

# Theoretische Physik I

001

## Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

### Teil I      Theoretische / klassische / analytische Mechanik

Motivation:

- tieferes Verständnis der Newtonschen Mechanik
- verschiedene (mathematische) Grundkonzepte
  - ↳ Anwendung auf unterschiedliche Bereiche
  - z.B. E-Dynamik, QM, ART aus Variationsprinzip

#### 1) Newtonsche Mechanik

Newtonsche Axiome

- 1) Kräftefreien Körper (Masse) bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit

2) Kraft gleich Masse mal Beschleunigung

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

3) Actio = Reactio :  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

2) Newtonsches Weltbild (Weltbild der nicht-relativistischen klassischen Mechanik) :

- Materie : läßt sich durch (unzerstörbare) Massenpunkte eindeutig beschreiben
- Zeit : eindimensionaler Parameter zur Beschreibung von Bahnen / Trajektorien :  
passiv, unbeeinflussbar
- Raum : 3D "Bühne" der Physik  
unveränderlich, Beschreibung mit Koordinaten  
(z.B. kartesisches Koordinatensystem)

↳ Raum + Zeit sind absolut

- Bewegungen sind deterministisch

⇒) Limitierungen:

- Elementarteilchen sind ununterscheidbar
- QM: nicht deterministisch → probabilistisch  
u. a. Unschärferelation
- SRT: Zeit ist abhängig von Relativbewegung
- ART: Raum + Zeit werden durch Materie / Energie  
gekrümmert

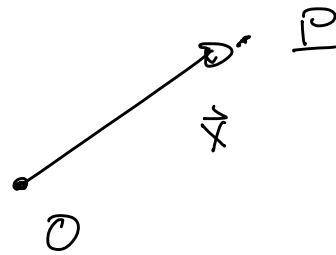
↳ nicht absolut, sondern dynamisch (z.B. GW)  
Inhalt hat Einfluß auf "Bühne"

"Mathematisierung"

Zeit:  $t \in \mathbb{R}$  ; Einheit Sekunde [s]

Raum: Beschreibung mit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{x} = (x, y, z)$   
Dimension  $|\vec{x}|$  ; Einheit Meter [m]

z.B. kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung  
in  $O$



Änderung des Bezugssystems: "Beobachterwechsel"

a) Translation:  $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$

b) Rotation:  $\vec{x}' = R \vec{x}$ ;  $R$ : Rotationsmatrix  
(orthogonal:  $R^T R = \mathbb{1}$ )

$\Rightarrow$  Gruppe Koordinatentransformationen:

Euklidische Gruppe

auch allgemein: Koordinatentransformation: Verwendung einer  
anderen "Karte"; z.B. Kugelkoordinaten  $\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \varphi)$

wobei  $|\vec{x}| = \text{Länge}$  aber  $\theta, \varphi = \text{Winkel}$

# Inertialsystem

Inertiales Koordinatensystem, in dem keine äußeren Kräfte wirken und es gilt

$$\vec{a} = 0$$

Postuliertes Koordinatensystem: beschreibt Klasse von Koordinatensystemen, die durch die Euklidische Gruppe + Geschwindigkeitstransformation ineinander überführt werden kann: Galilei-Gruppe

$$\text{Transformation: } \vec{x}' = \vec{x} - \vec{b} - \vec{v}t ; \vec{b}, \vec{v} = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}' = 0 = \ddot{x}$$

Galileische Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Alle physikalischen Gesetze sind dort gleich. ("Physik" im fahrenden Zug = "Physik" im ruhenden System)

## Newton'sches Determiniertheitsprinzip

für jedes System mit  $N$  Massenpunkten sind die Bahnen vollständig bestimmt (determiniert) wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt alle Orte und Geschwindigkeiten gegeben sind, d. h.  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \dots, \dot{\vec{x}}_N)$  gegeben  
 Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i \quad \Rightarrow \text{Anfangswertproblem}$$

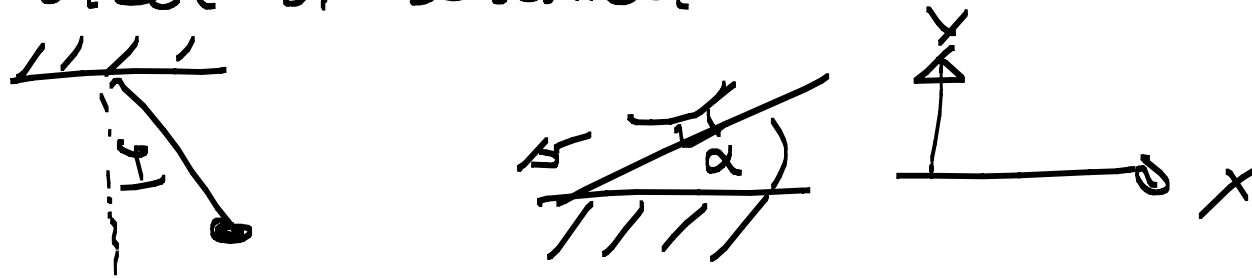
# Lagrange - Mechanik

- Newtonsche Mechanik  
Bahnen/Trajektorien bestimmt durch Bewegungsgl.  
+ Anfangswerte
- Lagrange - Mechanik  
Bahnen bestimmt durch "Randwerte" (auch z.B.  
kürzeste Strecke)

## Zwangsbedingungen

Systeme oft eingeschränkt (geometrische Bedingungen)

z.B. Pendel o. Schlitten



Zwangskräfte i. A. nicht (im Detail) bekannt  
(z.B. Auftriebskraft o. Fadenspannung)

Formulierung mit

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i(\text{ext.}) + \vec{N}_i \leftarrow \text{Zwangs Kraft}$$

schwierig

• Koordinaten des Ortsvektors  $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$

nicht unabhängig

z.B. Zahn auf schiefer Ebene:  $y = \tan \alpha \cdot x$

Terminologie / Klassifizierung von Zwangsbedingungen

• holonome Zwangsbedingung

$f(\vec{x}, t) = 0$  d.h. Formulierung mit  
Gleichung möglich

z.B.  $y - \tan \alpha \cdot x = 0$



- nicht-holonome Zwangsbedingungen  
Formulierung mit Gleichung nicht möglich  
Elimination von redundanten Koordinaten nicht möglich  
z. B. Teilchen in Hohlkugel:  $|\dot{\vec{x}}| \leq R$

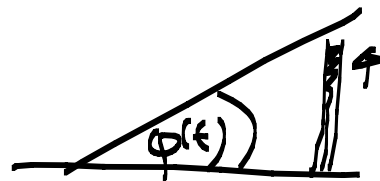
- skleronome ZB  
zeitunabhängige Zwangsbedingungen  
 $f(\vec{x}) = 0$  holonome-skleronome ZB

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

- rheonome ZB :  $f(\vec{x}, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$$

z. B. schiefe Ebene zeitabhängig



## Holonome Zwangsbedingungen

010

# Freiheitsgrade für Systeme ohne zB

$3N$  für  $N$  Teilchen

mit  $p$  holonome zBs: Reduktion der Freiheitsgrade

$$f = 3N - p$$

⇒ Beschreibung mit  $f$  generalisierten Koordinaten

$q_1, q_2, \dots, q_f$  möglich

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$$

$q_i$  unabhängig von einander; d.h.  $f(q_1, q_2, \dots, q_f) = 0$

kann nicht mehr formalisiert  
werden

bilden Konfigurationsspace mit einem  
 $f$ -dimensionalen Konfigurationssucher  $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

⇒ generalisierte Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$$

mit Anfangswerte bei  $t_0$ :  $q(t_0) = \underline{q}_0$  und  $\dot{q}(t_0) = \underline{\dot{q}}_0$

System mit Bewegungsgleichungen (müssen noch bestimmt werden) bestimmt

Bem.:  $q_i$ 's nicht eindeutig; unterschiedliche generalisierte Koordinaten möglich

$q_i$ 's: nicht notwendigerweise Längen  
(z.B. Winkel)

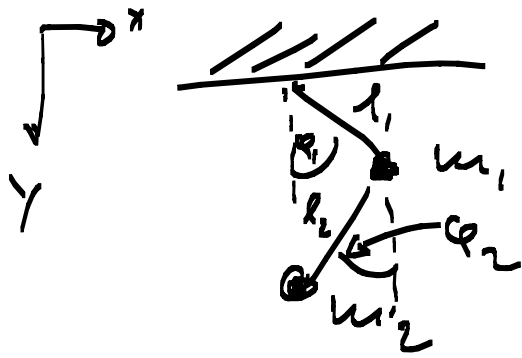
z.B. • Teilchen auf Kugeloberfläche fixiert; Radius  $R$

$$\text{Zwangsbedingung: } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

↳ mögliche generalisierte Koordinaten:

$\theta$ : Polarwinkel;  $\varphi$ : Azimut-Winkel

- Doppelpendel in der Ebene



2-Körper Problem:

ursprünglich 6 Freiheitsgrade  
4 holonome Zwangsbedingungen

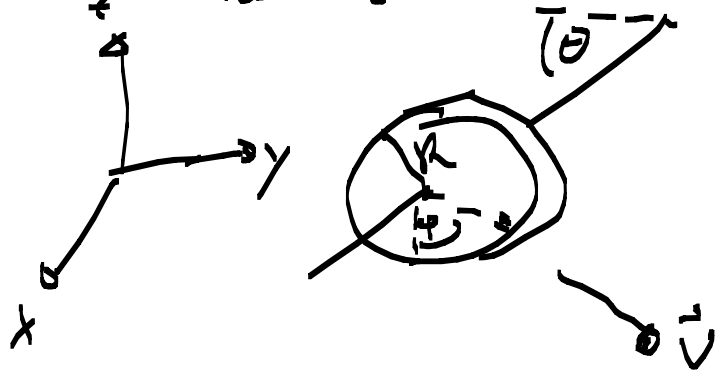
$$z_1 = 0 = z_2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

- Bsp.: nicht-holonome Zwangsbedingung

z rollendes Rad



Beschreibung des Systems  
mit "Auflagepunkt" in der  
(x, y) Ebene und Winkel  
(phi, theta) : 4 Freiheitsgrade  
(ignoriere z = 0)

holonome Zwangsbedingungen möglich?

Wahrheit: Koordinaten sind unabh. von einander

formal: "Rollen":

Geschwindigkeit Achse  $(\dot{x}, \dot{y})$

= Geschwindigkeit Rad

v-Rad:  $v = R\dot{\varphi}$

Richtung:  $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \dot{x} = v \cos\theta = R\dot{\varphi} \cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R \cos(\theta(t))$$

$$\dot{y} = v \sin\theta = R\dot{\varphi} \sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} = R \sin(\theta(t))$$

nicht integrierbar, da  $\theta(t)$  unbekannt (hier:  
keine Bestimmungsgleichung für  $\theta(t)$ )

# d'Alembert Prinzip

Ziel: Aufstellen der Bewegungsgleichungen unter  
 Einbeziehung der Zwangsbedingungen  
 ↳ differentielle Formulierung der Lagrange -  
 Mechanik

Def: virtuelle Verschiebung  $\delta \vec{x}_i$

infinitesimale Änderung der Orte (Koordinaten) eines  
 mechanischen Systems bei festgehaltener Zeit  $t$ ,  
 die mit den Zwangsbedingungen im Einklang stehen  
 (virtuell = willkürlich, d.h. nicht durch physikalische  
 Kräfte verursacht)

festgehaltene Zeit:  $\delta t = 0$

mit  $\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \delta t$$

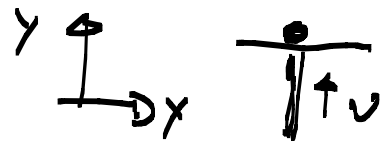
$\delta = 0 \leftarrow$  virtuell

(Verwendung von  $\delta$  genau wie Differential)

Anmerkung: für skleronome Zwangsbedingungen:  
 $\delta \vec{x}$  real ausführbar

für rheonome ZBs nicht real ausführbar

z.B.



Teilchen im Aufzug

$$d\vec{x} = (dx, dy) = (dx, v dt) \quad \text{reale Umrichtung}$$

$$\delta \vec{x} = (\delta x, \delta y) = (\delta x, 0) \quad \text{nicht real durchführbar}$$

Def.: Virtuelle Arbeit

$$\delta W = - \sum_i^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i \quad i = 1, \dots, N \quad \text{Teilchen}$$

$$\text{mit } \vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{z}_i \quad \vec{F}_a : \text{äußere Kraft}$$

$$\vec{z} : \text{Zwangskraft}$$

mit Newtonsche Bewegungsgl.:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{z}_i = m_i \vec{a}_i \quad ; \quad \vec{a}_i = \ddot{\vec{x}}_i$$

$$\text{bzw. } \vec{F}_{a,i} + \vec{z}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i = 0 \quad \text{dynamisches Gleichgewicht}$$

$$\Rightarrow \sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i + \sum_i \vec{z}_i \delta \vec{x}_i = 0$$

d'Alembert'sche Prinzip: die von den Zwangskräften geleistete virtuelle Arbeit ist null; bzw. Zwangskräfte leisten keine virtuelle Arbeit



$$\delta W_z = - \sum_i \vec{z}_i \delta \vec{x}_i = 0$$

Bem.: skleronome Zwangsbedingungen: Zwangskräfte leisten  
keine reale Arbeit

theonom: ... können reale Arbeit leisten

auch d'Alembert'sche Prinzip

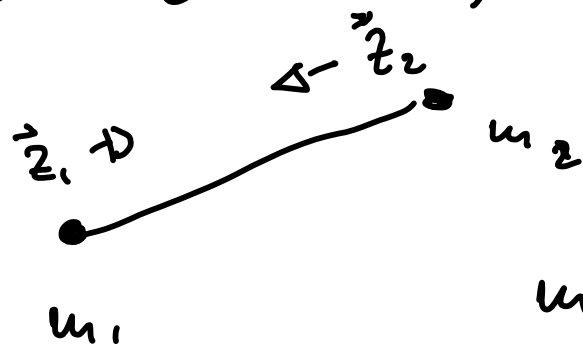
$$\sum_i^N (\vec{F}_{qi} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$$

Vorteil: Formulierung ohne (komplizierte) Zwangskräfte

aber:  $\delta \vec{x}_i$  nicht unabhängig voneinander.

(z.B. holonome Zwangsbedingung:  $f(\vec{x}) = 0$ )

Bsp.:  $\delta W = 0$ ; kräftefreie Hartel



mit Ursprung bei  $m_1$

$$\delta \vec{x}_1 = \delta \vec{s} \quad \text{Verschiebung}$$

$m_2$  kann relativ zu  $m_1$  rotieren

$$\delta \vec{x}_2 = \delta \vec{s} + \delta \vec{R}$$

d'Alembertsches Prinzip:

$$\delta W_z = 0 = -\vec{z}_1 \delta \vec{s} - \vec{z}_2 (\delta \vec{s} + \delta \vec{R})$$

$$= - \underbrace{(\vec{z}_1 + \vec{z}_2)}_{=0} \delta \vec{s} - \underbrace{\vec{z}_2 \delta \vec{R}}_{\vec{z}_2 \perp \delta \vec{R}}$$

$= 0 \Rightarrow$  keine virtuelle (auch keine reale) Arbeit

Ziel: Bewegungsgleichungen mit generalisierten Koordinaten  
(unabhängige Koordinaten)

019

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) \quad ; \quad \underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f) \\ \text{Konfig. Raum}$$

$$\delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (\text{Einstein Summenkonvention:} \\ \delta \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j)$$

virtuell:  $\delta t = 0$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \delta t = 0$$

1. Term aus Summe

$$\sum_i \vec{F}_{a,i} \delta \vec{x}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j$$

$$\text{mit } Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$$

generalisierte  
Kraftkomponenten

Bem.:  $[Q_j] \neq$  Kraft i. A.

aber  $[Q_j q_j] =$  Energie

mit konserativen Kräften

$$\vec{F}_{a,i} = - \vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n); \quad V: \text{Potential}$$

$$= - \sum_j (\vec{\nabla}_i q_j) \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_{a,i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = - \sum_i (\vec{\nabla}_i V) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

2. Term:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i &= \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i,j} m_i \left( \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\
&= \sum_{i=1}^n m_i \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right) \right] \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j
\end{aligned}$$

mit  $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$  kinetische Energie des  $N$ -Teilchen Systems

$$\Rightarrow \left[ \sum_{j=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \right]$$

d'Alembertsche Prinzip

mit holonomen Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \right]$$

$q_j$  unabhängig  
von einander

für konservatives System:

$$V = V(\underline{q}) \text{ unabhängig von } \underline{\dot{q}} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T-V) \right] \delta q_j = 0$$

Def.:  $\left[ L = T - V \right]$

$$= L(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$$

Lagrange-Funktion

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

holonom + konservativ

$$\Rightarrow \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \right)$$

Lagrange - Gleichung

2. Art

Lagrange - Bewegungsgleichung

Vergleich mit Newton:

- Energie (Skalar) vs. Kraft (Vektor)

- keine Zwangskräfte

- invariant unter beliebiger Koordinatentransformation

- Formulierung in rein differentieller Form

Koordinatentransformation:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{\tilde{x}} ; \quad \vec{x} = \vec{x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

Beschleunigung:  $\ddot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}})$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_j}{dt} \quad (\text{Summenkonvention})$$

$$\ddot{x} = \underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial \tilde{x}_n \partial \tilde{x}_j} \frac{d\tilde{x}_n}{dt} \frac{d\tilde{x}_j}{dt}} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_j} \frac{d^2 \tilde{x}_j}{dt^2}$$

zusätzlicher Term  $\rightarrow$  Newtonsche Bewegungsgl.  
nicht form invariant

$$\vec{F}_i = \tilde{F}_j \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \quad \text{allgem. Transformation eines Vektors}$$

Lagrange Gleichung unter Koordinatentransformation

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}, t) = L(q, \dot{q}, t)$$

Skalar: Wert bleibt  
unter Koordinaten-  
trafo gleich  
(z.B. Temperatur)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$1) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j}$$



$$\Rightarrow \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u} \right) \frac{\partial \tilde{q}_u}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u} \frac{\partial \dot{q}_u}{\partial q_j}$$

