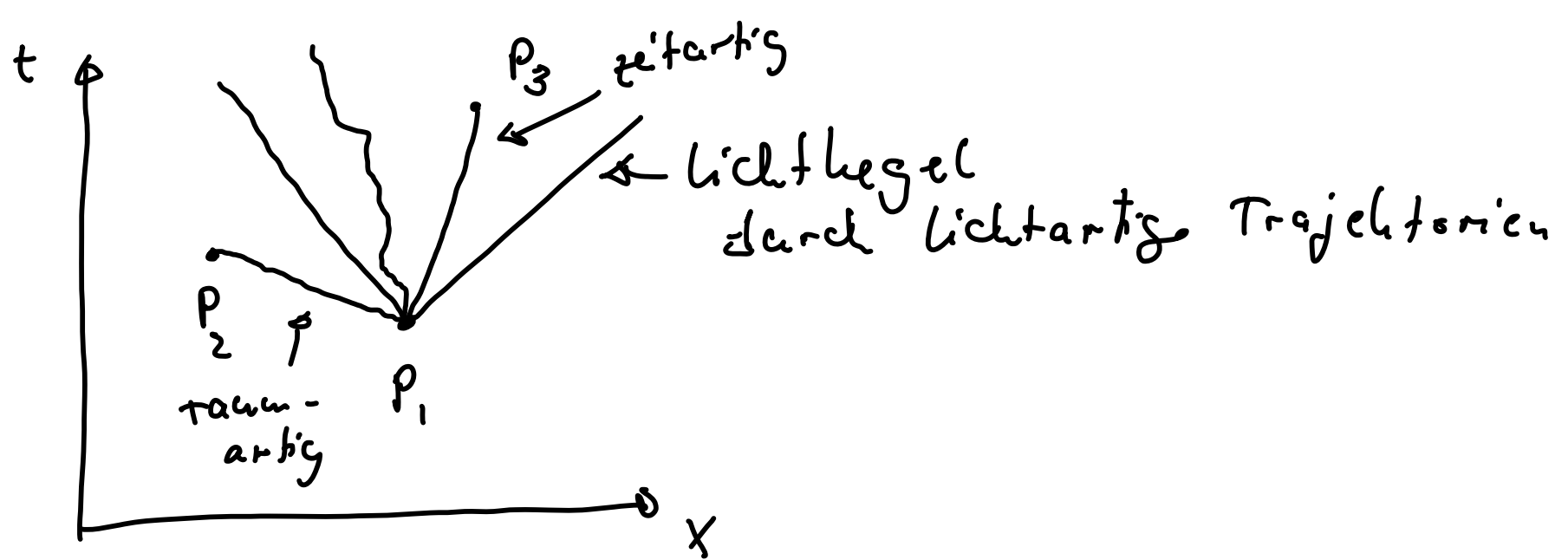
raumartig : $\vec{a}^2 > (a^0)^2$ hier $a^2 < 0$

zeitartig : $(a^0)^2 > \vec{a}^2$ $a^2 > 0$

beachte : Teilchenbahnen / Trajektorien $x^\mu(\tau)$
sind immer zeitartig, d.h.

$$dx_\mu dx^\mu > 0$$

lichtartig : $a^2 = 0$ bzw. $ds^2 = 0$
Trajektorie von Photonen / Licht



Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

aus Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad : \text{Gau\ss}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad : \text{Amp\ere-Maxwell}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad : \text{Faraday / Induktion}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad : \text{quellfreies B-Feld}$$

Einheiten: CGS - Gau\ss-System

$$\text{mit } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} ; [\vec{E}] = [\vec{B}] ; [\vec{B}^2] = \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}$$

im Vakuum:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{E} = 0 ; \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{B} = 0$$

\vec{E} und \vec{B} erfullen Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit
 $c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$

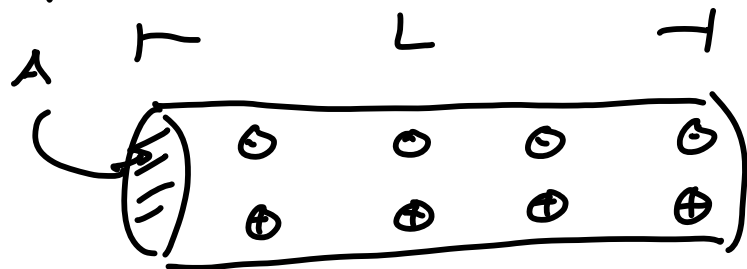
⇒ mass in allen Inertialsystemen gelten
(EM-Wellen = Licht)

Hinweis: $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$ d'Alembert-Operator
 $= \partial_\mu \partial^\mu$ Lorentz-invariant

⇒ $\square' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \vec{\nabla}'^2$

⇒ Maxwell-Gleichungen implizieren relativistische Formulierung
 aber \vec{E} und \vec{B} sind keine kovarianten Größen
 \vec{E} und \vec{B} -felder sind abhängig vom Betrachter (Inertialsystem)

Bsp. Stromdurchflussener Leiter



im Laborsystem
 $-q \rightarrow v$

→ v Elektronen: Leiter mit Strom I
 Ladungsträger (e^-) bewegen
 sich mit Geschwindigkeit
 v (Bem. $v \sim 0.1 \text{ mm/s}$
 $\sim 10^{-12} c$)

im Laborsystem S :

stromdurchflossener Leiter erzeugt Magnetfeld:

Biot-Savart-Gesetz / Ampère-Gesetz

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

betrachte Ladung $-q$ mit Geschwindigkeit $v = v_{\text{Elektronen}}$

\Rightarrow Ladung erfährt magnetische Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow -q \text{ wird zum Leiter beschleunigt}$$

aber im mitbewegten System S' : $v = 0$

d.h. keine mag. Lorentz-Kraft; aber physikalisches

Ereignis (Ladung wird zum Leiter beschleunigt) bleibt

in S' :

• Ladungsdichte

$$\rho_- = \frac{N_- q_-}{V} \quad ; \quad \rho_+ = \frac{N_+ q_+}{V}$$

N_{\pm} : Anzahl Ladungen

V : Volumen

$$V = A \cdot L$$

Ladungen $Q_{\pm} = V \rho_{\pm}$ identisch in allen Inertialsystemen (Ladungserhaltung)

$$\rho' \cdot L' = \rho L \quad ; \text{ da } A' = A \quad v \perp A$$

$$\rho' = \rho \frac{L}{L'} = \gamma \rho \quad \text{wg. Längenkontraktion}$$

im Laborsystem: $\rho_+ + \rho_- = 0$: Leiter neutral

Elektronen (ρ_-) bewegen: $\rho_- = \gamma \rho'_-$; ρ'_- im Ruhesystem der Elektronen

Im Ruhesystem von $-q$: S'
bewegen sich die positiven Ladungen:

$$\rho'_+ = \gamma \rho_+$$

$$\Rightarrow \rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \gamma \rho_+ + \frac{\rho_-}{\gamma} = \rho_+ \gamma \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \rho_+ \gamma \beta^2$$

($\beta = \frac{v}{c}$)

\Rightarrow Im System S' der bewegten Ladung gibt es eine positive Ladungsdichte, diese erzeugt Coulomb-Feld und $-q$ wird zum Leiter beschleunigt

mit Ladung pro Längeneinheit

$$\lambda' = \rho' A' \quad ; \quad A' = A \quad : \quad \text{Querschnittsfläche}$$

$$\Rightarrow E' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \quad ; \quad r : \text{Abstand zum Leiter}$$

$$= \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 r \quad : \quad \text{elektrische Feld im mitbewegten System } S'$$

\Rightarrow Coulomb-Kraft

$$F'_c = -q E' = -q \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 r \quad \overset{v \ll c}{\approx} -q \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\text{in } S : I = v \rho_- A$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\text{mit } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

⇒ im Laborsystem: nur mag. Lorentz-Kraft

$$F_L = -qvB$$

in S' : nur Coulomb-Kraft, da $v = 0$

⇒ F_L und F_C sind physikalisch identisch

Unterscheidung (\vec{E} oder \vec{B}) nur durch Relativbewegung abhängig

bzw. \vec{E} und \vec{B} sind durch Lorentz-Transformation

verknüpft

⇒ für kovariante Formulierung: Vereinheitlichte Darstellung von \vec{E} und \vec{B} notwendig

- \vec{E} und \vec{B} können gleichzeitig existieren (in einem System)

→ 4er Vektor nicht ausreichend

→ mindestens 6 Komponenten

aber Darstellung mit 4er-Vektorpotential möglich:

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad \text{4er Vektor / Tensor von Rang 1}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Bsp. Ladung q im Ruhesystem (S')

\Rightarrow nur \vec{E}' -Feld, kein \vec{B}' -Feld,
bzw. $\vec{A}' = 0$

im Laborsystem S : Ladung bewegt sich mit
konstanter Geschwindigkeit v
in x -Richtung ($\beta = v, c=1$)

$$\Rightarrow A^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_{\nu} A'^{\nu} ; \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'^{\mu} = \begin{pmatrix} \phi' \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla}'\phi'; \quad \vec{B}' = 0$$

$$A^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma\phi' \\ \gamma\beta\phi' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

+ Transformation der Ableitungen aus LT

$$x' = \gamma(x - \beta t); \quad t' = \gamma(t - \beta x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma(\partial_{x'} - \beta \partial_{t'})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma(\partial_{t'} - \beta \partial_{x'})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

auch mit

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu = \begin{pmatrix} \gamma(\partial_{t'} - \beta \partial_{x'}) \\ \gamma(\partial_{x'} - \beta \partial_{t'}) \\ \partial_{y'} \\ \partial_{z'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E^x &= -\partial_x \phi - \partial_t A^x = -\gamma^2 (\partial_{x'} - \beta \partial_{t'}) \phi' - \beta \gamma^2 (\partial_{t'} - \beta \partial_{x'}) \phi' \\ &= -\gamma^2 (1 - \beta^2) \partial_{x'} \phi' = E'^x \end{aligned}$$

$$E^y = -\partial_y \phi - \partial_t A^y = -\gamma \partial_{y'} \phi' = \gamma E'^y$$

$$E^z = \gamma E'^z$$

$$B^x = \partial_y A^z - \partial_z A^y = 0$$

$$B^y = \partial_{z'} A_x = \gamma \beta \partial_{z'} \phi' = -\gamma \beta E'^z$$

$$B^z = \gamma \beta E'^y$$

(Bemerkung: für 3er Vektorkomponenten: $\vec{E}^k = E^k$,
d.h. keine Unterscheidung zwischen ko- und kontravarianten
Anteil)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}^x = E'^x \\ \vec{E}^y = \gamma E'^y \\ \vec{E}^z = \gamma E'^z \end{array} \right\} \begin{array}{l} B^x = 0 \\ B^y = -\gamma \beta E'^z \\ B^z = \gamma \beta E'^y \end{array}$$

keine Änderung in Bewegungsrichtung! \rightarrow

Matrix-Darstellung von E- und B-Feldern

bzw. Tensor-Darstellung

mit $\partial_\mu = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$

$$\Rightarrow \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = (\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)^T$$

($\eta^{\mu\nu}$ inverse der Minkowski-Metrik, d.h.

$$\eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu}); \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

* Vier Vektorpotential :

$$X^{\mu} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

• \vec{E} und \vec{B} ergeben sich durch Ableitungen von A^{μ}

• 6 unabh. Komponenten notwendig

=> $F^{\mu\nu} (\partial_{\lambda} A^{\nu})$ Ansatz

allgemein : 16 Komponenten

symmetrisch : 10

anti-symmetrisch : 6 unabhängige Komponenten

=>
$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}} \quad \text{Feldstärke-Tensor}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \partial_t A^x - \partial_x A^0 & \partial_t A^y - \partial_y A^0 & \partial_t A^z - \partial_z A^0 \\ -(0,1) & 0 & -\partial_x A^y + \partial_y A^x & -\partial_x A^z + \partial_z A^x \\ - (0,2) & -(1,2) & 0 & -\partial_y A^z + \partial_z A^y \\ - (0,3) & -(1,3) & -(2,3) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

Elektromagnetische Feldstärke tensor
Maxwellchen

Maxwell-Gleichungen aus dem Feldstärke tensor

mit $j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$; ρ : Ladungsdichte
 \vec{j} : Stromdichte
 per Stromdichte

⇒ inhomogene Maxwell-Gleichungen:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu}$$

(per Divergenz des
Feldstärke tensor)

z.B. $v = 0$

$$\partial_x E^x + \partial_y E^y + \partial_z E^z = 4\pi \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho}$$

$v = 1$

$$\partial_t (-E^x) + \partial_y B^z + \partial_z B^y = 4\pi j^x$$

analog für $v = 2, 3$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \vec{j}}$$