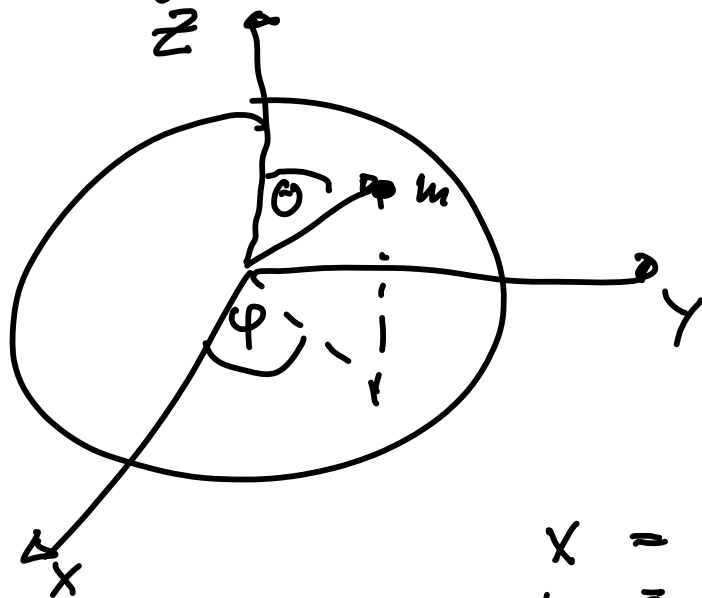
$$2) \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_u} \frac{\partial \tilde{q}_u}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_u} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_u}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 = \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_u} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_u} \right)}_{=0} \frac{\partial \tilde{q}_u}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$  Lagrange-Gleichung forminvariant unter  
Koordinatentransformation.  $\Rightarrow$

## Anwendungen

1) Teilchen auf Kugeloberfläche im  
Schwerefeld der Erde



Zwangsbedingung: holonom-  
skleronom  
 $r = |\vec{x}| = R$

generalisierte Koordinaten

$\Theta$ : Polarwinkel :  $q_1$

$\varphi$ : Azimut :  $q_2$

$$\begin{aligned} x &= R \sin \Theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \Theta \sin \varphi \\ z &= R \cos \Theta \end{aligned}$$

Kraft:  $\vec{F}_a = -mg \vec{e}_z = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   $q_1, q_2$

LaStange-Funktion:  $L = T - V = L(\Theta, \varphi)$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\Theta}^2 + \sin^2 \Theta \dot{\varphi}^2)$$

$V$  aus generalisierter Kraft:

$$Q_1 = Q_\theta = \frac{\partial V}{\partial \theta} = -mg(-k \sin \theta) = mgk \sin \theta$$

$$Q_2 = Q_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

konservative Kraft:  $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow V(\theta) = -\int d\theta Q_\theta = -mgk \int d\theta \sin \theta = mgk(1 + \cos \theta)$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} k^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgk(1 + \cos \theta)$$

Lagrange-Gleichungen / Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mk^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + mgk \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \text{ ist } \underline{\text{zyklische}} \text{ Koordinate}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mk^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mk^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

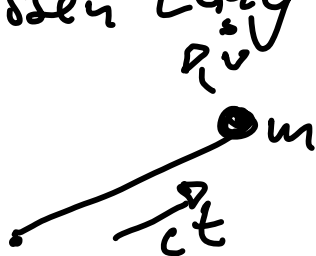
↳ Erhaltungsgröße

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Theta: \ddot{\Theta} - (\cos\Theta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}) \sin\Theta = 0 \\ \varphi: \frac{d}{dt} (\sin^2\Theta \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (\vec{L} = \vec{x} \times \vec{v})$$

Lösung liefert Bahn auf Kugeloberfläche  
(nicht trivial, auf  $\dot{\varphi} = 0$ )

$$\Rightarrow \ddot{\Theta} = \frac{g}{R} \sin\Theta \quad \text{vgl. Pendel} \quad \left. \begin{array}{l} \ddot{\Theta} = -\frac{g}{R} \sin\Theta \\ z = \frac{g}{R} \Theta \end{array} \right)$$

2) Teilchen an masseloser Stange,  
dessen Länge sich linear mit der Zeit ändert



Bewegung nur in  $x$ - $y$ -Ebene  
 $z = 0$  holonom-skleronom

$|\vec{x}| = R + ct$  holonom-rheonom

$c$ : konst. Längenänderung

mit Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos\varphi = (R+ct) \cos\varphi & ; \varphi_1 &= \varphi \\ y(t) &= r(t) \sin\varphi = (R+ct) \sin\varphi \end{aligned}$$

Lagrange-Funktion:  $L = \underline{T} - V$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (c^2 + (R+ct)^2 \dot{\varphi}^2) ; V = 0$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \text{ zyklische Koordinate}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(R+ct)^2 \dot{\varphi} = \text{konst}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 = m(R+ct) ((R+ct) \ddot{\varphi} + 2c \dot{\varphi})$$

Lösung: triviale Lösung  $\dot{\varphi} = 0$

$$\text{aus } \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = h \Rightarrow d\varphi = \frac{h/m}{(R+ct)^2} dt$$

$$\omega \varphi(t) = -\frac{1}{c} \frac{h/m}{(R+ct)}$$

# Verallgemeinerte Potentiale

/ geschwindigkeitsabhängige Potentiale

030

Lagrange-Gleichung für holonome Systeme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

wenn

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

auch für nicht konservative Systeme

mit verallgemeinerte Potential:

$$U = U(q_j, \dot{q}_j)$$

=> Lagrange-Funktion

$$L = T - U$$

=>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

verallgem. Lagrange-Funktion

Bsp.: Teilchen im Elektromagnetischen Feld  
 Kraft:  $\vec{F} = e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right)$  in Gauß-Einheiten

mit Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad ; \quad \vec{j} : \text{Stromdichte}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad \rho : \text{Ladungsdichte}$$

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} ; \vec{A}$  Vektorpotential

Inclusion:  $\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$

Lösung:  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

in Lorentzkraft:  $\vec{F} = e \left( -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right)$

suche  $U(\vec{x}, \vec{v})$  mit  $\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} U - \vec{\nabla} U$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = e \left( -\vec{\nabla} \left( \phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \right)$$

$$\text{mit } \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} (\vec{A} \cdot \vec{v})$$

$$= e \left( -\vec{\nabla} \left( \phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right)$$

$\Rightarrow$  verallgemeinertes Potential

$$U(\vec{x}, \vec{v}) = e \left( \phi - \frac{1}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \right)$$

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e \left( \phi - \frac{1}{c} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right)$$

für  
Lorentzkraft



# Systeme mit Reibung

- meist geschwindigkeitsabhängig

- nicht energieerhaltend

↳  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$  nicht möglich

↳ keine Lagrange-Funktion  $L = T - V$

aber 
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

d'Alembertsches Prinzip  
für holonome Zwangs-  
bedingungen

mit 
$$\vec{F} = \vec{F}^{(k)} + \vec{F}^{(r)}$$

$$\vec{F}^{(k)} = -\vec{\nabla}V \text{ konservativer Anteil}$$

$$\vec{F}^{(r)}$$
 : Reibungskraft

↳  $L = T - V$

⇒ 
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(r)}$$

Beispiel: Reibungskraft  $\propto v$ : Stoches'sche Reibung  
↳ Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

034

$$D = \frac{1}{2} \sum_{e,m} \beta_{em} \dot{q}_e \dot{q}_m ; \beta_{em} \text{ Dissipations-koef. - Tensor}$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right] \text{ modifizierte Lagrange-Gleichung}$$

$$\hookrightarrow Q_j^{(2)} = - \sum_{k=1}^f \beta_{jk} \dot{q}_k$$

Energie dissipation

$$\text{Gesamtenergie: } E = T + V = 2T - L$$

mit skleronomen Zwangsbedingungen:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{e,m} \mu_{em} \dot{q}_e \dot{q}_m$$

Konservatives System (bis auf Reibung)

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad \left( \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \right)$$

$\dot{q}_j$  \* Lagrange-Gleichung

$$\dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = -2D$$

$$\left( \begin{array}{l} \dot{q}_j \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 2D \\ \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} = 2T \end{array} \right)$$

$$2\dot{T} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

$$\text{mit } \dot{L} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \rightarrow \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{L} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

$$\hookrightarrow 2\dot{T} - \dot{L} = -2D$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{E} = -2D}$$

Energie dissipation  
bei Reibung

# Nicht-holonome Systeme

## Lagrange - Multiplikatoren

- Zwangsbedingungen in der Form  $f(\vec{x}, t) = 0$   
nicht möglich

↳ Angabe von unabhängigen generalisierter Koordinaten  
nicht möglich

aber: Zwangsbedingungen in differentieller Form  
unter Umständen möglich, z.B. "rollende Rad"

⇒ Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

Betrachte System mit  $3N$  Freiheitsgraden  
( $N = \#$  Teilchen)

$\tilde{f}$  : Anzahl Zwangsbedingungen, wobei

$f \leq \tilde{f}$  : z.B. in differentieller Form:

$$\sum_{m=1}^{3N} g_{im}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dx_m + h_i(x_1, \dots, x_{3N}, t) dt = 0$$

$$i = 1, \dots, f$$

verwendete Anzahl holonomer Zwangsbed.  $(\tilde{f} - f)$   
 zur Reduktion der Anzahl der Koordinaten:

$$n = 3N - (\tilde{f} - f)$$

↳ verwende  $n$  generalisierte Koordinaten:  $q_1, \dots, q_n$

$$\Rightarrow \vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

aber  $q_j$  nicht unabhängig voneinander

umschreiben der differentiellen Zwangsbedingungen

$$\sum_{m=1}^n a_{im}(q_1, \dots, q_n, t) dq_m + b_i(q_1, \dots, q_n, t) dt = 0$$

Vergleich mit rein holonomem System

$f = 0$  und es existieren  $\tilde{f}$  Gleichungen

$$g_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad i = 1 \dots \tilde{f}$$

$$\Rightarrow dg_i = 0 = \sum_m \frac{\partial g_i}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial g_i}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow a_{im} = \frac{\partial g_i}{\partial q_m} ; b_i = \frac{\partial g_i}{\partial t}$$

partielle Ableitungen  
die zu ausgedrückten

Lagrange-Gleichung für Systeme mit nicht-holonomem  
Zwangsbedingungen?

(aber in differentieller Form)

- für virtuelle Verschiebungen ( $\delta t = 0$ ) gilt:

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \delta q_m = 0 \quad i = 1, \dots, \tilde{f}$$

- mit Lagrange-Multiplikatoren:

$$\lambda_i \quad ; \quad i = 1, \dots, f$$

unabhängig von  $q$   
aber evtl. abhängig  
von  $t$

• verwendet für generelle Optimierungsprobleme mit Neben- (Zwangs-) Bedingungen

• müssen noch bestimmt werden:

$$\sum_{i=1}^f \lambda_i \sum_m^n a_{im} \delta q_m = 0$$

- für konservative Systeme:

$$\sum_{m=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right) \delta q_m = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$$

wg.  $\tilde{f}$  Zwangsbedingungen:  $n - f$

unabh. generalisierte  
Koordinaten

$q_u$  :  $u = 1, \dots, u-f$  unabh.

$q_e$  :  $e = u-f+1, \dots, u$  abhängig

mit  $f$  Bestimmungsgleichungen für  $\lambda_i$   
(frei wählbar)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L}{\partial q_u} - \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{iu} = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} u = u-f+1, \dots \\ u \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{u=1}^u (\dots) \delta q_u = \sum_{u=1}^{u-f} (\dots) \delta q_u + \sum_{u=u-f+1}^u (\dots) \delta q_u = 0$$

wg. 1 Summand mit unabh.  $q_u$  und Bestimmungsgleichung für  $\lambda_i$ :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L}{\partial q_u} = \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{iu}} \quad u = 1, \dots, u$$

Lagrange-Gleichung 1. Art



$n$  Gleichungen  $n + f$  Unbekannte :

$n$  Koordinaten  $q_m$

+  $f$  Multiplikatoren  $\lambda_i$

$f$  Bestimmungsgleichungen gegeben durch  
differentialen Zwangsbedingungen:

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \dot{q}_m + b_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, f$$

physikalische Interpretation  
vgl. holonomes System

der  $\lambda_i$ 's :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m$$

$$\Rightarrow Q_m = \sum_{i=1}^f \lambda_i a_{im} \quad ;$$

Komponenten einer generalisierten  
Kraft : hier gegeben durch  
Zwangskräfte

## Zwangskräfte

für Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

$N$ -Teilchen System

$$f_j(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0 \quad j = 1, \dots, f \quad f: \# \text{ ZB}$$

Verwende keine generalisierte Koordinaten,  
d.h. ZB's nicht zur Reduktion der Freiheitsgrade;

aber: nur  $3N - f$  unabh. Koordinaten

$$df_j = \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot d\vec{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0: \quad \text{reale Verschiebung}$$

für virtuelle Verschiebung ( $\delta t = 0$ )

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \cdot \delta \vec{x}_i = 0$$

mit  $f$  Lagrange-Multiplikatoren

$$\sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_j) \lambda_j \delta \vec{x}_i = 0$$

mit d'Alembert'sches Prinzip:

$$\sum_{i=1}^2 (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^2 \left( \vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i + \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{D}_i f_j) \right) \delta \vec{x}_i = 0$$

wähle  $\lambda_j$  so da  $\beta (\dots) = 0$

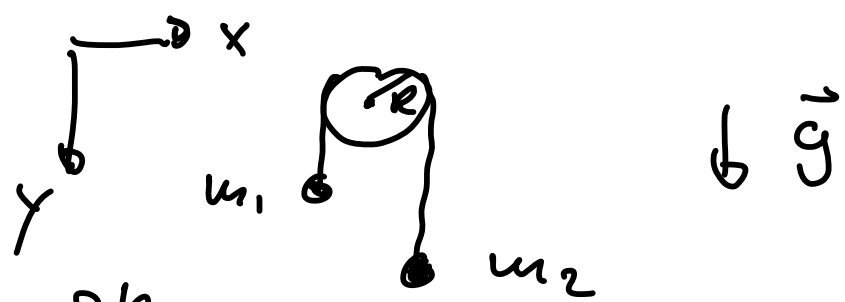
$$\Rightarrow \boxed{m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{D}_i f_j)}$$

vgl. mit Newton  
 $m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{Z}_i$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{Z}_i = \sum_{j=1}^f \lambda_j (\vec{D}_i f_j)} : \text{Zwangskraft}$$

Bestimmung der Zwangskräfte u. U. einfacher mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren

Beispiel: Suche Fadenspannung  
 Atwoodsche Fallmaschine



z.B.

$$z_1 = 0 = z_2; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2R$$

$Y_1 + Y_2 + \pi R = \ell$  : wird hier nicht verwendet

↳ Anzahl generalisierter Koordinaten:  $6 - 4 = 2$

$$q_1 = Y_1; \quad q_2 = Y_2$$

$$f(q_1, q_2) = 0 = q_1 + q_2 + \pi R - \ell$$

$$\hookrightarrow \delta f = \delta q_1 + \delta q_2 = 0$$

$$\hookrightarrow a_{11} = 1 = a_{12}$$

ein Lagrange-Multiplikator:  $\lambda$   $f$   
 aus generalisierter Kraft:  $Q_m = \sum_{i=1}^f \lambda_i Q_{im}$

$$Q_1 = \lambda = Q_2 \quad \underline{\text{Fadenspannung}}$$

$$\text{Lagrange-Funktion: } L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) + g (m_1 q_1 + m_2 q_2)$$

L G6:

$$m_1 \ddot{q}_1 - g m_1 = \lambda$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - g m_2 = \lambda$$

$$+ \text{Zwangsbedingung: } \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0$$

} 3 Gleichungen  
für 3 Unbekannte  
( $q_1, q_2, \lambda$ )

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$\Rightarrow \lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Fadenspannung:  
für  $m_1 \gg m_2$

$$\lambda = -2g m_2$$

für  $m_1 = m_2 \Rightarrow \lambda = -g m$

Beispiel: "rollendes Rad"

System mit nicht-holonomen ZB; aber Darstellung  
in differentieller Form

generalisierte Koordinaten:

$$\begin{array}{cc} x, y & \text{und} & \varphi, \Theta \\ q_1, q_2 & & q_3, q_4 \end{array}$$

Zwangsbedingung Rollen:

$$\dot{x} - R\dot{\varphi}\cos\Theta = 0 \quad ; \quad \dot{y} - R\dot{\varphi}\sin\Theta = 0$$

mit  $\sum_{m=1}^n a_{im} \dot{q}_m = 0$

$n$ : 4 Koordinaten  
 $i = 1, 2$  Zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc} a_{11} = 1 & a_{12} = 0 & a_{13} = -R\cos\Theta & a_{14} = 0 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 1 & a_{23} = -R\sin\Theta & a_{24} = 0 \end{array}$$

2 Lagrange-Multiplikatoren:  $\lambda_1, \lambda_2$   
 4 generalisierte Kräfte ( $Q_m = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{im}$ )

$$Q_1 = \lambda_1 \quad Q_2 = \lambda_2 \quad Q_3 = -\lambda_1 R\cos\Theta - \lambda_2 R\sin\Theta; \quad Q_4 = 0$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\Theta}^2$$

$$I_1 = \frac{1}{2} M R^2 \quad \text{Trägheitsmoment: Drehung um Achse}$$

$$I_2 = \frac{1}{4} M (R^2 + \frac{1}{3} d^2) \quad ; \quad d: \text{Scheibendicke}$$

LGK:

$m\ddot{x} = \lambda_1$ ;  $m\ddot{y} = \lambda_2$ ;  $I_1\ddot{\varphi} = -\lambda_1 R \cos\Theta - \lambda_2 R \sin\Theta$ ;  $I_2\ddot{\Theta} = 0$   
 + 2 Zwangsbedingungen: 6 Gleichungen für 6 Unbekannte

1)  $\Theta = \dot{\Theta}_0 t$  ;  $\ddot{\Theta} = \text{konst}$

2)  $\lambda_1 = mR(\ddot{\varphi} \cos(\dot{\Theta}_0 t) - \dot{\varphi} \dot{\Theta}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t))$

3)  $\lambda_2 = mR(\ddot{\varphi} \sin(\dot{\Theta}_0 t) + \dot{\varphi} \ddot{\Theta}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t))$

4)  $I_1\ddot{\varphi} = -mR^2\ddot{\varphi} \rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \dot{\varphi}_0 = \text{konst.}$

5)  $\dot{x} = R\dot{\varphi}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow x(t) = R \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0} \sin(\dot{\Theta}_0 t) + x_0$

6)  $\dot{y} = R\dot{\varphi}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t) \rightarrow y(t) = -R \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\Theta}_0} \cos(\dot{\Theta}_0 t) + y_0$

Zwangskräfte:

$$Q_1 = -mR\dot{\varphi}_0 \dot{\Theta}_0 \sin(\dot{\Theta}_0 t); \quad Q_2 = mR\dot{\varphi}_0 \ddot{\Theta}_0 \cos(\dot{\Theta}_0 t)$$

haben kein in der "Spur"  
 $Q_3 = 0 = Q_4$

# Hamiltonsche Prinzip / Variationsprinzip

048

bisher: d'Alembert-Prinzip: Differentialprinzip  
↳ Ableitung der Lagrange-Gleichungen  
(Bewegungsgleichungen) durch virtuelle  
Umrichtungen