Lorentz-Transformation des Feldstärke tensors

$$\boxed{F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}} \quad \text{Tensor vom Rang 2}$$

\Rightarrow für x-Boost:

$$\left. \begin{array}{ll} E'^x = E^x & B'^x = B^x \\ E'^y = \gamma(\tilde{E}_y - \beta B_z) & B'^y = \gamma(B^y + \beta E^z) \\ E'^z = \gamma(E_z + \beta B_y) & B'^z = \gamma(B^z - \beta E^y) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0} \quad \text{homogenen Maxwell-Gleichungen} \quad 183$$

zeigen z.B. durch einsetzen von (*) in inhom. Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu F^{\alpha\beta} + \partial_\alpha F^{\beta\mu} + \partial_\beta F^{\mu\alpha} = 0$$

Jacobi-Identität

oder:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$$

$$= \frac{1}{2} (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta + \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta)$$

$$= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta = 0 \quad (\text{wg. } \partial_\mu \partial_\alpha = \partial_\alpha \partial_\mu)$$

Invarianten des Feldstärketensors

Skalar mit

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \text{Lorentz-Skalar}$$

auch

$$F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -\vec{E} \cdot \vec{B} \quad \text{pseudo-Lorentz-Skalar}$$

(Vorzeichenänderung bei $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$ oder $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$)

auch

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rightarrow \text{kein neuer Skalar}$$

$$\Rightarrow \vec{E}^2(x^\mu) - \vec{B}^2(x^\mu) = \vec{E}'^2(x^\mu) - \vec{B}'^2(x^\mu)$$

$$\vec{E}(x^\mu) \cdot \vec{B}(x^\mu) = \vec{E}'(x^\mu) \cdot \vec{B}'(x^\mu)$$

\Rightarrow • $|\vec{E}| < |\vec{B}| \rightarrow |\vec{E}'| < |\vec{B}'|$ in allen Inertial-Systemen

• $\vec{E} \cdot \vec{B} > 0 \rightarrow \vec{E}' \cdot \vec{B}'$ für $\varphi < 90^\circ$

• $\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E}' \perp \vec{B}'$ mit $|\vec{E}'| < |\vec{B}'|$

$$\cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B}' \perp \vec{E}' \text{ mit } |\vec{B}'| < |\vec{E}'|$$

$\cdot |\vec{E}'| = |\vec{B}'|$ und $\vec{E}' \perp \vec{B}' \rightarrow$ gültig in allen
Inertialsystemen

Exkurs: Index vs. Matrix Notation

$$\text{z. B. } F^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}$$

Zeile Spalte

$$\Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \text{Zeilenvektor} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \times 4 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

4×4

nicht definiert

aber $\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \text{ OK}$

$$F^{\alpha\beta}$$

$$\Lambda^{\nu}_{\beta}$$

aber: $C = A B$

$$\hookrightarrow c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

$$" \Lambda^\nu_\beta \overline{F}^{\alpha\beta} " = \overline{F}^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta\nu} \quad \text{bzG} = \overline{F} \Lambda^T$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{F}'^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \overline{F}^{\alpha\beta} \\ &= \Lambda \overline{F}_{\text{kont}} \Lambda^T \quad \text{aber } \Lambda = \Lambda^T \end{aligned}$$

• allgem. Transformationsmatrix

• kontravariant

$$a'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} a^{\nu} \quad \text{mit } (a^{\nu}) = \begin{pmatrix} \phantom{a^{\nu}} \\ \phantom{a^{\nu}} \\ \phantom{a^{\nu}} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Spalten-} \\ \text{vektor} \end{array}$$

$$J^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

$$\Rightarrow a' = J a \quad \text{kontravariant}$$

beachte: $J \neq J^T$ i. A.

$$(J^{\mu}_{\nu})^T = J_{\nu}^{\mu}$$

• Invariant

$$\begin{aligned} \text{da} \quad a_\mu a^\mu &= \text{Skalar} \\ &= \underbrace{\eta_{\mu\nu}}_{\text{Zeilenschnittor}} a^\nu a^\mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a_\mu) = a^T \eta \quad \Rightarrow a_\mu a^\mu = a^T \eta a$$

$$a'_{\mu 0} = a_{\mu 00}^T J^{-1} \quad \text{bzw} \quad a'_{\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\mu}} a_\nu$$

$$F^{\mu}_{\nu} = \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu}$$

Lagrange- und Hamilton-Formalismus der Elektrodynamik

- kovariante Bewegungsgleichungen
Hamilton-Funktion eines freien Teilchens (relativistisch)

$$\text{aus } E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} \quad ; \quad \vec{p} : \text{relativistischer 3er Impuls}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(\vec{x}, \vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}} \quad \text{Hamilton-Funktion eines relativistischen Teilchens}$$

aus Hamilton-Gleichung

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{c^2 p_i}{\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{m \dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} = \gamma m \dot{\vec{x}}$$

Lagrange-Funktion aus Legendre-Transformation

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - H$$

$$\begin{aligned}
 &= \gamma m \dot{x}^2 - \sqrt{\gamma^2 m^2 \dot{x}^2 c^2 + m^2 c^4} ; \text{ mit } \beta = \frac{|\dot{x}|}{c} \\
 &= \gamma m \dot{x}^2 - \gamma m c^2 = \gamma m c^2 (\beta^2 - 1) \\
 &= - \frac{m c^2}{\gamma}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{L \approx - \frac{m c^2}{\gamma}} \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m c^2 + \dots$$

Lagrange-Funktion für relativistisches, freies Teilchen $\hat{=}$ relativistischer kinetischer Term T

Punktladung im E-M-Feld

vgl. Lagrange-Funktion mit verallgemeinertem Potential

$$\text{wenn } \vec{F} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \vec{\nabla} U$$

$$\Rightarrow L = T - U$$

$$\text{hier } U = q \left(\phi - \frac{\dot{x}}{c} \vec{A} \right)$$

nicht relativistischer Fall:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - q \left(\phi - \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \vec{A} \right)$$

$$\hookrightarrow \text{ELG: } m \ddot{\vec{x}} = q \vec{E} + q \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \quad ; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

mit kanonisch konjugierten Impulsen

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \Rightarrow \vec{p} = m \dot{\vec{x}} + \frac{q}{c} \vec{A} = \vec{p}_{\text{kin}} + \frac{q}{c} \vec{A}$$

↳ Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{(\vec{p} - q/c \vec{A})^2}{2m} + q \phi = \frac{\vec{p}_{\text{kin}}^2}{2m} + q \phi$$

mit $H_{\text{rel}} = \sqrt{\vec{p}_{\text{kin,rel}}^2 c^2 + m^2 c^4} + q \phi$

$$H_{\text{rel}} = \sqrt{(\vec{p} - q/c \vec{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + q \phi$$

Hamilton-Funktion
für relativistisches
Teilchen im
G-M-Feld

aus $\dot{x}^i = \frac{\partial H_{\text{rel}}}{\partial p_i} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \frac{(\vec{p} - q/c \vec{A}) c^2}{\sqrt{(\vec{p} - q/c \vec{A})^2 c^2 + m^2 c^4}}$

$$\Rightarrow L_{\text{rel}} = - \frac{m c^2}{\gamma} - q \left(\phi - \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \vec{A} \right)$$

Lorentz-invariante Formulierung

$$U = q \left(\phi - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A} \right)$$

mit $u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$ Ker Geschw.

$$= \frac{1}{\gamma} q u_\mu A^\mu$$

$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ Ker Potential

$$\Rightarrow L(x^\mu, u^\mu) = - \frac{1}{\gamma} (m + q u_\mu A^\mu)$$

mit Wirkung $S = \int dt L$

und Integration entlang Eigenzeit τ : $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$

$$S = \int d\tau \gamma L \quad \text{bzw.} \quad \boxed{S = \int d\tau \tilde{L}} \quad \text{LT-inv. Formulierung}$$

$$\text{mit } \boxed{\tilde{L} = \gamma L = -mc^2 - \frac{q}{c} u_\mu A^\mu}$$

Lorentz-invariante Lagrange-Funktion

Achtung: \tilde{L} liefert nicht die richtigen ELG^(*), da kinetischer Term $-mc^2$ unabh. von x^μ und u^μ

$$(*) \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

Variation entlang Weltlinie τ muß berücksichtigt werden

$$d\tau = dS = \sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2} = d\lambda \sqrt{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{x}}{d\lambda}\right)^2}$$