Hamilton-Prinzip: Integrationsprinzip

Bestimmung der Bewegungsgleichungen durch  
Variation aller möglichen Bahnen + Optimierung  
(Extremwertbestimmung)

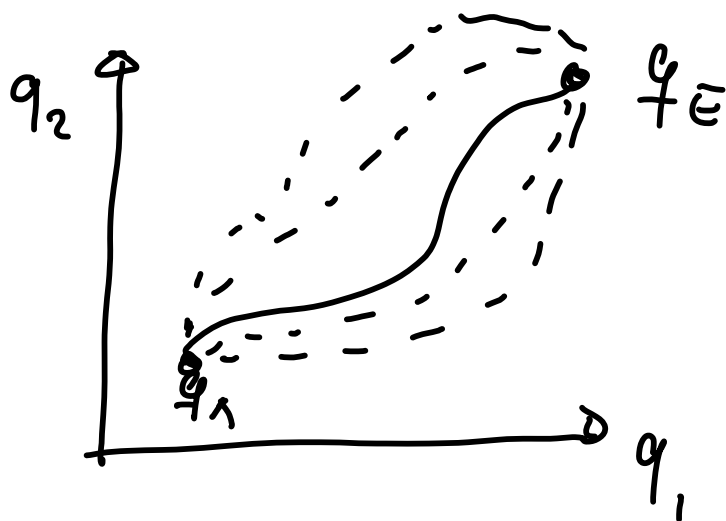
betrachte Bahnen im  $\mathbb{R}^n$

mit  $q = (q_1, \dots, q_n)$  Konfigurationsvektor

Bahnen  $t_A \leq t \leq t_E$ ;  $t \mapsto (q_1(t), \dots, q_n(t))$

mit Randwerten  $q(t_A) = q_A$ ;  $q(t_E) = q_E$





mit der Funktion :  $L = L(q(t); \dot{q}(t), t)$

allgemein :  $q(t)$  beliebige Funktionen  $= L(t)$

$\dot{q}(t)$  "Änderungsrate" von  $q(t)$

und

$$S[L] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t)$$

hier : Wirkung,  
Wirkungsfunktional

Funktional (hier  
Abb von Funktionen in  $\mathbb{R}$ ,  
allgem. : Abb. von  
Funktionen auf Funktionen)

## => Hamiltonsches Prinzip

Die Bewegung eines Systems erfolgt entlang einer Bahnkurve im Konfigurationsraum, die  $S[L]$  stationär macht.

auch: Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\boxed{\delta S = 0} \rightarrow \text{Variationstechnik}$$

$S$ : stationär / extremal

Möglichkeit 1

betrachte Bahnen mit kleiner Variation um  
Extremal-Bahn:

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0(t) + \alpha \underline{s}(t) = \underline{q}(t, \alpha)$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{q}}(t, \alpha) = \dot{\underline{q}}_0(t) + \alpha \dot{\underline{s}}(t)$$

mit Randbedingungen:  $\underline{s}(t_*) = 0 = \underline{s}(t_e)$

$$\rightarrow L = L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha))$$

$$\rightarrow S(\alpha) = \int_{t_A}^{t_E} dt L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha))$$

$$S: \text{stationär} \quad : \quad \delta S = \left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_A}^{t_E} dt \left[ (\underline{\partial}_q L) \cdot \underline{s} + (\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \cdot \underline{\dot{s}} \right]$$

$$\text{p. I} \quad = \int_{t_A}^{t_E} dt \left[ (\underline{\partial}_q L) \underline{s} - \frac{d}{dt} (\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \underline{s} \right] + \underbrace{(\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \cdot \underline{s}}_{=0} \Big|_{t_A}^{t_E}$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \left[ (\underline{\partial}_q L) - \frac{d}{dt} (\underline{\partial}_{\dot{q}} L) \right] \cdot \underline{s}$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

Randterm

$$\Rightarrow \left[ \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) - \nabla_q L = 0 \right]$$

Euler-Gleichung der Variationsrechnung  
+ Mechanik

↳ Euler-Lagrange-Gleichungen

(ELG oder ELDG)

Möglichkeit 2

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} L dt = \int_{t_A}^{t_E} \delta L dt$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} \left[ (\nabla_q L) \delta q + (\nabla_{\dot{q}} L) \delta \dot{q} \right] ; \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$$

$$\stackrel{\text{sp. I}}{=} \int_{t_A}^{t_E} \left[ (\nabla_q L) \delta q - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) \delta q \right] + (\nabla_{\dot{q}} L) \delta q \Big|_{t_A}^{t_E}$$

$\leftarrow = 0$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \underbrace{\left[ (\nabla_q L) - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L) \right]}_{=0} \delta q$$

wg. unabhängig von  $\delta q$

$\Rightarrow$  ELG

Vergleich mit d'Alembert Prinzip

d'Alembert Prinzip :  $\sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$

mit  $\ddot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i) - \dot{\vec{x}}_i \delta \dot{\vec{x}}_i = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i) - \frac{1}{2} \delta \dot{\vec{x}}_i^2$

Integration

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i (\vec{F}_{a,i} - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \delta \vec{x}_i = 0$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i \left( \underbrace{\vec{F}_{a,i} \cdot \delta \vec{x}_i}_{(1)} - \underbrace{\frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i)}_{(2)} + \underbrace{\frac{m_i}{2} \delta \dot{\vec{x}}_i^2}_{(3)} \right)$$

$$\textcircled{1} \quad \sum_i \vec{F}_{e_i} \delta \vec{x}_i = \sum_j Q_j \delta q_j = - \sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j = - \delta U$$

für konservativ  
e System

$$\textcircled{2} \quad \int_{t_A}^{t_E} dt \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \delta \vec{x}_i \Big|_{t_A}^{t_E}$$

= 0 Start- und Endpunkte  
werden nicht variiert

$$\textcircled{3} \quad \sum_i \frac{m_i}{2} \delta \dot{\vec{x}}_i^2 = \delta T \quad T: \text{kinetische Energie}$$

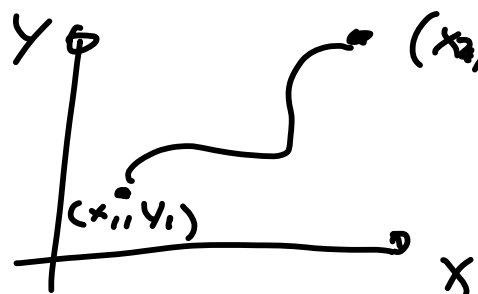
$$\Rightarrow 0 = \int_{t_A}^{t_E} dt (\delta T - \delta U) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt (T - U) = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt L$$

$\Rightarrow L$  : Lagrange - Funktion

$\Rightarrow$  d'Alembert'sches Prinzip ist äquivalent zu  
Hamilton'schen Prinzip

# Variationsrechnung Beispiele

1) Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene



Kurve:  $y = y(x)$  gesucht  
mit Parameter  $x$

infinitesimales Wegsegment:  $ds$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\text{Wegstrecke: } \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\Rightarrow L = L(y, y') \stackrel{\text{hier}}{=} L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\Rightarrow \text{Euler-Lagrange-Gleichungen: } \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} y' \right)$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } y' = \text{const.} \Rightarrow y(x) = ax + b$$

Gerade

2) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf  
Kugeloberfläche

Koordinaten:  $\Theta, \varphi$  ;  $R = \text{const.}$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= R^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2)$$

und  $t$ : beliebiger Parameter; z.B. Zeit :  $\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt}$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt R (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)^{1/2}$$

$$\delta S = 0 = \int dt \frac{1}{2} R (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)^{-1/2} \delta (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2)$$

( $\rightarrow$  Geodätengleichung)

betrachte  $\tilde{L} = \dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \dot{\varphi}^2 = L(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\varphi})$

$$\Rightarrow \text{EGL: } \left. \begin{array}{l} \Theta: \ddot{\Theta} = \sin\Theta \cos\Theta \dot{\varphi}^2 \\ \varphi: \ddot{\varphi} = -2 \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta} \dot{\Theta} \dot{\varphi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } \Theta = \pi/2 \\ \omega \ddot{\varphi} = 0 \\ \omega \dot{\varphi} = \text{const.} \end{array}$$



Bemerkung: unterschiedliche Lagrange-Funktionen

z.B. Kugeloberfläche:

$$ds = R d\theta \sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'} \quad ; \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta}$$

$\Rightarrow L(\varphi', \theta)$  hier:  $\theta$  (Integrations)parameter  $\stackrel{!}{=} \text{"Zeit"}$

$$ds = R d\varphi \sqrt{\theta' + \sin^2 \theta}$$

$\Rightarrow L(\theta, \theta')$  : ohne "Zeit"

Geodätengleichung (= extremale Bahnen in beliebiger Geometrie)

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j = g_{ij} dx_i dx_j \quad (\text{Summenkonvention})$$

$x_i$  : beliebige Koordinaten

$g_{ij}$  : Metrik, metrischer Tensor  
als Matrix darstellbar

z.B.  $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$  ;  $\underline{x} = (r, \theta, \varphi)$

$$\Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j} \quad ; \quad t : \text{beliebiger Parameter}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} (g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j)^{-1/2} \delta (g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} ( \dots )^{-1/2} \left[ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_u} \delta x_u \dot{x}_i \dot{x}_j + \underbrace{g_{ij} \delta (\dot{x}_i \dot{x}_j)}_{\frac{\partial \dot{x}_i \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_u} \delta \dot{x}_u} \right]$$

$\frac{\partial \dot{x}_i \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_u} \delta \dot{x}_u$   
 $\uparrow$   
 $\frac{d}{dt} \delta x_u$

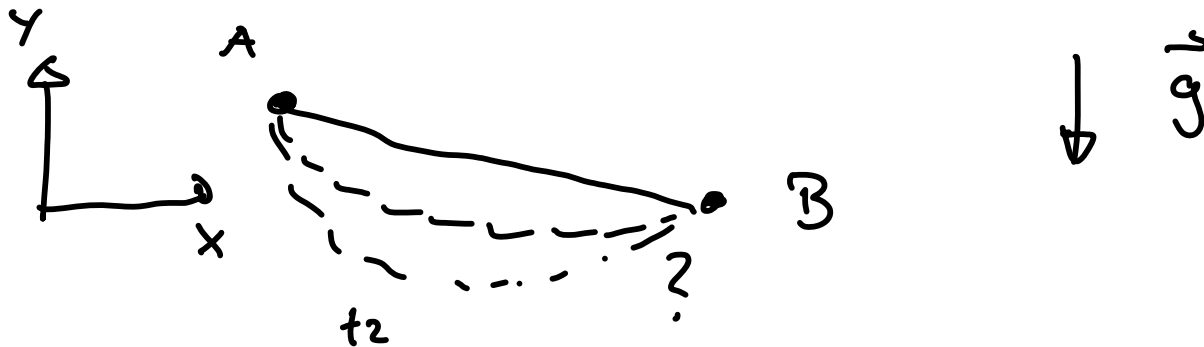
part. Integration

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} ( \dots )^{-1/2} \left[ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_u} \dot{x}_i \dot{x}_j - 2 \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{x}_j) \right] \delta x_u$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{x}_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_u} \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 \right] \text{ Geodäten-Gleichung}$$

Bewegungsgleichung für Teilchen aber auch Licht  
in gegebener Geometrie (z.B. Planetenbahnen,  
Lichtbeugung)

Brachistochronenproblem  
(gr. brachyistos = kürzeste, chronos = Zeit)  
schnellster Weg im Schwerfeld der Erde



$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \quad \rightarrow \quad \text{extremal: } \delta S = 0$$

aus Energieerhaltung

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g y = m g h$$

$$A: (0, h) ; B: (x_B, 0)$$

$$\Rightarrow v(y) = \sqrt{2g(h-y)}$$

$$\text{mit } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$S = \int_0^{x_B} dx \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} \Rightarrow \text{Lagrange-Funktion:}$$

$$L(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

$$\text{ELG: } \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(h-y)}(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g(h-y)}(1+y'^2)^{3/2}} \left[ \frac{1}{2} \frac{y'^2}{2g(h-y)} + \frac{y''}{1+y'^2} \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(h-y)}} \cdot \frac{1}{h-y}$$

$$\Rightarrow \boxed{2(h-y)y'' = 1+y'^2} \quad \text{Euler DGL}$$

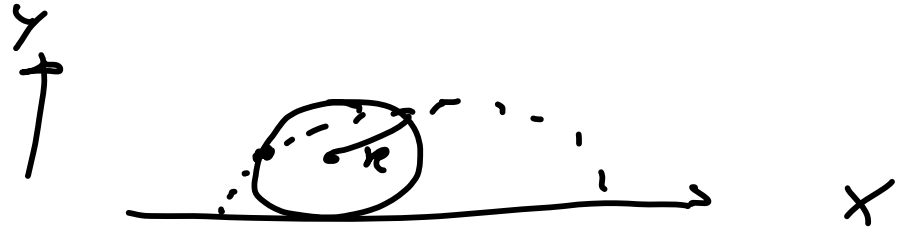
$$\text{Lösung: } \frac{d}{dx} \left( (h-y)(1+y'^2) \right) = 0$$

$$\Rightarrow (h-y)(1+y'^2) = a = \text{const.}$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{a-(h-y)}{h-y} = \frac{a-\tilde{y}}{\tilde{y}} \quad ; \quad \tilde{y} = h-y$$

Lösung: Teil einer Zykloidenbahn:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2R-y}{y}$$



$$x = R(\varphi + \sin\varphi)$$

$$y = R(1 + \cos\varphi)$$

Bemerkung: wenn  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$   $t =$  Parameter zur Beschreibung des Problems (s.o.  $t = x$ )

$$\Rightarrow \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{const} \right]$$

Bsp. kürzeste Strecke in der Ebene:

$$ds = dx \sqrt{1+y'^2} \rightarrow L(y') \text{ bzw. } \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\text{aus } y' \frac{\partial L}{\partial y'} = L = \text{const} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\text{Lösung } \Rightarrow y(x) = ax + b$$

# Variationsrechnung mit Nebenbedingung

Hamiltonsche Prinzip  $\Leftrightarrow$  Lagrange-GL. 1. Art

betrachte System mit  $f$  nicht-holonomen Zwangsbedingungen die sich in differentieller Form darstellen lassen:

$$\sum_{m=1}^n a_{im}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_m + b_i = 0 \quad i=1, \dots, f$$

mit Hamiltonschen Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

$$\int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m = 0$$

$q_m$ 's nicht unabh. voneinander  $\rightarrow (\dots) \neq 0$

mit HP: Endpunkte bleiben unverändert:  $\delta t = 0$

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \delta q_m = 0$$

mit Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_i$ :  $\int dt \sum a_{im} \lambda_i = 0$

$$\Rightarrow \int_{t_A}^{t_B} dt \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^f a_{im} \lambda_i \right) \delta q_m = 0$$

wähle  $\lambda_i$  so daß  $(\dots) = 0$

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^f a_{im} \lambda_i \right) \quad \text{Lagrange-Gl. 1. Art}$$

$n$  Gleichungen ( $q_m$ ) für  $n+f$  Unbekannte  
 +  $f$  Gleichungen aus Zwangsbedingungen

betrachte Systeme mit Nebenbedingungen bzw.  
 holonome Zwangsbedingungen

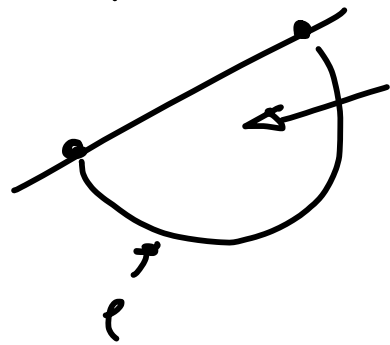
$$g_i(\underline{q}, t) = 0 \Rightarrow dg_i = 0 \Rightarrow a_{im} = \frac{\partial g_i}{\partial q_m}$$

$\Rightarrow$  modifizierte Grundfunktion bzw. mod. Lagrange-Funktion

$$\tilde{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + \sum_{i=1}^f \lambda_i g_i(\underline{q}, t)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_m} = 0 \right)$$

Bsp. Isoperimetrisches Problem



max. Fläche?

Fläche

$$F = \int_{x_1}^{x_2} dx y \quad ; \quad y = y(x)$$

$$L = L(y)$$

Nebenbedingung:  $l = \int_{p_1}^{p_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_g$

$$\Rightarrow \tilde{L} = y + \lambda \sqrt{1+y'^2} = L(y, y')$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{L} - y' \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'} = \text{const} = h$$

Lösung:  $x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - \sqrt{\lambda^2 - h^2})^2 + (y - h)^2 = \lambda^2$

Kreisbogen mit  $x_2 = 2\sqrt{\lambda^2 - h^2}$



- Variationsrechnung mit Nebenbedingung

allgemein:  $t \in \mathbb{R}$

$$Q = \int_{t_k}^{t_E} dt G(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \text{const.}$$

(z.B. Isoperimetrische Probleme, "gleicher Umfang")

mit modifizierter Grundfunktion / modifizierte Lagrange-Funktion

$$\tilde{L} = L + \sum_{i=1}^f \lambda_i G_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \quad ; f: \text{Anzahl der Nebenbed.}$$

⇒ Lösung des Problem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \underline{\dot{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \underline{q}} = 0$$

Euler-Gleichung mit modifizierter Grundfunktion

$n$  - Gleichungen ( $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ) für  $n+f$  Unbekannte ( $\lambda_i : i = 1 \dots f$ ) + Nebenbedingungen

# Erhaltungssätze / Noether Theorem

066

allgemein mechanische Systeme

Änderung von  $\underline{q}$  und  $\underline{\dot{q}}$

mit  $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ;  $\underline{\dot{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ ;  $2n$  Größen

## Integral der Bewegung / Bewegungsintegral

$$I_n = \bar{I}_n(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = C_n = \text{konstant}$$

entlang Trajektorie, die durch ELG (Newton'schen Bewegungsgleichungen) bestimmt ist.