mit beliebigem Parameter λ und $\tau(\lambda)$ monotonen Funktion

$$\tilde{u}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Rightarrow u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} = \tilde{u}^\mu \frac{d\lambda}{d\tau}$$

$$d\tau = d\lambda \sqrt{\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\mu} \rightarrow S = \int d\lambda (-m c \sqrt{\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\mu}) + \int d\tau (-q \tilde{u}_\mu A^\mu)$$

$$\Rightarrow S = \int d\lambda \left(-m c \sqrt{\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\mu} - \frac{q}{c} \tilde{u}_\mu A^\mu \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{L} = -m c \sqrt{\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\mu} - \frac{q}{c} \tilde{u}_\mu A^\mu}$$

Kovariante Lagrangefunktion für ein geladenes Teilchen im E-M-Feld

für freies Teilchen: $\tilde{L} = -m c \sqrt{\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\mu}$

kovariante ELG:

$$\left| \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{u}^\mu} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu} = 0 \right.$$

wobei mit $\tilde{u}^\mu \rightarrow u^\mu \rightarrow \tilde{L} = -m c \sqrt{u_\mu u^\mu} - \frac{q}{c} u_\mu A^\mu$
und $\tau \rightarrow \lambda$ ersetzt werden kann:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu} = 0$$

beachte: $c^2 \rightarrow u_\mu u^\mu = c^2$ wenn $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$

\Rightarrow aber $L = -m u_\mu u^\mu$ liefert nicht die richtigen Bewegungsgleichungen!

• Kovariante Lagrangedichten für E-M-Felder

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_t \varphi_i, \partial_{x_j} \varphi_i)$$

Lagrangedichte für Felder φ_i :

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\varphi}_i)} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \varphi_i)}$$

ELG für
kontinuierliche
Felder

Hamiltondichte

$$\text{aus } \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$$

+ Legendre-Transformation:

$$\mathcal{H}(\pi_i, \varphi_i, \partial_{x_j} \varphi_i) = \sum_i \pi_i \cdot \dot{\varphi}_i - \mathcal{L}$$

Hamilton-Gleichungen:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_i} \quad ; \quad \dot{\pi}_i = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi_i} \quad ; \quad \frac{\delta}{\delta \varphi_i} : \text{ Funktional-ableitung}$$

Motivation für kovariante Lagrange dichte

betrachte : $L = T - V$

und Elektrodynamik

$\frac{\vec{E}^2}{8\pi}$ = Energiedichte des elektrostatischen Feldes

Potenzielle Energiedichte : $q\phi \rightarrow \rho\phi$

ϕ : Potential

ρ : Ladungsdichte

$$\rightarrow \mathcal{L}_{ES} = \frac{\vec{E}^2}{8\pi} - \rho\phi = \frac{1}{8\pi} (\vec{\nabla}\phi)^2 - \rho\phi ; \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$ELG : \mathcal{J}_{ES} = \mathcal{L}_{ES}(\phi, \partial_i \phi)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{ES}}{\partial \phi} = -\rho ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{ES}}{\partial (\partial_i \phi)} = \frac{1}{4\pi} \partial_i \phi = -\frac{1}{4\pi} \vec{E}_i$$

$$\text{hier } \partial \mathcal{L}_{ES} / \partial (\partial_t \phi) = 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow -\rho = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

Maxwell-Gleichung für elektrostatisch

analog für \vec{B} -Feld

generierte Potentialdichte: $\vec{j} \cdot \vec{A}$

mit $\vec{j} = \rho \vec{v}$ (analog zu $q \vec{v}$)

$$\mathcal{L}_{NS} = \frac{1}{8\pi} \vec{B}^2 - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A}$$

$$= \frac{1}{8\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A}$$

$$= \frac{1}{8\pi} (\epsilon^{ijk} \partial_j A_k \epsilon^{ilm} \partial_l A_m) - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A}$$