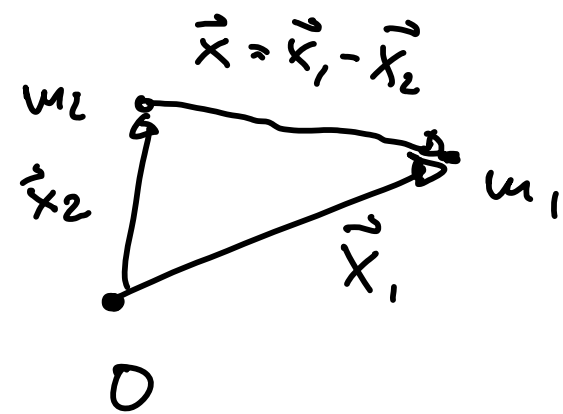
Bsp.: zyklische Koordinate  $\rightarrow \bar{I}_n$

$$\text{zyklische Koordinate: } \frac{\partial L}{\partial q_n} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{I}_n; \bar{I}_n = \text{const.}$$

abhängig von der Wahl des Koordinatensystems  
 $\hookrightarrow$  wähle Koordinatensystem, so daß  $\bar{I}_n$ 's einfach gefunden werden können

anschaulich: Kepler-Problem / 2-Körper-Problem



Potential nur von Abstand abhängig:  $V = V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$

mit Gesamtmasse:  $M = m_1 + m_2$

reduzierte Masse:  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Schwerpunkt:  $\vec{k} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2) = (X, Y, Z)$

relative Koordinate:  $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = r \begin{pmatrix} \sin\Theta \cos\varphi \\ \sin\Theta \sin\varphi \\ \cos\Theta \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3)$

$(r, \Theta, \varphi) = (q_4, q_5, q_6)$

$$\Rightarrow L = \frac{M}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{\mu}{2} (\dot{q}_4^2 + q_4^2 (\dot{q}_5^2 + \sin^2 q_5 \dot{q}_6^2)) - V(q_4)$$

zyklische Koordinaten:  $q_1, q_2, q_3, q_6$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = M \dot{q}_1 = M \dot{x} = \text{const} = \bar{I}_1$$

$$p_2 = M \dot{q}_2 = M \dot{y}; \quad p_3 = M \dot{q}_3 = M \dot{z}$$

$\rightarrow$  Impulserhaltung des Schwerpunkts

$$p_6 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_6} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = I_c \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung}$$

$p_i$ 's : generalisierte Impulse

vgl.: in kartesischen Koordinaten

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

$\Rightarrow$  keine zyklische Koordinate

### Noether Theorem

Frage nach "Symmetrien" eines Systems und

Zusammenhang mit Erhaltungssätzen

betrachte zyklische Koordinate:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_u} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_u} = 0 \Rightarrow p_u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_u} = \text{const.}$$

Interpretation : zyklische Koordinate

$L(q, \dot{q}, t)$  ist invariant unter Koordinatentransformation

$$q_k \rightarrow Q_k(\lambda) = q_k + \lambda$$

Translation  $\rightarrow$  Symmetrie (entlang Richtung  $q_k$ )

$$\text{und } Q_j(\lambda) = q_j \text{ für } j \neq k$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{Q}} = \underline{\dot{q}}$$

$$\Rightarrow L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) \Leftrightarrow \frac{\partial L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t)}{\partial \lambda} = 0$$

Verallgemeinerung : beliebige Koordinatentransformation

$$Q_i(\lambda) = Q_i(q, t) ; \lambda \in \mathbb{R} ; \text{ d.h. einparametrische Schar von Koordinatentransfo}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_i(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \quad i = 1 \dots n$$

$$\text{mit } Q_i(0) = q_i ; \dot{Q}_i(0) = \dot{q}_i \quad \text{für } \lambda = 0 \text{ sind } Q_i \text{ und } q_i \text{ identisch}$$

Def.: Transformation ist Symmetrie - Transformation

von  $L = L(q, \dot{q}, t)$  falls

$$\left. \frac{\partial L(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0$$

d.h.  $L$  ist invariant unter einparametrischen Koordinatentransformation

Bsp.: 1) zylindrische Koordinate

2) Drehung in Ebene

$$X(\lambda) = x \cos \lambda + y \sin \lambda \quad \rightarrow \quad \dot{X} = -x \sin \lambda + y \cos \lambda$$

$$Y(\lambda) = y \cos \lambda - x \sin \lambda \quad \dot{Y} = -y \sin \lambda - x \cos \lambda$$

mit  $L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r) \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2$

$$= \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - V(\rho) \quad ; \quad \rho^2 = X^2 + Y^2$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial L(X, \dot{X}, Y, \dot{Y})}{\partial \lambda} = 0$$

hier: keine Abhängigkeit von  $\lambda$

# Noether Theorem

071

sei  $L$  invariant unter Symmetrietransformationen  
dann ist  $I$  Konstante der Bewegung

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\lambda=0}$$

Beweis:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

(gilt für einparametrische Symmetrietransf.)

mit ELG:  $\partial L / \partial q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{dt} I \Rightarrow I \text{ konstante der Bewegung}$$

Bsp. : 1) zylindrische Koordinate

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} = \begin{cases} 0 & i \neq h \\ 1 & i = h \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \sum_i \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = p_h = \text{const.}$$

2) Drehung

$$\left. \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = Y \quad ; \quad \left. \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = -X$$

$$I = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = y m \dot{x} - x m \dot{y}$$

$$= -m (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})_z = -L_z \quad \begin{array}{l} z\text{-komponente} \\ \text{Drehimpuls} \end{array}$$

Allgemein: Homogenität des Raums:

Ursprung nicht ausgezeichnet

→ Symmetrie transformation möglich

hier: Translation

$$\vec{x}_i \rightarrow \vec{Q}_i = \vec{x}_i + \lambda \vec{u} \quad ; \quad \vec{u} \text{ beliebige Richtung}$$



z.B. N-Körper - Wechselwirkung nur abhängig von Abständen  $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$ :

$$V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) = V(|\vec{Q}_i - \vec{Q}_j|)$$

Noether - Konstante / Noether - Ladung:

$$\frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} = \vec{h} \quad ; \quad T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \dot{\vec{x}}_i^2$$

$$\vec{I} = \sum_i^N \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \Big|_{\lambda=0} = \sum_i^N \vec{h} \cdot (m_i \dot{\vec{x}}_i)$$

$\Rightarrow \vec{P} = \sum_i^N m_i \dot{\vec{x}}_i$  Gesamt linear - Impuls  
= Erhaltungsgröße

$\vec{h} = \frac{1}{M} \sum_i^N m_i \dot{\vec{x}}_i$  Schwerpunkt :  $\ddot{\vec{h}} = 0$

• Homogenität des Kerns

$\Leftrightarrow$  Gesamtimpulserhaltung

$\Leftrightarrow$  System (L) translationsinvariant  
(= Symmetrietransformation)

- Isotropie des Raums

$\hookrightarrow L$  invariant unter Drehung:  $\vec{Q}_i = D \vec{x}_i$

$D$ : Drehmatrix:  $D = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  hier: um  $z$ -Achse

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \Big|_{\lambda=0}; \quad \frac{\partial D}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i (-y_i \dot{x}_i + x_i \dot{y}_i) = \sum_i L_{z,i}$$

$= L_z$   $z$ -Komponente des Gesamtdrehimpuls  
 $\rightarrow$  erhalten

Drehrichtung beliebig  $\Rightarrow \vec{L}$  Gesamtdrehimpuls erhalten

- Isotropie des Raums

$\Leftrightarrow$  Gesamtdrehimpulserhaltung

$\Leftrightarrow$  System invariant unter Drehung  
 (= Symmetrie-Transformation)

- Homogenität der Zeit

betrachte  $\underline{q}(t)$  : Lösung der ELG

mit  $\underline{q}(t_A) = \underline{q}_A$  und  $\underline{q}(t_E) = \underline{q}_E$

System "zeitlich homogen": invariant unter  
Zeittranslation:  $t \rightarrow t + \Delta t$

↳  $\underline{q}(t_A + \Delta t) = \underline{q}_A$  ;  $\underline{q}(t_E + \Delta t) = \underline{q}_E$

⇒  $L$  kann nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängig sein,  
da  $\underline{q}(t)$  aus  $L$  gewonnen wird:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L}$$

Konstante entlang

ELG - Bahn

Integral der Bewegung

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H &= \sum_i \left( \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \dot{q}_i \right) \\ &= \sum_i \dot{q}_i \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)}_{ELG = 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H = \text{const}$$

$H = ?$  Lagrange-Funktion:  $L = T - V$   
 + skleronome Zwangsbedingungen  
 + konservativ

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mu_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\text{da } \dot{\vec{x}} = \sum_i \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \quad \text{mit } \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = 0$$

konservativ:  $V = V(\underline{q})$

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

$$H = 2T - L = T + V \quad \text{Gesamtenergie}$$

Eichtransformation

$$L \rightarrow \tilde{L} = \alpha L + \frac{d}{dt} f(\underline{q}, t) \quad ; \alpha = \text{const}$$

$\tilde{L}$  erfüllt gleiche ELG wie  $L = L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$

$f = f(\underline{q}, t)$  : Eichfunktion

•  $\tilde{L} = \alpha L$  offensichtlich, da ELG linear in  $L$

•  $\tilde{L} = L + \frac{d}{dt} f(\underline{q}, t)$

aus Variationsprinzip:  $\delta S = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt L = 0$

$$\delta \tilde{S} = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt \frac{d}{dt} f = \delta [f(\underline{q}_E, t_E) - f(\underline{q}_A, t_A)] = 0$$

keine Variation

aus ELG:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{d}{dt} f \right) - \frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{dt} f \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q} - \dot{q} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t} \\
 &= \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \dot{q} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t} = 0 \\
 \Rightarrow & \left| \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = 0 \right.
 \end{aligned}$$

„Physik“ unabhängig von Eichtransformation

Symmetrie - Transformation

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) &= L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) + \frac{d}{dt} f(\underline{Q}, t) \\
 &= L(\underline{q}(\underline{Q}, t), \underline{\dot{q}}(\underline{Q}, t), t)
 \end{aligned}$$

$\underline{Q}_i = \underline{Q}_i(\underline{q}, t, \lambda)$  einparametrische Transformation

=> Noether - Konstante / Ladung

$$J(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i(\underline{Q}, t)}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\lambda=0} - \frac{\partial f(\underline{Q}, t)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$$

$\frac{d}{dt} J = 0$

symmetrie-Transformation:  $\frac{\partial L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0$

=>  $0 = \frac{\partial L(q(\underline{Q}, t), \dot{q}(\underline{Q}, t), t)}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{d}{dt} f(\underline{Q}, t) \quad \text{bei: } \lambda=0$

$= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q(\underline{Q}, t)}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \underline{Q}} \frac{d}{dt} f(\underline{Q}, t) \right)$   
 siehe Noether-Theorem ELG + Eichfunktion

$= \dots - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \underline{Q}} \left( \frac{\partial f}{\partial \underline{Q}} \dot{Q} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right)$

$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \underline{Q}} \frac{\partial f}{\partial \underline{Q}} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial q(\mathbf{q}, t)}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial f(\mathbf{q}, t)}{\partial \lambda} \right] \Bigg|_{\lambda=0}$$

Bsp. Galilei-Transformation  
im kräftefreien Fall

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}(\lambda)t \quad ; \quad \text{mit } \vec{v}(0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 1$$

$$L'(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) = L(\vec{x}(\vec{x}', t), \dot{\vec{x}}(\vec{x}', t), t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}'^2$$

$$= L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) + \frac{d}{dt} f(\vec{x}', t)$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{\vec{x}}' - \vec{v})^2 = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}'^2 + \underbrace{\frac{m}{2} \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{v} - 2 \dot{\vec{x}}')}_{\frac{d}{dt} f(\vec{x}', t)}$$

$$\hookrightarrow f(\vec{x}', t) = \frac{m}{2} \vec{v}(\vec{v} \cdot t - 2 \dot{\vec{x}}')$$

Erhaltungsgröße / Noether-Ladung

$$\vec{x}(\vec{x}', t) = \vec{x}' - \vec{v}t \quad ; \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} = -t$$



$$\text{mit } J(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} - \left. \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$$

$$= m \dot{\vec{x}} (-t) - (-m \dot{\vec{x}})$$

$$= m(\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}} t)$$

äquivalent zur Bewegungsgleichung:  $\ddot{\vec{x}} = 0$

$$\hookrightarrow \text{Lösung: } \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$\Rightarrow J = m \dot{\vec{x}}_0$$

Bemerkung:

aus Symmetrietransformation folgt Erhaltungsgröße  $(\vec{I}, \vec{\tau})$ :

Noether-Theorem

aber: Erhaltungsgrößen lassen nicht auf notwendige

Symmetrietransformation schließen (z.B. Lenzsche

Vektor:  $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha \vec{e}_r$ ; für  $\vec{F} = \alpha/r^2 \vec{e}_r$

$\hookrightarrow$  keine Periheldrehung)

# Hamilton - Mechanik

Lagrange-Mechanik: gegeben: generalisierten Koordinaten  $q_i$  mit  $i = 1 \dots n$  ( $n$ -dimensionaler Konfigurationsraum  $q$ )

und generalisierte Geschwindigkeiten (Änderung)  $\dot{q}_i$

aber: bei Koordinatentransformation: Geschwindigkeiten fixiert,  
d.h.  $q$  und  $\dot{q}$  nicht unabhängig voneinander.

$\Rightarrow$  suche Formulierung mit "symmetrischen" / gleichberechtigten Größen

mit: größere Klasse von Variablentransformationen, Ausweitung des Formaldimms auf größere Problemlasse (insb. Quantenmechanik, Thermodynamik, Statistik), evtl. einfachere Problemlösung

Bsp.:  $\ddot{x} = \omega^2 x$  neue Variable  $y_{\pm} = \omega x \pm \dot{x}$   
(anstatt  $x, \dot{x}$ )

$$\Rightarrow \dot{y}_{\pm} = \omega \dot{x} \pm \ddot{x} = \omega \dot{x} \pm \omega^2 x = \pm \omega (\omega x \pm \dot{x}) = \pm \omega y_{\pm}$$

$\hookrightarrow$  Lösung  $y_{\pm}(t) = C_{\pm} e^{\pm \omega t}$ ;  $x(t)$  aus Richttransformation

Wichtige Transformationsklasse in der Physik

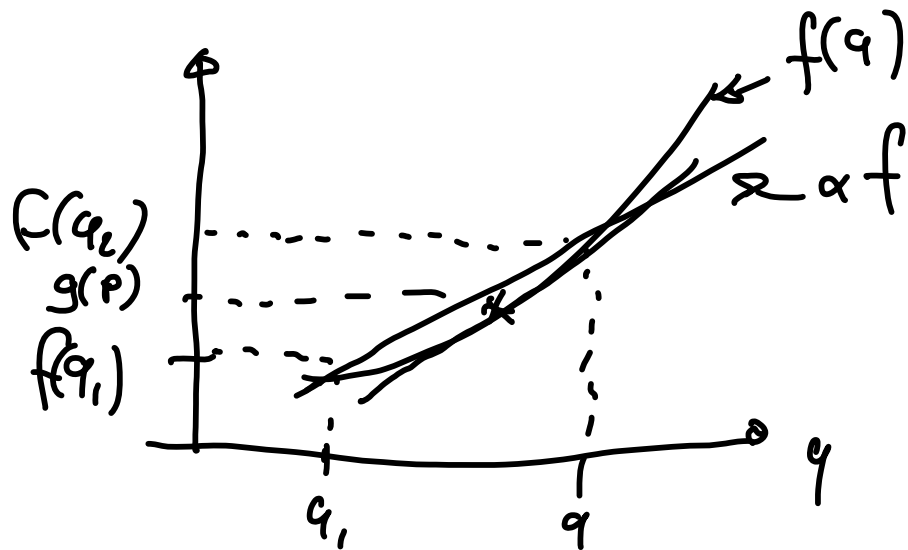
# Legendre-Transformation

(auch: Thermodynamik)

Def:  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konvex falls für alle  $\underline{q}_1, \underline{q}_2 \in \mathbb{R}^n$

und  $0 \leq \alpha \leq 1$  gilt:

$$f(\alpha \underline{q}_1 + (1-\alpha)\underline{q}_2) \leq \alpha f(\underline{q}_1) + (1-\alpha)f(\underline{q}_2)$$



$f$  ist strik konvex  
für  $0 < \alpha < 1$

$$f(\dots) < \alpha f(q_1) + (1-\alpha)f(q_2)$$

Anwendung: konvexe Funktionen können durch Tangentenflächen beschrieben werden mit Parametrisierung der Steigung  $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ :

Tangente :  $\underline{p} \cdot \underline{q} - g(\underline{p})$

Bedingung für Berührung:

$$f(\underline{q}) = \underline{p} \cdot \underline{q} - g(\underline{p}) \quad ; \quad \underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$$

Definition:

$$\underline{p} \mapsto g(\underline{p}) = \underline{p} \cdot \underline{q} - f(\underline{q}) \quad \text{mit } \underline{q} \text{ aus} \\ \underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$$

Legendre-Transformierte von  $f(\underline{q})$

Bemerkungen:

- $\underline{q}, \underline{p}$  korrespondierende Punkte wenn  $\underline{p} = \text{grad}(f(\underline{q}))$
- $g(\underline{p})$  ist konvex, wenn  $f(\underline{q})$  konvex
- Legendre-Transformierte von  $g(\underline{p})$  ist Ursprungsfunktion  $f(\underline{q})$  (Rücktransformation, Rekonstruktion)

Bsp.:  $f(q) = aq^2$  mit  $a > 0$

$g(p) = pq - f(q)$  mit  $p = \frac{df}{dq} = 2aq$

$\hookrightarrow q = \frac{p}{2a}$

$\Rightarrow g(p) = \frac{p^2}{2a} - a\left(\frac{p}{2a}\right)^2 = \frac{p^2}{4a}$

Legendre-Transformierte von  $g(p)$ :

$h(q) = qp - g(p)$  mit  $q = \frac{dg}{dp} = \frac{p}{2a}$

$= aq^2$  Ursprungsfunktion

Wenn  $g(p) = pq - f(q)$  anstatt  $g(p) = f(p)$

z.B.  $f(q) = a(q+c)^2$ ;  $p = \frac{df}{dq} = 2a(q+c)$

$\hookrightarrow q = \frac{p}{2a} - c$

mit  $g(p) = f(p) = \frac{p^2}{4a}$

$\hookrightarrow$  Nichttransformation nicht Ursprungsfunktion

aber  $g(p) = pq - f(q) = \frac{p^2}{4a} - cp \rightarrow$  Nichttransformation  
 $\hookrightarrow f(q)$

# Hamilton Funktion

$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$  : A. konkrete Funktion von  $\underline{\dot{q}}$

↳ Hamilton-Funktion = Legendre-transformierte der  
Lagrange-Funktion bezüglich  $\underline{\dot{q}}$

wobei  $\underline{\dot{q}} \rightarrow \underline{p}$  : generalisierte Impulse, kanonische  
oder konjugierte Impulse

$$\left. \begin{aligned} H(\underline{q}, \underline{p}, t) &= \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \end{aligned} \right\} \text{Hamilton-Funktion}$$

auf Phasenraum  $(\underline{q}, \underline{p})$ ; 2n dim. Raum

$$\underline{p} = \text{grad}_{\underline{\dot{q}}} (L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)) \quad \text{bzw.} \quad \boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

kanonisch-konjugierte Impulse

# Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus

=> Hamilton'sche Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{mit } dH &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i dq_i) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$\text{mit } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$$

$$\Rightarrow dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

mit  $H = H(\underline{q}, \underline{p})$

$$\Rightarrow dH = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

damit

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} & \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Hamilton-Gleichungen = kanonische Gleichungen

das sind  $2n$  Differentialgleichungen 1. Ordnung  
 für  $2 \times n$  kanonischen Variablen  $q_i$  und  $p_i$   
 ( $i = 1 \dots n$ ); diese spannen den  $2n$ -dimensionalen  
Phasenraum auf

Bedeutung von  $H$ ?

wie gezeigt:  $H = T + V$

Gesamtenergie des Systems  
 falls nur skleronome Zwangs-  
 bedingungen vorliegen und  
 System konservativ, d.h.  
 $V = V(\underline{q})$

z.B.  $L(\dot{\underline{x}}, \underline{x}) = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}^2 - V(\underline{x})$

↳  $H = \frac{p^2}{2m} + V(\underline{x})$ : Gesamtenergie mit  $\vec{p} = m \dot{\underline{x}}$   
 Impuls

• zeitliche Änderung von  $H$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$



Poisson-Klammer  $\{H, H\}$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{d.h. wenn } \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow H = \text{Bewegungsintegral}$

- wenn  $q_n$  zyklische Koordinate:

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \dot{p}_n = 0$$

$\Rightarrow p_n = \text{const.}$  d.h. keine Variable

mit  $\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow H$  nicht von  $q_n$  abhängig

$\hookrightarrow$  Elimination von zwei Variablen  $q_n, p_n$

- Bsp

1) Harmonischer Oszillator / Fedpendel

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} ; \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H = p \frac{p}{m} - \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 ; \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = E = \text{konst. Gesamtenergie}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2\epsilon/\mu\omega^2} + \frac{p^2}{2m\epsilon} = 1 \quad \text{Ellipse im Phasenraum}$$

mit  $a = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\mu\omega^2}}$ ;  $b = \sqrt{2m\epsilon}$

kanonische Gleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\mu\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

2) Teilchen im E-M-Feld mit Ladung  $e$   $\phi$ : el. Potential

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - e (\phi(\vec{x}) - \vec{A}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}) \quad ; \quad \vec{A}: \text{Vektorpotential}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \dot{\vec{x}} + e \vec{A} \quad \text{kanonisch-konjugierte Impuls}$$

$\neq$  mechanischer linearer Impuls

$$H = \dot{\vec{x}} \vec{p} - L = \frac{(\vec{p} - e \vec{A})^2}{2m} + e \phi$$

(in QM:  $H \rightarrow \hat{H}$ : Hamilton-Operator)

mit  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{Bewegungsintegral}$

Hinweis:  $H$  in verschiedenen Koordinatensystemen ohne  
Zwangsbedingungen mit  $V = V(\vec{x})$

091

• kartesisch:  $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$  ;  $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$  mechanischer  
linearimpuls

• Zylinderkoordinaten:  $(\rho, \varphi, z)$

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 + p_z^2 \right) + V(\rho, \varphi, z)$$

$$p_\rho = m \dot{\rho} ; p_\varphi = m \rho^2 \dot{\varphi} ; p_z = m \dot{z}$$

$\neq$  mechanische linearimpulse

• Kugelkoordinaten:  $(r, \Theta, \varphi)$

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\Theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} p_\varphi^2 \right) + V(r, \Theta, \varphi)$$

$$p_r = m \dot{r} ; p_\Theta = m r^2 \dot{\Theta} ; p_\varphi = m r^2 \sin^2 \Theta \dot{\varphi}$$

Hamilton-Gleichungen aus Variationsprinzip / Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\text{mit } L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p})$$

mit  $\underline{q}$  und  $\underline{p}$  unabhängige Variablen

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt L = \delta \int_{t_A}^{t_E} dt \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}) \right)$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{i=1}^n \left( \dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

mit  $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$  und  $\int dt p_i \delta \dot{q}_i = - \int dt \dot{p}_i \delta q_i$  p. I.

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_{i=1}^n \left( \delta p_i \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}} \quad \text{und} \quad \boxed{\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

da  $q_i$  und  $p_i$  unabh. kon-  
einander

## Fermatsche Prinzip

093

für konservatives System  $H = T + V = \text{const}$   
gilt (Satz)

$$\Delta S' = \Delta \int_{t_A}^{t_B} dt \, \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} = 0$$

wobei  $\Delta q = \delta q + \dot{q} \Delta t$

hier: unterschiedliche Lauf-  
zeiten der Testbahnen  
möglich

für kreisförmige Bewegung:

$$v = \text{const} \Rightarrow T = \text{const.}$$

$$\text{mit } \Delta S' = 2T \Delta \int_{t_A}^{t_B} dt = 0$$

vgl. virtuelle Umkehrung  
 $\delta t = 0 \Rightarrow$  alle Testbahnen  
haben gleiche Laufzeit

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = 2T$$

$\Rightarrow$  Bahn mit minimaler  
Laufzeit wird  
realisiert

$\Rightarrow$  Fermat'sche Prinzip (vgl. Optik)

für kraftfreie Bewegung:  $v = \text{const}$  (Geschw.)

$$dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow \Delta s' = 0 = \frac{2T}{v} \Delta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

$\Rightarrow$  zugleich extreme (minimale) Wegstrecke

= Geodäte

### Poisson-Klammer

nützliches mathematisches Werkzeug; z.B. kompakte Darstellung der Bewegungsgleichungen

Vorbemerkung: (mechanische) Systeme beschrieben in unterschiedlichen Darstellungsräumen:

1) Konfigurationstraum:  $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ;  $\dim = n$

(generalisierte) Koordinaten

2) Ereignisraum:  $\underline{q} + t = \text{Zeit}$ ;  $\dim = n+1$

(Ereignis-)Bahnen bestimmt durch  $2n$  Anfangsbedingungen, z.B.  $\underline{q}(t_A)$  und  $\underline{q}(t_E)$  oder

$\underline{q}(t_0)$  und  $\underline{\dot{q}}(t_0)$  Orte und Geschwindigkeiten (\*) 095

Lagrange-Formalismus

( $\Rightarrow$ ) Ereignisraum

(\*) + Euler-Lagrange-Gleichungen  
(DGLs 2. Ordnung)

3) Phasenraum:  $(\underline{q}, \underline{p})$  Dim =  $2n$

mit  $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ;  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$

$\underline{p}$  und  $\underline{q}$  gleichberechtigte Variablen

$\underline{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$

Menge aller Punkte, die im Phasenraum  $\underline{\pi}$  durchlaufen werden: Phasenbahn, Phasentrajektorie

z.B. harmonischer Oszillator:

$$\frac{p^2}{2m\epsilon} + \frac{q^2}{2\epsilon/m\omega^2} = 1 \quad \text{Ellipse}$$

4) Zustandsraum:

Phasenraum + Zeit  $t$  ; Dim =  $2n + 1$

$(\underline{\pi}, t)$  : allgemeinstes Darstellungsraum, andere Räume sind Projektionen aus Zustandsraum (z.B. Konfigurationsraum)

Bewegen durch Hamilton Bewegungsgleichungen im Zustandsraum (= Phasentrajektorien)

DBCs 1. Ordnung  $\rightarrow$  bestimmt für alle Zeiten durch

$$\underline{\pi}(t_0) = \underline{\pi}_0$$

Hamilton-Formalismus  $\Leftrightarrow$  Zustandsraum

Poisson-Klammern

zur Formalisierung von Bewegungsgleichungen und Erhaltungsgrößen

betrachte Funktionen auf Zustandsraum (z.B. Hamilton-Funktion)

$$f(\underline{\pi}, t) = f(\underline{q}, \underline{p}, t)$$



$$\text{mit } \frac{d}{dt} f = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{\text{Poisson-Klammer } f \text{ mit } H} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Poisson-Klammer  $f$  mit  $H$ :  $\{f, H\}_{\underline{q}, \underline{p}}$

Def.:  $f(\underline{q}, \underline{p})$  und  $g(\underline{q}, \underline{p})$  Funktionen von  $\underline{q}, \underline{p} \in \mathbb{R}^n$

$$\left\{ f, g \right\}_{\underline{q}, \underline{p}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Poisson-Klammer  $f$  mit  $g$

d.h. zeitliche Änderung von  $f$  entlang Bewegungsbahn  
= Zustandsraum

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\text{Bsp.: } H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{p_i}{m}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x})$$

insbesondere:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad ; \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

Fundamentale Poisson-Klammer

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad \left( \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0 \right)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}$$

Poisson-Klammern unabhängig von der Wahl der kanonischen Variablen:

kanonisch-konjugierte Variablen erfüllen fundamentale Poissonklammern, d. h. wenn Transformation

$$\underline{Q} = \underline{Q}(q, p, t) \quad \text{und} \quad \underline{P} = \underline{P}(q, p, t) \quad \text{mit}$$

$$\tilde{H}(\underline{Q}, \underline{P}) = H(\underline{Q}, \underline{P}) \quad \text{durch einsetzen} \\ = H(q, p)$$

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\} \quad \text{und} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \left| \{F, G\}_{\underline{Q}, \underline{P}} = \{F, G\}_{q, p} \right|$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial F(\underline{Q}, \underline{P})}{\partial q_i} = \sum_j \left( \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right)$$

$$\text{analog} \quad \frac{\partial F(\underline{Q}, \underline{P})}{\partial p_i} = \sum_j \left( \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \{F, G\}_{Q, P} &= \sum_i \left[ \sum_j \left( \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \sum_k \left( \frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \sum_j \left( \frac{\partial G}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial G}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \right] \\
 &= \sum_{q_i} \left( \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial P_k} - \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial Q_k} \right) \underbrace{\sum_i \left( \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right)}_{\delta_{jk}} \\
 &= \sum_j \left( \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial P_j} - \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial Q_j} \right) \\
 &= \{F, G\}_{Q, P}
 \end{aligned}$$

Rechenregeln:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad ; \quad \{f, f\} = 0$$

linear:

$$\{\alpha f_1 + \beta f_2, g\} = \alpha \{f_1, g\} + \beta \{f_2, g\}$$

Produktregel:

$$\{f, gh\} = g \{f, h\} + \{f, g\} h$$

Jacobi - Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

(zyklische Vertauschung)

Konstante der Bewegung

$F(q, p, t)$  Konstante der Bewegung

$$\frac{d}{dt} F = 0 = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \{H, F\} = -\frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{Kriterium für Bewegungsintegral}$$

z.B. Hamilton-Funktion  $H$

$$\frac{d}{dt} H = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

d.h.  $H$  Bewegungsintegral, wenn  $H$  nicht explizit von  $t$  abhängig

bei skleronomen Zwangsbedingungen

$$H = E \quad \text{Gesamtenergie}$$

Poisson'scher Satz:

wenn  $I_1$  und  $I_2$  Integrale der Bewegung, dann

$I_3 = \{I_1, I_2\}$  auch Bewegungsintegral

mit

$$0 = \{H, \{I_1, I_2\}\} + \underbrace{\{I_1, \{I_2, H\}\}}_{-\frac{\partial I_2}{\partial t}} + \underbrace{\{I_2, \{H, I_1\}\}}_{\frac{\partial I_1}{\partial t}}$$

verwende:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$$

$$\Rightarrow 0 = \{H, \{I_1, I_2\}\} + \frac{\partial}{\partial t} \{I_2, I_1\}$$

$$\Rightarrow \{H, \{I_1, I_2\}\} = -\frac{\partial}{\partial t} \{I_1, I_2\}$$

Anmerkung: Ausblick auf QM

Axiomatische Formulierung mit verallgemeinerten Poisson-Klammern

$$\{A, B\} \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad \text{Kommutatoren}$$

$\hat{A}, \hat{B}$ : Operatoren (z.B. Differentialoperatoren, Matrizen)

- Observablen / Meßgrößen: Eigenwerte der Operatoren
- Fundamentalklammern

$$[q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \Rightarrow \text{Heisenbergsche Unschärferelation}$$

$\hbar = h/2\pi$ ;  $h$ : Plancksches Wirkungsquantum

- Hamilton-Funktion  
↳ Hamilton-Operator

- Bewegungsgleichung:  $\frac{d}{dt} \hat{A} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}$

## Hamilton-Jacobi-Theorie

Lösungen des Systems (Differentialgleichungen) durch geeignete Wahl kanonischer Transformation

Lagrange- und Hamilton-Gleichungen sind form-invariant unter Punkttransformation  $\underline{q} \rightarrow \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q})$  und mechanische Eichtransformation:  $\underline{L} \rightarrow \underline{L} + \frac{d}{dt}f$   
 ( $\rightarrow \underline{\tilde{H}} = \underline{H} - \frac{\partial f}{\partial t}$ )

kanonische Phasenraumtransformation

$$\underline{\pi} \rightarrow \underline{\tilde{\pi}} = \underline{\tilde{\pi}}(\underline{\pi}) \quad \text{bzw.} \quad (\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}}) \\ = (\underline{\tilde{q}}(\underline{q}, \underline{p}), \underline{\tilde{p}}(\underline{q}, \underline{p}))$$

kanonisch wenn kanonischen Gleichungen erhalten bleiben:

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \underline{\tilde{H}}}{\partial \tilde{p}_i} \quad ; \quad \dot{\tilde{p}}_i = - \frac{\partial \underline{\tilde{H}}}{\partial \tilde{q}_i}$$



Bemerkung: Bestimmung von  $\tilde{H}$  nicht vorgeschrieben

aber  $\tilde{H} = H(\underline{q}(\tilde{q}, \tilde{p}, t), \underline{p}(\tilde{q}, \tilde{p}, t), t)$

durch Einsetzen: kanonisch im eigentlichen Sinne

Fundamentale Poisson-Klammern erhalten

$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = 0 = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\}$  ;  $\{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}$

Bsp.:

1)  $\tilde{q}_i = -p_i$  und  $\tilde{p}_i = q_i$  "Vertauschung" von  $q$  und  $p$

$\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = H(\tilde{p}, -\tilde{q})$

$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{p}_i}}_{\delta_{ji}} = \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = \dot{\tilde{q}}_i$

analog  $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = -\dot{p}_i$  kanonische Gleichungen bleiben erhalten

→ Bedeutung von  $q$  und  $p$  im Hamilton-Formalismus abstrakt

2) zyklische Koordinaten / Variablen  
 Transformation möglich, sodaß alle Koordinaten  $q$   
 zyklisch?

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \text{const.} \quad i = 1 \dots n$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i(h_1, \dots, h_n) \quad ; \quad h_i = \text{const}$$

$$\hookrightarrow q_i = \text{const.} \quad ; \quad \text{Annahme} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

im Prinzip möglich  $\rightarrow$  Hamilton-Jacobi-Theorie

Erzeugende Funktionen der Transformation

für kanonische Transformation  $(\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}})$  gilt

(Satz)

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} + \frac{d}{dt} \bar{F}_1$$

wobei  $\bar{F}_1 = \bar{F}_1(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t)$

beliebige Funktion der  
 ursprünglichen  $q$  und  
 transformierten  $\tilde{q}$

$\bar{F}_1$  : Erzeugende der Transformation

Beweis:

1) modifiziertes Hamilton-Prinzip erfüllt:

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_B} dt \left( \sum_i \bar{p}_i \dot{\bar{q}}_i - \tilde{H}(\bar{q}, \bar{p}, t) \right)$$

↳ kanonische Gleichungen

- Bestimmung von  $\tilde{H}(\bar{q}, \bar{p}, t)$  aus  $\bar{F}_1$ :

$$d\bar{F}_1 = d\bar{F}_1(q, \bar{q}, t) = \sum_i \left( \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{q}_i} d\bar{q}_i \right) + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial t} dt$$

$$\text{und } d\bar{F}_1 = \sum_i (p_i dq_i - \tilde{p}_i d\tilde{q}_i) + (\tilde{H} - H) dt$$

aus Koeffizientenvergleich:

$$\left. \left\{ p_i = \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} \right\} ; \left\{ \tilde{p}_i = - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \tilde{q}_i} \right\} ; \right\} \tilde{H} = H + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \tilde{H}(\bar{q}, \bar{p}, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial \bar{F}_1(q, \bar{q}, t)}{\partial t}$$

Bemerkung:  $\bar{F}_1$  bestimmt Phasentransformation vollständig

aus  $p_i = p_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow \underline{\tilde{q}} = \underline{\tilde{q}}(\underline{q}, \underline{p}, t)$   
 durch Umkehrung

in  $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t) = -\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \tilde{q}_i}$

$\hookrightarrow \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\underline{q}, \underline{p}, t)$

mit

$$S' = \int_{t_A}^{t_E} dt \left( \sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H}(\underline{q}, \underline{p}, t) \right) = \int_{t_A}^{t_E} dt \left( \sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H}(\underline{q}_i, \underline{p}_i, t) + \frac{d}{dt} \bar{F}_1 \right)$$

$$= \int_{t_A}^{t_E} dt \left( \sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} \right) + \bar{F}_1(\underline{q}_E, \underline{\tilde{q}}(t_E), t_E) - \bar{F}_1(\underline{q}_A, \underline{\tilde{q}}(t_A), t_A)$$

$$\Rightarrow \delta S' = \int_{t_A}^{t_E} dt \left[ \sum_i \left( \dot{\tilde{q}}_i \delta \tilde{p}_i + \tilde{p}_i \delta \dot{\tilde{q}}_i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \delta \tilde{q}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \delta \tilde{p}_i \right) + \delta \left[ \bar{F}_1|_{t_E} - \bar{F}_1|_{t_A} \right] \right]$$

$$\text{mit } \int dt \tilde{p}_i \delta \dot{q}_i = \int dt \tilde{p}_i \frac{d}{dt} \delta q_i = - \int dt \dot{\tilde{p}}_i \delta q_i + \tilde{p}_i \delta q_i \Big|_{t_A}^{t_E}$$

$$\text{beachte: } \delta q_i(t_{A,E}) = 0$$

$$\delta q_i(t_{A,E}) = \tilde{q}_i(q_{A,E}, p(t_{A,E}), t_{A,E})$$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_E} dt \sum_i \left[ \left( \dot{\tilde{q}}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \right) \delta \tilde{p}_i - \left( \dot{\tilde{p}}_i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \right) \delta \tilde{q}_i \right]$$

$$+ \sum_i \underbrace{\left( \tilde{p}_i + \frac{\partial F_i}{\partial \tilde{q}_i} \right)}_{=0} \delta \tilde{q}_i$$

$$; \quad \delta [F_{I,E} - F_{I,A}] = \sum_i \left. \frac{\partial F_i}{\partial \tilde{q}_i} \right|_{t_A}^{t_E} \delta \tilde{q}_i$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \\ \dot{\tilde{p}}_i = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \end{array} \right|$$

d. h. kanonische  
Gleichungen

$\hat{=}$  kanonische  
Transformation

Bsp.: Harmonischer Oszillator

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2$$

$$\left( \begin{array}{l} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{Feder} \\ = \frac{g}{l} \quad \text{Pendel} \end{array} \right.$$

mit  $\bar{F}_1(q, \tilde{q}) = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \cot \tilde{q}$   
(motiviert durch Vereinfachung)

$$p = \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q} = m \omega_0 q \cot \tilde{q}$$

$$\tilde{p} = - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \tilde{q}} = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 \tilde{q}}$$

$$q = \sqrt{\frac{2 \tilde{p}}{m \omega_0}} \sin \tilde{q} ; \quad p = \sqrt{2 \tilde{p} m \omega_0} \cos \tilde{q}$$

$$\text{mit } \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t) = H(q(\tilde{q}, \tilde{p}, t), p(\tilde{q}, \tilde{p}, t), t) + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial t}$$

$$= H(q, p)$$

$$= \tilde{p} \omega_0 \cos^2 \tilde{q} + \tilde{p} \omega_0 \sin^2 \tilde{q}$$

$$= \tilde{p} \omega_0 \quad \text{nur von } \tilde{p} \text{ abhängig}$$

$$\dot{\tilde{p}} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = 0 = \tilde{p} = \tilde{p}_0$$

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = \omega_0 \rightarrow \tilde{q} = \omega_0 t + \tilde{q}_0$$

$$\rightarrow q(t) = \sqrt{\frac{2\tilde{p}_0}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + \tilde{q}_0)$$

$$p(t) = \sqrt{2\tilde{p}_0 m\omega_0} \cos(\omega_0 t + \tilde{q}_0)$$

=> Problem sehr vereinfacht durch passende Transformation

aber: Bestimmung der Erzeugende?