ELG:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{NS}}{\partial A_i} = -\frac{1}{c} j_i$$

$$\text{mit } \frac{\partial(\partial_i \phi_j)}{\partial(\partial_\mu \phi_\nu)} = \delta_\mu^i \delta_\nu^j$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_i)} \stackrel{i \rightarrow q}{=} \frac{1}{8\pi} \epsilon^{qjkl} \epsilon^{qlm} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_i)} (\partial_j A_k \partial_l A_m)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \epsilon^{qjkl} \epsilon^{qlm} (\delta_\mu^j \delta_\nu^i \partial_l A_m + \delta_\mu^l \delta_\nu^i \partial_j A_k)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \epsilon^{q\mu i} \underbrace{\epsilon^{qlm} \partial_l A_m}_{(\vec{\nabla} \times \vec{A})_q = B_q}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \epsilon^{q\mu i} B_q$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{MS}}{\partial(\partial_\mu A_i)} = \frac{1}{4\pi} \epsilon^{q\mu i} \partial_\mu B_q = -\frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B})_i$$

$$\Rightarrow \text{ELG: } \vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi \vec{j} \quad \checkmark \quad \text{Ampère}$$

Gesamt-Lagrangedichte für Elektrodynamik?

$$\text{Ansatz: } \mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_E + \alpha \mathcal{L}_M$$

$$\text{mit } \mathcal{L}_E = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2 - \rho \phi \quad \text{und} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{und } \mathcal{L}_M = \frac{1}{8\pi} \vec{B}^2 - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \quad \text{und} \quad \partial_t \vec{A} \neq 0$$

mit $\alpha = -1$ liefert \mathcal{L}_{EM} inhom. Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \rho \phi + \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A}}$$

Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes

$$\mathcal{L}_E = \mathcal{L}(\phi, \vec{A}, \partial_t \vec{A}, \partial_i \phi, \partial_i A_i)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left((-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})^2 - (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right) - \rho \phi + \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A}$$

ELG:

$$\phi : \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad \checkmark$$

$$\vec{A} : \frac{1}{c} \vec{j} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}_{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t A_i)}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \vec{j} \quad \checkmark$$

Kovariante Lagrange dichte und ELG

mit $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$

kovariant,
Lorentz-invariant

und $j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}; A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu}$$

$$c = 1$$

Kovariante
Lagrange dichte
des elektromag.
Feldes

Kovariante Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi_j)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_i)} \rightarrow \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = 0 \right) \quad \begin{array}{l} \phi_i : \text{beliebige} \\ \text{Felder} \\ \text{z.B. } \phi_i \hat{=} A^\mu \text{ für} \\ \text{EDynamik} \end{array}$$

Kovariante ELG

für E-M-Felder:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \rightarrow F = F(\partial_\mu A_\nu)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_{EM}(A^\mu, \partial^\mu A^\nu)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial A^\mu} = -j_\mu$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= 2 \left((\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = 4(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = 4 F_{\nu\mu}$$

ELG:

$$\partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = 4 \partial^\nu F_{\nu\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial^\nu F_{\nu\mu} = 4\pi j_\mu}$$

kovariante Maxwell-Gleichungen (inkl. j)

Kovariantes Noether Theorem

↳ Erhaltungsgrößen; vgl. Noether-Theorem für Felder

betrachte $\phi_i \rightarrow \phi_i + \delta\phi_i$ mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$

mit Herleitung des ELG aus Wirkung

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad \text{mit} \quad \delta S = 0$$

$$\text{wenn } \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} = \mathcal{L} + \partial_\mu J^\mu \quad (*)$$

$\partial_\mu J^\mu$: Viererdivergenz trägt nicht zur
Variation der Wirkung bei
→ "Oberflächenterm" = const.

Dann $\phi_i \rightarrow \phi_i + \delta\phi_i$ Symmetrietransformation
und es existiert eine Erhaltungsgröße

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta(\partial_\mu\phi_i)$$

mit $\delta(\partial_\mu\phi_i) = \partial_\mu\delta\phi_i$

und $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} = 0 \quad \bar{e} \in G$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right) \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \partial_\mu \delta\phi_i$$

$$= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i \right) \stackrel{!}{=} \partial_\mu J^\mu \quad \text{aus (*)}$$

$$A^2 = A_\mu A^\mu = A^\mu A_\mu$$

$$\partial_\mu A \equiv \frac{\partial A}{\partial x^\mu} ; \quad \partial^\mu = \frac{\partial A}{\partial x_\mu} ;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = B^\mu ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} = B_\mu ; \quad B_\mu = \eta_{\mu\nu} B^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \phi)} \equiv B_\nu$$

$$\text{mit } j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i - \mathcal{J}^\mu$$

$$\Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung für Stromdichte } j^\mu$$