↳ Aufgabe der Hamilton-Jacobi-Theorie

Weitere Erzeugende

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_1(q, \tilde{q}, t)$$

$$\bar{F}_2 = \bar{F}_2(q, \tilde{p}, t)$$

$$\bar{F}_3 = \bar{F}_3(p, \tilde{q}, t)$$

$$\bar{F}_4 = \bar{F}_4(p, \tilde{p}, t)$$

Bestimmung der Erzeugenden  $F_2, F_3, F_4$  durch Legendre-Transformation. 112

$$\underline{F_2 = F_2(q, \tilde{p}, t)}$$

$$F_2(q, \tilde{p}, t) = F_1(q, \dot{q}, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = F_1(q, \tilde{q}, t) + \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{q}_i$$

$$\text{mit } dF_1 = \sum_{i=1}^n (p_i dq_i - \tilde{p}_i d\tilde{q}_i) + (\tilde{H} - H) dt$$

$$dF_2 = dF_1 + \sum_{i=1}^n (\tilde{p}_i d\tilde{q}_i + \tilde{q}_i d\tilde{p}_i) = \sum_{i=1}^n (p_i dq_i + \tilde{q}_i d\tilde{p}_i) + (\tilde{H} - H) dt$$

$$\Rightarrow \left[ p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right] ; \left[ \tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} \right] ; \left[ \tilde{H} - H = \frac{\partial F_2}{\partial t} \right]$$

$F_2$  erzeugt kanonische Transformation

↳ zu zeigen aus modifizierter Hamiltonsches Prinzip:

$$\delta S = 0 = \delta \int dt (\tilde{p} \dot{\tilde{q}} - \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t))$$



$$\boxed{\bar{F}_3 = \bar{F}_3(p, \tilde{q}, t)}$$

$$= \bar{F}_1 - \sum \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} q_i$$

$$\boxed{q_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial p_i}}$$

$$\boxed{p_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \tilde{q}_i}}$$

$$\boxed{\tilde{H} - H = \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial t}}$$

$$\boxed{\bar{F}_4 = \bar{F}_4(p, \tilde{p}, t)}$$

$$= \bar{F}_1 - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} q_i - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \tilde{q}_i} \tilde{q}_i \right)$$

$$= \bar{F}_1 - (\underline{p} \cdot \underline{q} + \tilde{\underline{p}} \cdot \tilde{\underline{q}})$$

$$\Rightarrow \boxed{q_i = -\frac{\partial \bar{F}_4}{\partial p_i}}$$

$$\boxed{\tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial \tilde{p}_i}}$$

$$\boxed{\tilde{H} - H = \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial t}}$$

Zusammenfassung (z.B. Noether's)

	$\tilde{q}$	$\tilde{p}$
$q$	$\bar{F}_1(\underline{q}, \underline{\tilde{q}}, t)$ $p_i = \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_i} ; \tilde{p}_i = -\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \tilde{q}_i}$	$\bar{F}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t)$ $p_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i} ; \tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \tilde{p}_i}$
$p$	$\bar{F}_3(\underline{p}, \underline{\tilde{q}}, t)$ $q_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial p_i} ; \tilde{p}_i = -\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \tilde{q}_i}$	$\bar{F}_4(\underline{p}, \underline{\tilde{p}}, t)$ $q_i = -\frac{\partial \bar{F}_4}{\partial p_i} ; \tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial \tilde{p}_i}$

Bsp.: 1) Punkttransformation

mit  $\bar{F}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t) = \sum_{i=1}^n f_i(\underline{q}, t) \tilde{p}_i$

$\tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = f_i(\underline{q}, t)$

Punkttransformation im Konfigurationsraum

$p_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \tilde{p}_j \rightarrow \tilde{p}_i = \hat{p}_i(\underline{q}, \underline{p}, t)$

Kanonisch konjugierte Impulse durch Richttransformation,

115

z.B. Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = f_r$$

$$\varphi = \arctg(y/x) = f_\varphi$$

$$p_x = \frac{\partial f_r}{\partial x} p_r + \frac{\partial f_\varphi}{\partial x} p_\varphi = \frac{x}{r} p_r - \frac{y}{r^2} p_\varphi$$

$$p_y = \frac{\partial f_r}{\partial y} p_r + \frac{\partial f_\varphi}{\partial y} p_\varphi = \frac{y}{r} p_r + \frac{x}{r^2} p_\varphi$$

$$\omega \quad p_r = \frac{x p_x + y p_y}{r} \quad ; \quad p_\varphi = x p_y - y p_x \quad \text{Drehimpuls}$$

2) mechanische Eichtransformation

mit  $f(q, t)$  Eichfunktion

$$\tilde{H} = H - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{aus} \quad \tilde{L} = L + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\bullet \quad q_i = \tilde{q}_i \quad \text{und} \quad \tilde{p}_i = p_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

Konstruktion der Erzeugenden  
aus Legendre-Transformation:

$$\bar{F}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t) = \sum_{i=1}^n q_i \tilde{p}_i - f(\underline{q}, t)$$

$$\circ \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = q_i \quad \text{und} \quad p_i = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i} = \tilde{p}_i - \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial t} = H - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Phasentransformation kanonisch wenn fundamentale  
Poisson-Klammern erfüllt sind

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = 0 \quad \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0 \quad ; \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}$$

### Hamilton-Jacob-Gleichungen

Motivation: Vereinfachung des Systems (Hamilton-Funktion,  
Differentialgleichungen) durch geeignete Transformation:

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial t} = 0 \quad (*)$$

⇒ Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{q} = \text{const} \\ \dot{\tilde{p}}_i &= - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{p} = \text{const} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}}_i \end{aligned}} \right\} \text{triviale Lösungen der Differentialgleichungen}$$

mögliche Erzeugende:  $\bar{F} = \bar{F}_2 = F_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t)$

(andere Erzeugende auch möglich)

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad ; \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} = \text{const}$$

in (\*)

$$H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung  
Bestimmungsgleichung für Erzeugende  $F_2$

Bemerkungen:

- Hamilton-Jacobi-Gleichung
- nicht-lineare, partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für  $\bar{F}_2$  mit  $n+1$  Variablen  $(q, \dots, q_n, t)$

nicht-linear:  $H$  i. A. quadratische Funktion der Impulse  
1. Ordnung: nur  $\partial \bar{F}_2 / \partial q_i$  und  $\partial \bar{F}_2 / \partial t$  treten auf  $\mathcal{P}$

- mit  $n+1$  Ableitungen 1. Ordnung:  
 $n+1$  Integrationskonstanten:  $C_1, \dots, C_n, C_t$

für Lösung:

$$\bar{F}_2(\underline{q}, \underline{\tilde{p}}, t | C_1, \dots, C_n) + C_t$$

vollständige  
Lösung

aber  $H$  hängt nur von Ableitungen  
von  $\bar{F}_2$  ab  $\rightarrow C_t = 0$  o. B. A.

- konstante Impulse  
 $\underline{\tilde{p}}$ : unbestimmt  
daher möglich  $\tilde{p}_i = C_i$

$\Rightarrow$  vollständige Lösung für  $\bar{F}_2$

$$\bar{F}_2(q, t | \underline{c}) \quad ; \quad \underline{c} = (c_1, \dots, c_n) \text{ Konstanten}$$

- Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung ist die Wirkung  
 $S$  der zugehörigen Hamilton-Funktion

$$\bar{F}_2 = S$$

$$\frac{d}{dt} \bar{F}_2 = \sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i + \tilde{q}_i \dot{\tilde{p}}_i) + \tilde{H} - H$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \quad (\dot{\tilde{p}} = 0 ; \tilde{H} = 0)$$

$$= L$$

$$\Rightarrow \bar{F}_2 = \int dt L = S \quad \text{im Hamilton-Jacobi-Formalismus}$$

$\Rightarrow$  "physikalische  
Bedeutung"

# Lösungsmethode mit der Hamilton-Jacobi-Theorie

1) Hamiltonfunktion  $H = H(\underline{q}, \underline{p}, t)$  aufstellen

2) kanonische Impulse

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad \text{durch partielle Ableitungen ersetzen}$$

3) Lösen der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

$$\bar{F}_2 = S(\underline{q}, t | \underline{c}) ; \quad \underline{c} = (c_1, \dots, c_n) \quad \text{Integrationskonstanten}$$

wobei  $\bar{p} = \underline{c}$  konstante "neue" Impulse

4) Berechnung der generalisierten Koordinaten

$$\tilde{q}_i := \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{p}_i} = \frac{\partial S}{\partial c_i} = \tilde{q}_i(\underline{q}, t | \underline{c}) = \alpha_i = \text{const.}$$

(aus  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$ )

und nach  $\underline{q}$  auflösen

$$\underline{q} = \underline{q}(\tilde{\underline{q}}, t | \underline{c}) = \underline{q}(t | \underline{\alpha}, \underline{c})$$



5) Berechnung der generalisierten Impulse

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q(t | \underline{\alpha}, \underline{c})) = p_i(t | \underline{\alpha}, \underline{c})$$

6) Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt  $t = t_0$

$$q(t_0 | \underline{\alpha}, \underline{c}); \quad p(t_0 | \underline{\alpha}, \underline{c})$$

Liefert  $\tilde{q}_0$  und  $\tilde{p}_0 \rightarrow \underline{\alpha}, \underline{c}$

7) einsetzen in  $q$  und  $p$  liefert vollständige Lösung

$$(q(t), p(t)) = \underline{\pi}(t)$$

Bsp.: Harmonischer Oszillator (1D)

$$1) \quad H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega_0^2 m q^2$$

$$2) \quad p = \partial F_2 / \partial \dot{q} = \partial S / \partial \dot{q}$$

$$H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial \dot{q}} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t}$$

3) Lösung der Hamilton-Jacob-Gleichung  
hier Separationsansatz:

$$S(q, t | \tilde{p}) = W(q | \tilde{p}) + V(t | \tilde{p})$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 = - \frac{\partial V}{\partial t}$$

$W$  und  $V$  sind unabhängig; abh. von unabhängigen Variablen (hier:  $W(q)$ ;  $V(t)$ )

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 = C$$

$$\frac{dV}{dt} = -C$$

zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\rightarrow V(t|C) = -ct + V_0 \quad ; \quad V_0 = 0 \quad \text{o. B. A}$$

$$\frac{dW}{dq} = \sqrt{m^2 \omega_0^2 \left( \frac{2C}{m\omega_0^2} - q^2 \right)}$$

$$W(q|C) = m\omega_0 \int dq \sqrt{\frac{2C}{m\omega_0^2} - q^2}$$

$$= m \omega_0 \left[ \frac{1}{2} q \sqrt{\frac{2c}{m \omega_0^2} - q^2} + \frac{c}{m \omega_0^2} \arcsin \left( q \sqrt{\frac{m \omega_0^2}{2c}} \right) \right]$$

$$\rightarrow S(q, t | c) = m \omega_0 \left[ \frac{1}{2} q \sqrt{\frac{2c}{m \omega_0^2} - q^2} + \frac{c}{m \omega_0^2} \arcsin \left( q \sqrt{\frac{m \omega_0^2}{2c}} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} 4) \quad q^2 &= \frac{\partial S}{\partial p^2} = \frac{\partial S}{\partial c} = \frac{\partial W}{\partial c} + \frac{\partial U}{\partial c} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\omega_0} \int dq \left( \frac{2c}{m \omega_0^2} - q^2 \right)^{-1/2}}_{\frac{1}{\omega_0} \arcsin \left( q \omega_0 \sqrt{\frac{m}{2c}} \right)} - t \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left( q \omega_0 \sqrt{\frac{m}{2c}} \right) - t$$

$$= \alpha = \text{const.} \quad \text{Dimensionen: Zeit}$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{2c}{m\omega_0^2}} \sin(\omega_0(t + \alpha)) = q(t | \alpha, c)$$

$$\begin{aligned} 5) \quad p &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}} = m\omega_0 \sqrt{\frac{2c}{m\omega_0^2} - \dot{q}^2} \\ &= \sqrt{2cm} \cos(\omega_0(t + \alpha)) \\ &= p(t | \alpha, c) \end{aligned}$$

6) Anfangsbedingungen:  $t_0 = 0$ ;  $p_0 = 0$ ;  $q_0 \neq 0$

$$0 = \frac{2c}{m\omega_0^2} - q_0^2 \Rightarrow c = \frac{1}{2} m\omega_0^2 q_0^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 = \bar{E}$$

$\Rightarrow \bar{p} = c = \bar{E}$ : Gesamtenergie

mit  $[\bar{q}] = \text{zeit}$

$\Rightarrow \bar{E}$  und  $t$  sind kanonisch-konjugierte Variablen

(vgl.  $[\bar{E}, t] = i\hbar \hat{=} \text{Heisenbergsche Unschärferelation}$ )

$$\text{mit } \alpha = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \sqrt{\frac{m\omega_0^2 q_0^2 / 2}{\bar{E}}} = \frac{1}{\omega_0} \arcsin(1) = \frac{\pi/2}{\omega_0}$$

7) vollständige Lösung

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\hat{\epsilon}}{m\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t) ; \quad p(t) = -\sqrt{2\hat{\epsilon}m} \sin(\omega_0 t)$$

Bemerkung:

$F_1(q, \tilde{q}) = \frac{1}{2} m \omega_0 q \cot(\tilde{q})$  kann Legendre-Transformation  
aus  $F_2(q, \tilde{p})$  gewonnen werden

Hamiltonsche charakteristische Funktion

Separationssatz für  $F_2$  (in Hamilton-Jacobi-Gleichung)

sich voll, wenn

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H : \text{Integral der Bewegung}$$

$$H\left(\underline{q}, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Hamilton-Jacobi-  
Gleichung

$$\Rightarrow S(\underline{q}, \tilde{p}, t) = W(\underline{q} | \tilde{p}) - Et$$

Separationssatz

$$\Rightarrow H\left(\underline{q}, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = E$$

Gesamtenergie für  
Skleronome Zwangsbed.

$\omega(q/\tilde{p})$ : Hamiltonsche charakteristische Funktion

$\hat{=}$  Erzeugenden einer kanonischen Transformation im  
eigentlichen Sinne mit

$$p_i = \frac{\partial \omega}{\partial q_i} ; \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{p}_i} \quad \text{durch Einsetzen:}$$

$$\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p})$$

Weitere Separation von Variablen

↳ mögliche Problemlösungen, die nur mit dem Hamilton-  
Jacobi-Verfahren möglich sind. z. B. 3 Körper-Problem,  
Zweizentrenproblem;  $A_2^+$  Ion

$$\text{mit } H\left(q_1, \frac{\partial \omega}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial q_n}\right) = \bar{E}$$

wenn  $q_1$  und  $\partial \omega / \partial q_1$  in der Form  $f(q_1, \frac{\partial \omega}{\partial q_1})$

$$\rightarrow H\left(f, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial \omega}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial q_n}\right) = \bar{E}$$

→ möglicher Ansatz

$$\omega(\underline{q} | \tilde{\underline{p}}) = \omega'(q_2 \dots q_n | \tilde{\underline{p}}) + \omega_1(q_1 | \tilde{\underline{p}})$$

$$\Rightarrow f(q_1, \frac{\partial \omega}{\partial q_1}) = C_1 = f(q_1, \frac{d\omega}{dq_1}) \quad \text{gewöhnliche DGL}$$

$$\rightarrow \#(C_1, q_2 \dots q_n, \frac{\partial \omega}{\partial q_2} \dots \frac{\partial \omega}{\partial q_n}) = \bar{E}$$

Idealfall: alle generalisierten Koordinaten und Ableitungen lassen sich separieren

$$\omega = \sum_i \omega_i(q_i | \tilde{\underline{p}})$$

→ Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H_i(q_i, \frac{d\omega}{dq_i} | \tilde{\underline{p}}) = \alpha_i = \tilde{p}_i$$

vollständig separabel in gewöhnliche Differentialgleichungen

← mögliche Wahl

Bsp.: Teilchen im Zentralpotential :  $V(r)$

- Beschreibung mit Kugelkoordinaten, wobei  $\theta = \pi/2$   
 $(r, \theta, \varphi)$

$$\Rightarrow q_r = r ; q_\varphi = \varphi$$

(1)                      (2)

$$\Rightarrow H(r, p_r, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r)$$

$$p_r = m \dot{r} ; p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}$$

$\varphi$ : zyklisch  $\rightarrow p_\varphi = \text{const}$  : Drehimpuls

Ausatz:

$$W = W_r + \alpha_\varphi \varphi$$

Bemerkung:  
 $W = \dots \alpha_u q_u$

wenn  $q_u$   
 zyklisch  
 $\alpha_u = \text{const}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left( \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r) = \hat{E}$$

$$\text{mit } W_r = \int dr \sqrt{2m(\hat{E} - V(r)) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}$$



aus  $S = W - Et$  und  $\frac{\partial S}{\partial p_1} = \tilde{q}_1 = \text{const}$

$\tilde{p}_1$ : unbestimmt: wähle  $\tilde{p}_1 = E \rightarrow \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E} - t = \tilde{q}_0 = t_0$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial E} = t + t_0 = \int \frac{m \, dr}{\sqrt{2m(\tilde{E} - V(r)) - \frac{\alpha_{\tilde{q}_1}^2}{r^2}}}$$

durch Umkehrung:  $r(t)$

bzw.  $\tilde{q}_2 = \text{const} = \frac{\partial S}{\partial p_2} = \frac{\partial W_r}{\partial \alpha_\varphi} + \varphi = \varphi_0$

(wähle  $\tilde{p}_2 = \alpha_\varphi$ )

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int dr \frac{\alpha_\varphi / r^2}{\sqrt{2m(\tilde{E} - V(r)) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}}$$

$\Rightarrow r(\varphi)$

z.B.  $V(r) = -\frac{mGM}{r}$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}$$

$\rho$ : Halbparameter

Standardverfahren für zentralen St-probleme; auch für Mehr-Körperproblemen

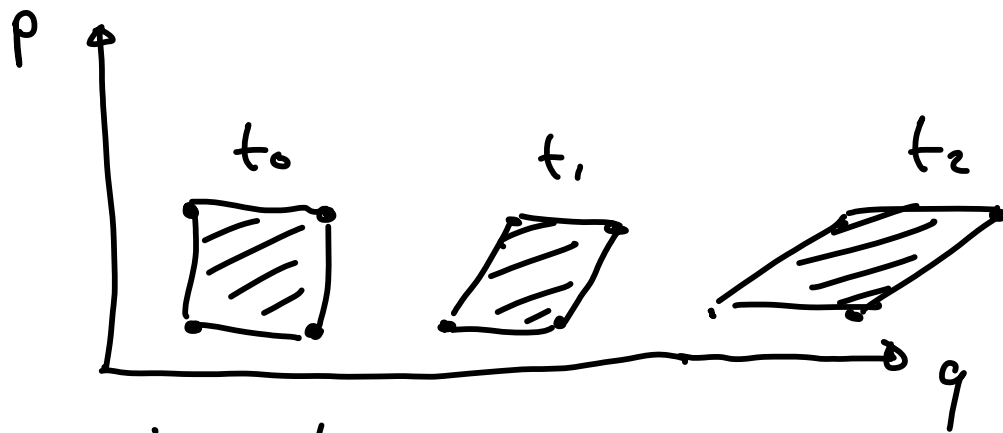
# Satz von Liouville

nach Liouville-Theorem:

Aussage über Erhaltung des Phasenraum-Volumens

Bsp. freies Teilchen

$$H = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \dot{p} = 0; \dot{q} = \frac{p}{m} \rightarrow \varphi(t) = \frac{p_0}{m}t + q_0$$



Phasenraum-  
volumen auf-  
gespannt von  
4 Teilchen  
bleibt erhalten

Liouville-Theorem:

$$\boxed{\frac{d}{dt} V_{\pi} = 0}$$

Volumen des Phasenraums für  
zeitunabhängige Hamiltonsche  
Systeme erhalten

mit  $\underline{\pi} = (\underline{q}, \underline{p})$  Phasenraum

Differential Phasenraumvolumen:

$$dV_{\pi} = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = d^n q d^n p$$

zeitliche Entwicklung

$$\frac{d}{dt} V_{\pi} = \int d\underline{A} \cdot \underline{\dot{\pi}}$$

$$= \int dV \underline{\nabla} \cdot \underline{\dot{\pi}}$$

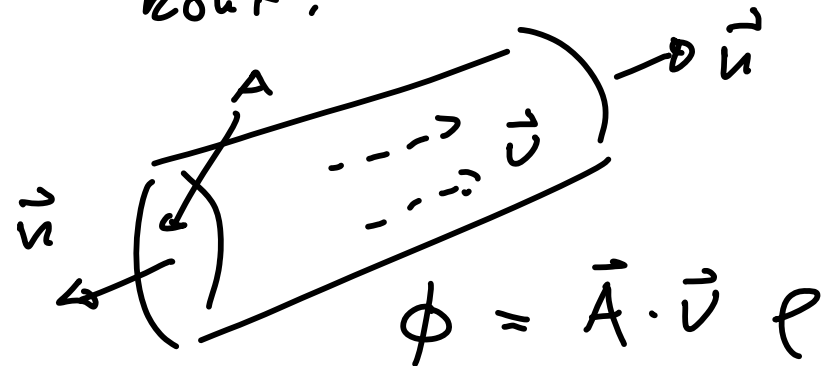
$$= \int dV \underline{\nabla} \cdot \{\underline{\pi}, H\}$$

$$= 0$$

$A$ : Fläche, die das Phasenraumvolumen einschließt

$d\underline{A} = \underline{u} dA$ ;  $\underline{u}$ : Flächennormale

vgl. Fluß von Materie durch Rohr:



$$\phi = \vec{A} \cdot \vec{v} \rho$$

Wichtig für makroskopische Zustände ( $N \sim N_A \sim 10^{24}$ )

- Thermodynamik
- Statistische Physik

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \{\underline{\pi}, H\} &= \frac{\partial}{\partial q} \{q, H\} + \frac{\partial}{\partial p} \{p, H\} \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p} \left( - \frac{\partial H}{\partial q} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

# Mechanik der Kontinuuen (Felder)

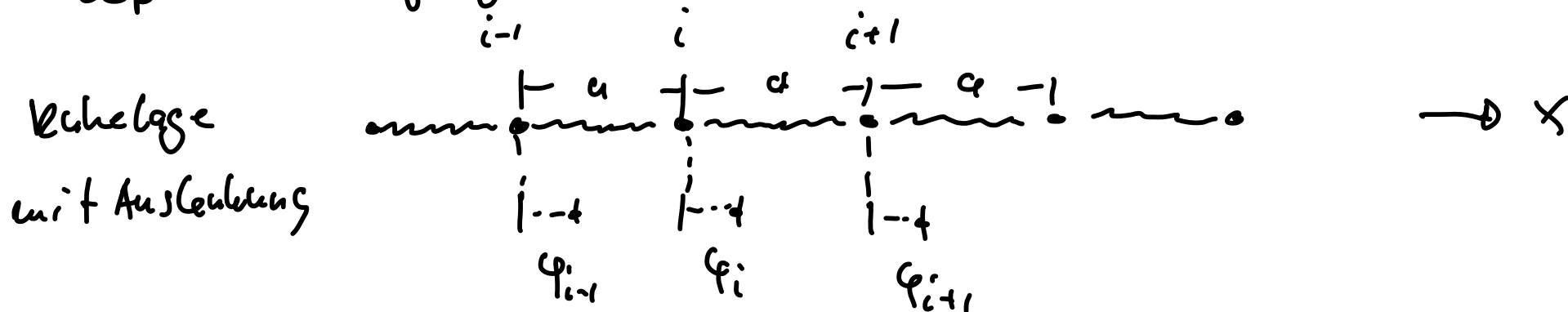
bisher: Betrachtung abzählbar endlich Massenpunkte  
(Teilchen)

aber: Beschreibung von  $N \sim N_A$  Massenpunkten  
(z.B. Gas, Flüssigkeiten, ausgedehnte Körper): Massen-  
punktbeschreibung nicht sinnvoll.

→ Übergang  $\sum_i m_i \rightarrow \int dV \rho(\vec{x})$  mit  
 $\rho(\vec{x})$ : Kontinuum / Feld

Übergang:  $N$ -Teilchen  $\rightarrow$  Kontinuum

Bsp.: Schwingung von Massenpunkten an Federn:



$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N \dot{\varphi}_i^2 \quad \text{gleiche Massen: } m$$

$$V = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \quad \text{gleiche Feder}$$

$$\hookrightarrow F_j = - \frac{\partial V}{\partial \varphi_j} = -k(\varphi_j - \varphi_{j-1}) - k(\varphi_j - \varphi_{j+1})$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (m \dot{\varphi}_i^2 - k (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2); \quad N \gg 1: \text{ ignore } \varphi_N$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} a \left( \mu \dot{\varphi}_i^2 - \kappa \left( \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a} \right)^2 \right); \quad \mu = \frac{m}{a} \quad \text{Masse pro Länge}$$

$\kappa$ : Elastizitätsmodul  
 $\kappa = a k$

$$= \frac{1}{2} \sum_i a \mathcal{L}_i; \quad \mathcal{L}_i: \text{Lagrange-Funktion pro Länge}$$

FL 6:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = 0$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\varphi}_i + \alpha \left( \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{a^2} + \frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{a^2} \right) = 0$$

$$\mu \ddot{\varphi}_i - \alpha \left( \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{a^2} \right) = 0$$

für  $N \rightarrow \infty$ :  $N$ : # Massenpunkte an Feder  
 $\hookrightarrow$  kontinuierlicher elastischer Stab

+  $a \rightarrow 0$

mit  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, t) - \varphi(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

$i$ -ten Massenpunkt:  $\varphi_i(t) \rightarrow \varphi(x, t)$

und  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{a^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x - \Delta x, t) - 2\varphi(x, t) + \varphi(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

Zeitableitungen  $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ;  $\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$

Lagrange-Funktion

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^{n-1} \Delta J_i = \int_0^l dx \mathcal{L} \quad ; \quad l: \text{Länge des Stabes}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \mathcal{L}(\dot{\varphi}, \varphi, x) = \mathcal{L}(\dot{\varphi}, \varphi, x)$$

Lagrange-Dichte

$\Rightarrow$  Bewegungsgleichungen

$$\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{\kappa} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit } c_s = \sqrt{\kappa/\mu}$$

Lagrange-Formalismus für kontinuierliche Systeme

Allgemein (3D) Lagrange-Funktion

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad ; \quad \mathcal{L}: \text{Lagrange-Dichte}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_t \varphi, \partial_{\vec{x}} \varphi, \vec{x}, t) \quad ; \quad \partial_{\vec{x}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi$$

d.h.  $\underline{q} \rightarrow \varphi$  ;  $\underline{\dot{q}} \rightarrow \dot{\varphi}$ ;  $\partial_{\vec{x}} \varphi$  unabhängige Größen

hier für ein Feld  $\varphi(\vec{x}, t)$

Bewegungsgleichung?

aus Hamiltonschem Prinzip

$$\delta S = 0 = \delta \int dt d^3x \mathcal{I} \quad \text{Integration über} \\ \Omega = t \times V$$

- Variation  $\delta$  nur bezüglich

$\varphi, \dot{\varphi}, \partial_{\vec{x}} \varphi$ , da  $\delta t = 0$  und  $\delta \vec{x} = 0$  feste  
Endpunkte für Zeit und Raum

- keine Variation des Feldes  $\varphi$  an der Oberfläche  $\partial\Omega$

$$\delta \varphi(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\text{aber } \delta(\dot{\varphi}, \partial_{\vec{x}} \varphi) \Big|_{\partial\Omega} \neq 0 \quad (\text{vgl. } \dot{q} \Big|_{t_A, t_E} \neq 0)$$



$$0 = \int_{\Omega} dt d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\varphi_{,i})} \delta (\varphi_{,i}) \right] \text{ Summation über } i$$

$$\text{mit } \delta \dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \delta \varphi \text{ und } \delta (\varphi_{,i}) = \partial_i \delta \varphi \quad (\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i})$$

+ part. Integration

$$\int dt d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} = \int d^3x \underbrace{\left( \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi \right]_{t_x}^{t_e} \right)}_{= \text{6 wg. Randbed.}} - \int dt \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta \varphi$$

$$\Rightarrow 0 = \int dt d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \right) \right] \delta \varphi$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \varphi)} \right]$$

Euler-Lagrange-Gleichung für kontinuierliche Systeme (Lagrange-dichten)

Vgl. mit elastischem Stab:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2$$

ELG:

$$\rightarrow 0 = \mu \ddot{\varphi} - \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Bsp.:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad \Rightarrow \quad - \frac{\partial V}{\partial \varphi} = m \ddot{\varphi}$$

- Klein-Gordon-Gleichung / Boson-Feld

$$\text{aus } \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 - (\vec{\nabla} \varphi)^2) - \frac{1}{2} m \varphi^2$$

$$\rightarrow -m \varphi = \ddot{\varphi} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad (\square - m) \varphi = 0$$

$\square$ : d'Alembert-Operator  
 $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$

- EM-Feld

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{4\pi} \overline{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{wobei } \overline{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Lorentz-konforme Formulierung für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ -Felder

## Hamiltonsche Formulierung

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

zu  $\varphi(\vec{x}, t)$  kanonisch konjugierte  
Feld; generalisierte Impulsdichte

Hamilton Dichte:

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi, \varphi, i, t) = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} \quad \text{durch Legendre-Transformation}$$

Hamilton-Funktion:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\varphi} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi} \quad ; \quad \dot{\pi} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi}$$

wobei  $\frac{\delta}{\delta \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_{,i}}$  Funktional-ableitung

vgl.  $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = 0$  Euler-Lagrange-Gleichung

oder:

$$\dot{\varphi} = \{ \varphi, \mathcal{X} \} \quad ; \quad \dot{\pi} = \{ \pi, \mathcal{X} \}$$

$$\text{wobei } \{A, B\} = \int d^3x \left( \frac{\delta A}{\delta \varphi} \frac{\delta B}{\delta \pi} - \frac{\delta A}{\delta \pi} \frac{\delta B}{\delta \varphi} \right)$$

Poisson-  
Klammer  
für Funktionen

Fundamentale Poissonklammer

$$\{ \varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t) \} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad ; \quad \delta\text{-Funktional}$$

Energieerhaltung / Noether - Theorem

$\mathcal{L}$  nicht explizit von  $t$  abhängig  $\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right)_{\text{expl.}} = 0$

invariant unter  $t \rightarrow t + \delta t$  Zeit-Translation

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_{,i})$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \delta \varphi_{,i}$$

$$\text{mit } \delta \dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \delta \varphi \quad ; \quad \delta \varphi_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \varphi$$

$$+ \text{ELG}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \delta \varphi \right) \quad ; \quad \varphi_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi$$

$$\text{mit } \delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \delta t = \dot{\varphi} \\ = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \right) \right] \delta t$$

Variation implizit nach  $t$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t \quad \text{Ableitung im Sinn der Kettenregel auf} \\ \varphi, \dot{\varphi}, \varphi_{,i}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \right) \right] \delta t = 0$$

unabhängig von  $\delta t$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}} \right) \right] = 0$$

Energieerhaltung ( $\mathcal{E} = \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L}$  : Feldenergie dichte)

Noether-Theorem für  $t \rightarrow t + \delta t$  Symmetrie  
 Kontinuitätsgleichung für Feldenergie mit entsprechenden  
 Feldenergie Strom-Dichte :  $j_i = \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,i}}$

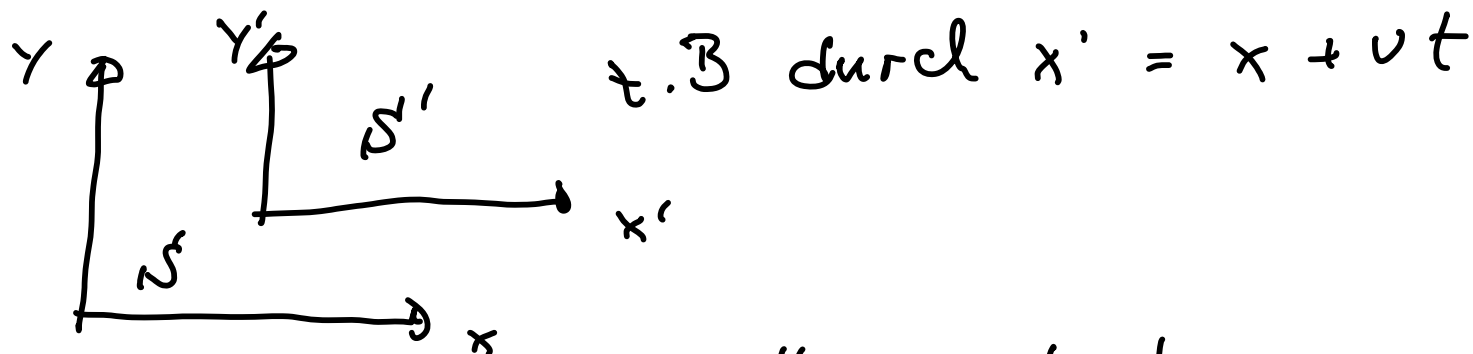
$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \vec{0} \cdot \vec{j} = 0$$

## Spezielle Relativitätstheorie

- Vereinheitlichung von Raum + Zeit  $\rightarrow$  RAUMZEIT
- Vier-Vektoren / Tensoren
- kovariante (Lorentzinvariante) Formulierung  
u.a. Elektrodynamik

Postulate:

- Jedes Inertialsystem ist physikalisch identisch  
bzw. Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen  
die gleiche Form (forminvariant)



bereits in Newtonscher Physik verwendet

↳ Galilei-Transformation möglich ( $t = t'$ )

- Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen identisch (im Vakuum)

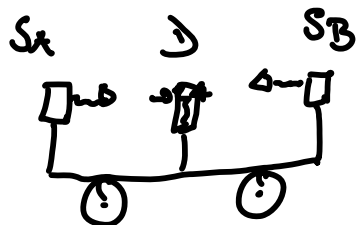
$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

$$\approx 300.000 \text{ km/s}$$

von sequenzen

1) Transformation zwischen Inertialsystemen

①



Externer und interner Experimentator stimmen überein, dass Signale gleichzeitig ausgesendet wurden

②



Externer und interner Exp. stimmen nicht überein, dass Signale gleichzeitig von S\_A und S\_B ausgesendet wurden, wenn diese gleichzeitig bei D ankommen (= physikalische Ereignis)

=> Konzept der absoluten Gleichzeitigkeit muß aufgegeben werden  
↳ Gleichzeitigkeit hängt vom Beobachter ab.