\Rightarrow "Ladungserhaltung" /
Noether Ladung

betrachte Stromerhaltung in der Elektrodynamik

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu ; \quad j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{aus} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$$

$$\text{und} \quad \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi \partial_\nu j^\nu$$

$$= 0 \quad \text{wg.} \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

$$= -\partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu}$$

Energie-Impuls-Tensor

- Hamiltondichte:

betrachte kanonisch-konjugierten Impulsdichten

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0$$

$$\vec{\pi}_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \vec{A})} = \frac{1}{4\pi c} \left(\vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{4\pi c} \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dot{\phi} \pi_{\phi} + \dot{\vec{A}} \vec{\pi}_A - \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \rho \phi - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \\ &= -\frac{1}{4\pi c} \dot{\vec{A}} \cdot \vec{E} - \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \rho \phi - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

bzw. für $\rho = 0 = \vec{j}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi c} \dot{\vec{A}} \cdot \vec{E} - \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

≠ Energiedichte des E-M-Feldes

$$\text{mit } \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla} \phi - \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \vec{E}^2 - \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{E} + \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{E}) &= (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{E} + \phi \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}} \\ &= 0 \quad \text{wg } \rho = 0 \end{aligned}$$

betrachte Gesamtenergie

$$\bar{E} = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left(\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}(\phi \vec{E}) + \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right)$$

$$= \int d^3x \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \text{Oberflächenterm}$$

$\stackrel{!}{=} \text{Energie - Offset}$

\Rightarrow Hamilton-Dichte:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)}$$

Energiedichte des
E-M-Feldes

Energie-Impuls-Tensor

Energie + Impuls Erhaltung aus Invarianz der
Wirkung gegenüber zeitlicher + räumlicher Verschiebung
 $\stackrel{!}{=} \text{Symmetrie der Lagrangefunktion}$

hier mit 4er-Notation / kovariante Formulierung

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu \quad \rightarrow \delta \phi_i = \partial_\mu \phi_i \delta x^\mu$$

mit Noether-Theorem

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right)$$

und Verschiebung:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \quad \text{im Sinne der Kettenregel auf Felder } \phi_i$$

$$\mathcal{J}^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu$$

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i \delta x_\nu - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \delta x_\nu$$

$$= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta x_\nu$$

$\partial_\mu j^\mu = 0$ unabhängig von der Wahl von δx_ν

$$\Rightarrow \boxed{T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}}$$

kanonische
Form des
Energie-Impuls-
Tensors

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0} \quad \text{Lagrange-Formulierung} \\ \text{der Energie-Impulserhaltung}$$

Bemerkung:

$$\text{mit } \pi_i^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \quad \text{kanonisch-konjugierte} \\ \text{Impulsdichte}$$

$$\text{und } \mathcal{H}^{\mu\nu} = \pi_i^\mu \dot{\phi}_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad \text{Legendre-Transformation}$$

Bsp.: E-M-Felder

$$\text{im Vakuum: } \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0; \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}; \quad \phi_i \rightarrow A_\nu$$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} \partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

hat nicht die gesuchte Form

1) $T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$ aber: Symmetrie gefordert
wg. Drehimpulserhaltung,
Actio = Reactio

$$2) T^{00} = -\frac{1}{4\pi} \dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{A}} - \frac{1}{8\pi} (\dot{\vec{E}}^2 - \dot{\vec{B}}^2)$$

→ symmetrischer Tensor durch Erweiterung:

betrachte: $\partial_\lambda t^{\mu\lambda\nu}$ mit $t^{\mu\lambda\nu} = -t^{\lambda\mu\nu}$

$$\partial_\mu \partial_\lambda t^{\mu\lambda\nu} = 0$$

antisymmetrisch
in den ersten beiden
Indizes

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda t^{\mu\lambda\nu}$$

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0 \text{ erfüllt}$$

mit $t^{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} A^\nu$

$$\partial_\lambda t^{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{4\pi} \underbrace{(\partial_\lambda F^{\mu\lambda})}_{=0 \text{ wg } j^\mu = 0} A^\nu + F^{\mu\lambda} \partial_\lambda A^\nu$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{T}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} (\partial^\nu A_\lambda - \partial_\lambda A^\nu) + \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} + \end{aligned}$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\nu\lambda} F^{\lambda\mu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

symmetrischer Energie-Impuls-Tensor