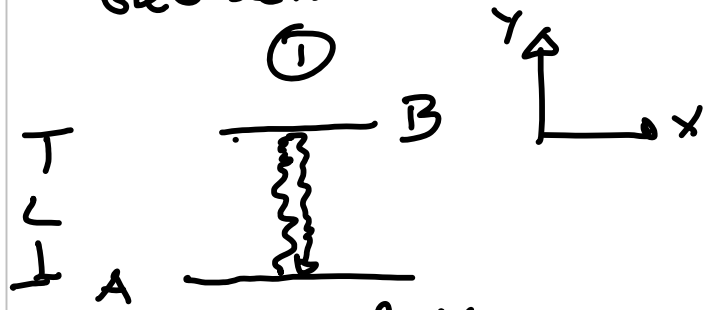
=> Transformation muß Zeit t berücksichtigen

$$S: (t, x, y, z) \rightarrow S' (t', x', y', z')$$

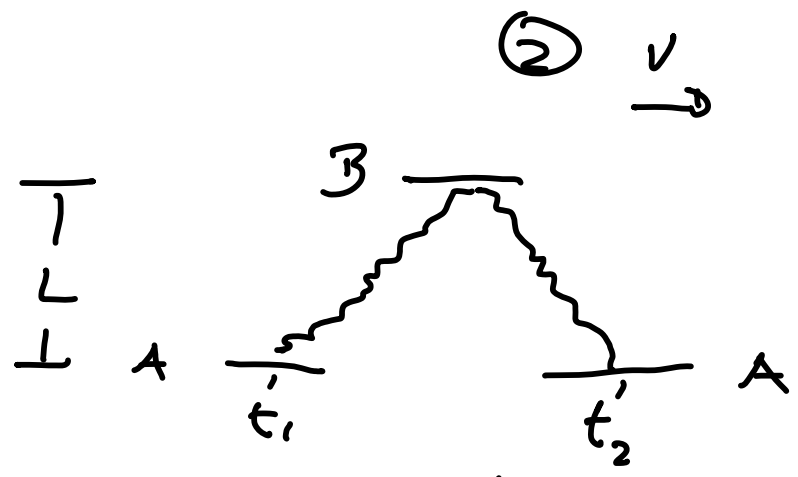
=> KAUMZEIT: Raum + Zeit: 4-dimensionaler  $\mathbb{R}^4$   
(Raum wird durch Geometrie bestimmt; z.B. Euklidischer Raum = flacher Raum)

- Geometrie des flachen KAUMZEIT?
- Welche Transformationen sind möglich?

Geometrie der Kt:



Lichtlaufzeit:  
 $\Delta t = 2L/c$



$$\Delta t' = 2\sqrt{L^2 + (\Delta x'/2)^2} / c$$

Experiment mit Relativgeschw. v



Anzahl der transversalen Richtungen unverändert  
- 3D Raum ist Euklidisch = flach

-> L unverändert

$$c^2 \Delta t^2 = L^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

$$\rightarrow c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

=> invariantes Linienelement

$$\Rightarrow \boxed{\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$$

identisch  
in allen  
Inertialsystemen

bzw. infinitesimales Linienelement

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Minkowski - Geometrie

= Geometrie der flachen RAUMZEIT

mit 4er Ortsvektoren

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3$$

Minkowski-Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

hier: Signatur:

$$(1, -1, -1, -1)$$

Transformationsvorschrift für Wechsel von Koordinatensystemen

Linienelement  $ds^2$  muß invariant sein

betrachte Relativbewegung in  $x$ -Richtung mit

Geschwindigkeit  $v = c \sin \theta$

mit  $2 \times 2$  Matrix;  $c = 1$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$t' = at + bx$$

$$x' = et + fx$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow ds^2 &= dt'^2 - dx'^2 = dt^2 - dx^2 \\
 &= (adt + bdx)^2 - (c dt + f dx)^2 \\
 &= (a^2 - e^2) dt^2 + (b^2 - f^2) dx^2 + 2(ab - ef) dt dx
 \end{aligned}$$

=> Koeffizientenvergleich:

Weiterhin  
def() = 1  
af - be = 1

$$\left. \begin{aligned} a^2 - e^2 &= 1 \\ b^2 - f^2 &= -1 \\ ab - ef &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \cosh \theta = t \\ e &= \sinh \theta = b \\ \cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta &= 1 \end{aligned}$$

=> Lorentz-Transformfunktion

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

vgl. Rotation  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

in 4D-KAUMZEIT: Boot in x-Richtung

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matrix-  
multiplikation

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Verkennung mit beliebigeschiebewegigkeit  $v$  :

$$\Theta = \Theta(v)$$

Teilchen in  $S'$  in Ruhe:  $x' = 0$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Theta & \sinh \Theta \\ \sinh \Theta & \cosh \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$0 = \sinh \Theta ct + \cosh \Theta x$$

$$\text{mit } v = \frac{x}{t} \Rightarrow v = -c \frac{\sinh \Theta}{\cosh \Theta} = -c \tanh \Theta$$

$$= -c \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 \Theta}}$$

$$\Rightarrow \left[ \cosh \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \right] \quad \gamma: \text{Lorentz faktor}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\frac{\partial \ln \Theta}{\partial \beta} = -\beta \gamma$$

$\Rightarrow$  Lorentz-Transformation:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

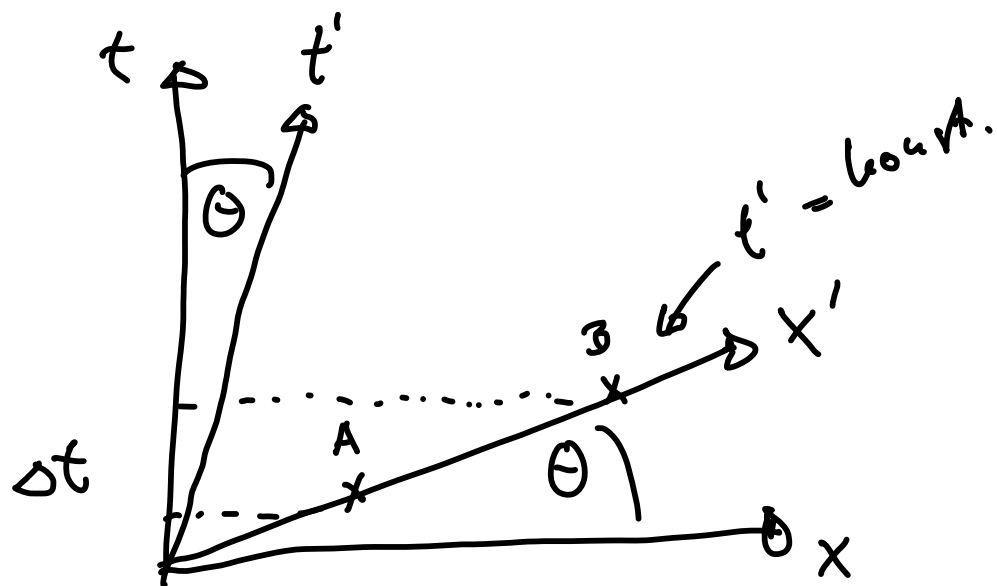
inverse Transformation:  $v \rightarrow -v$

$$t = \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right)$$

$$x = \gamma (x' + vt')$$

# Konsequenzen aus der LT

mit Raumzeit-Diagrammen / Minkowski-Diagrammen



$S'$  bewegt sich  
relativ zu  $S$  mit  
 $v = \sim \text{tg} \Theta$

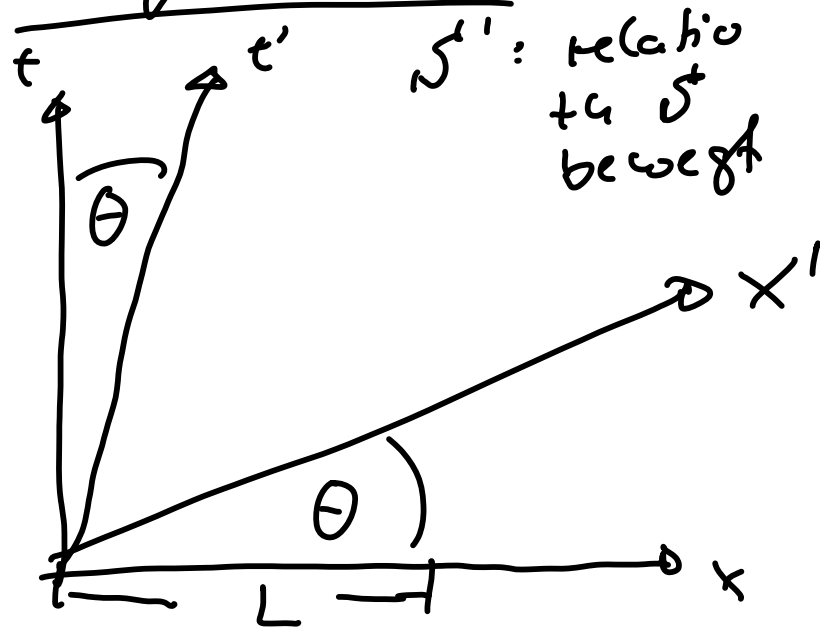
$$\boxed{\text{(hier } c = 1\text{)}}$$

vgl. Kotation: aber auch hier stehen  $\vec{e}_t'$  und  
 $\vec{e}_x$  senkrecht aufeinander

Linien parallel zu  $x'$  finden in  $S'$  gleichzeitig  
statt; d.h.  $t' = \text{const.}$

$\Rightarrow$  Ereignisse  $A$  und  $B$  nicht gleichzeitig in  $S'$   
(Laborsystem)

• Längenkontraktion



$L$  : Länge einer Stange im Ruhesystem = mitbewegtes System mit Stange

"Länge" eines Objekts : gleichzeitige Messung der Enden im ruhenden System

$$(\Delta t)^2 - L^2 = (\Delta t')^2 - L'^2 \quad \stackrel{!}{=} -L'^2$$

↙ gleichzeitige Messung der Enden

$$\Delta t = \gamma \underbrace{(\Delta t' + v L')}_{=0} = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v L'}{c^2} \right) \quad \text{aus LT}$$

$$\rightarrow v^2 \gamma^2 L'^2 - L^2 = -L'^2 \quad \Rightarrow \quad L'^2 \underbrace{(1 + v^2 \gamma^2)}_{\gamma^2} = L^2$$

$$\Rightarrow \boxed{L' = L/\gamma} ; \gamma \geq 1$$

Stange ist im nicht-Ruhesystem kürzer,  
bzw. kontrahiert

Aussage ist "relativ": relativ zueinander bewegte  
Objekte sind kontrahiert

Längenkontraktion:

- kleiner Effekt: z.B. Auto:  $360 \text{ km/h} = 100 \text{ m s}^{-1}$   
 $\Delta L/L \sim \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 10^{-13}$   $\sim 3 \times 10^{-7} c$

aber: Erklärung für Coulomb-Kraft  $\leftrightarrow$   
Lorentz-Kraft

Zeitdilatation

bewegte Uhren gehen langsamer

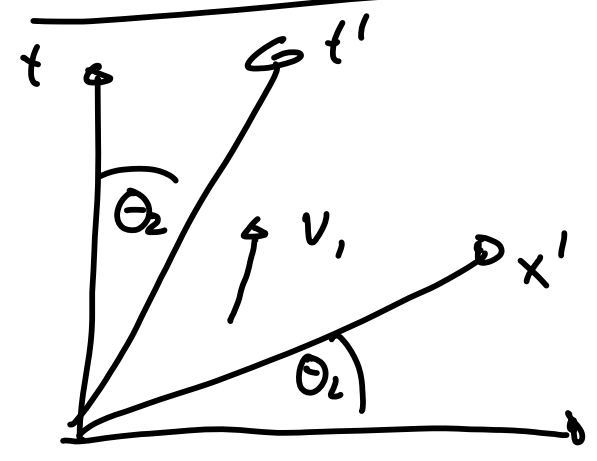
"Uhren": alle physikalischen, biologischen, ...  
Zeitmessungen



z.B. Myonen: Erzeugung in Atmosphäre ( $\approx 10$  km Höhe) durch kosmische Strahlung;  $\tau \approx 2 \mu s \rightarrow d \approx 600$  m bei  $v \approx c$ : aber Nachweis an Erdoberfläche möglich  
 $D \approx \gamma \tau_0$

Allgemein:  $\Delta t_{bewegt} = \Delta t_{ruhend} / \gamma$

Additions-Theorem / Addition von Geschwindigkeiten durch hintereinander aufeinander der Lorentztransformation



mit  $v = - \tanh \Theta$   
 $\Lambda_3 = \Lambda_2(\Theta_2) \Lambda_1(\Theta_1)$

mit Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen

$\Theta_3 = \Theta_1 + \Theta_2$  wenn  $v_1$  und  $v_2$  in gleicher Richtung

$$v_3 = -\operatorname{tg} \varphi(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{\operatorname{tg} \varphi(\theta_1) + \operatorname{tg} \varphi(\theta_2)}{1 + \operatorname{tg} \varphi(\theta_1) \operatorname{tg} \varphi(\theta_2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}}$$

für  $v_{1,2} = 1$  ( $= c$ )

$$\hookrightarrow v_3 = 1$$

Lichtgeschw. = max.  
Geschwindigkeit

## Relativistische Kinematik & Dynamik

1) 4er-Geschwindigkeit

vgl. 3er-Geschwindigkeit:  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

$\vec{x}$ : Ortsvektor

$t$ : Newtonsche absolute Zeit

in 4D Raumzeit / Minkowski-Raumzeit

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

mit  $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  4er-Ortsvektor  
(mit Index  $\mu = 0, 1, 2, 3$ )

$ds^2$ : Lorentz-invariante "Länge" in 4D  $\mathbb{R}^4$

=> Lorentz-invariante Zeit:

$$d\tau^2 = ds^2/c^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2$$

$\tau$ : "Eigenzeit": Zeit, die von mitgeführten  
Uhren gemessen wird  
(im Ruhesystem, d.h.  $\Delta x = 0$ )

$d\tau^2 \geq 0$  für alle bewegte Objekte  
(0 nur für Photonen)

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2/c^2} \quad \text{mit } |\vec{v}| = v$$

$$= dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = dt/\gamma$$

⇒ per Geschwindigkeit:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$\Rightarrow u^0 = u^t = \frac{cdt}{d\tau} = \gamma c$$

$$u^1 = u^x = \frac{dx}{d\tau} = \gamma \frac{dx}{dt} ; u^y = \gamma \frac{dy}{dt} ; u^z = \gamma \frac{dz}{dt}$$

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$$

Betrag: Allgemein  $a^2 = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$

$a^2$ : Lorentz-Skalar:  
identisch in allen  
Inertialsystemen

R Minkowski-Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2$$

$$\text{bzw } |u^\mu| = \underline{\underline{c}} = \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}$$

$\Rightarrow$  Alle Objekte "bewegen" sich mit Lichtgeschw.  
in der 4D Raumzeit

### 4er Beschleunigung

für die Bewegungsgleichung; vgl. Newton  $m\vec{a} = \vec{F}$

$$\text{aus } \vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\left. \left. a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \right) \right\} \text{4er Beschleunigung}$$

Bewegungsgleichung im kräftefreien Raum

$$\boxed{a^\mu = 0} \quad (\text{einschl. Gravitation in ART - Formulierung})$$

mit externer Kraft  $f^\mu$

$$\boxed{m a^\mu = f^\mu}$$

$m$ : Ruhemasse

$$\text{da } u_\mu u^\mu \equiv \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}(u_\mu u^\mu) = 0 = 2u_\mu a^\mu = 2\eta_{\mu\nu} u^\mu a^\nu$$

$$\Rightarrow u_\mu f^\mu = 0 \quad \rightarrow \text{nur 3 unabhängige Komponenten für } f^\mu$$

-  $u^\mu$  steht senkrecht auf  $f^\mu$

aus  $m \vec{a} = \vec{F}_N$ ;  $\vec{F}_N$ : Newtonsche Kraftkomponenten

$$\Rightarrow \boxed{f^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \vec{F}_N \cdot \vec{v} \\ \gamma \vec{F}_N \end{pmatrix}}$$

aus LT mit  $S'$  ( $\vec{v} = 0$ )

$\hookrightarrow S$  ( $\vec{v} \neq 0$ )

$$f^\mu = \begin{pmatrix} f^0 \\ \vec{f} \end{pmatrix} \text{ mit } f^0 = \gamma \vec{F}_n \cdot \vec{v} \text{ relativ. Leistung}$$

4er Impuls / Energie-Impuls Vektor

$$\boxed{p^\mu = m u^\mu} \quad \text{4er Impuls ; } m: \text{ Ruhemasse}$$

$$p_\mu p^\mu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (mc)^2 = m^2 \text{ (für } c=1)$$

= Lorentz-Skalar: identisch in allen Inertialsystemen

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma m c \\ \gamma m \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v}} \quad \text{relativistische 3er Impuls}$$

$$c p^0 = \gamma m c^2 \approx m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots \quad \left( \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)$$

$\uparrow$  Ruheenergie                       $\nwarrow$  kinetische Energie

$\Rightarrow \bar{E} = c p^0$  : Gesamtenergie / relativistische Energie

Energie-Impulsvektor:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \bar{E}/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{E}/c \\ E \vec{v}/c^2 \end{pmatrix}$$

mit  $p_\mu p^\mu = (m c)^2 = (\bar{E}/c)^2 - \vec{p}^2$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2}} = \gamma m c^2$$

$$\Rightarrow \bar{E} = m c^2 \quad \text{für } \vec{p} = 0 = \vec{v}$$



# Tensoren / 4er Notation

wichtig für

- Lorentzinvariante Formulierung /  
kovariante Formulierung

- Tensorgleichung unabhängig von Inertialsystem /  
Koordinatensystem

1) Kovarianter Vektor

= kovarianter Tensor vom Rang 1

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) \quad ; \quad \mu = 0 \dots 3$$

Kovariant im Sinne Lorentz-Transformation

$a^\mu$  kovariant, wenn Transformationsverhalten  
unter Lorentz-Transformation wie 4er-Ortvektor  $x^\mu$ :

$$\boxed{a^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} a^\nu}$$

Kovariant:

Index oben

$$x^\mu = (t, x, y, z) \quad \text{mit } c=1$$

z.B. mit  $\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  für Lorentz-Boost  
in x-Richtung  
mit Geschwindigkeit  
 $v = \beta$

mit allgemeiner Transformation (einschl. Koordinaten-  
transformation)

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$$

$$\Rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = J^\mu_\nu dx^\nu$$

Transformation des Differential des Ortsvektors

$J^\mu_\nu$ : Jacobi-Matrix

Kontravarianter Vektor  $a^\mu$ : Transformationsverhalten

wie Differential des Ortsvektors unter Koordinaten-  
bzw. Lorentz-Transformation

$$\boxed{a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu}$$

kompatibel mit LT-Definition

$$J^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\nu}$$

aber: allgemeine Transformation

$$x'^{\mu}(x^{\nu}) \text{ vorgegeben} \Rightarrow x'^{\mu} \neq \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu}$$

vgl. Polarkoordinaten  $(r, \varphi) = x'^{\mu}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \varphi = \arctg y/x$$

$\Rightarrow x^{\mu}$ : 4er Ortsvektor im allgemeinen kein  
Tensor vom Rang 1

aber  $dx^{\mu}$  immer kontravarianter Vektor

kovarianter Vektor / kovarianter Tensor vom Rang 1

$$\text{mit } a^2 = \eta_{\mu\nu} a^{\mu} a^{\nu} = a_{\mu} a^{\mu} \Rightarrow a_{\mu} \equiv \eta_{\mu\nu} a^{\nu}$$

↑ Skalar / Lorentz-Skalar

$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu$  : Index senken (Lowering)

beachte :  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$  ;  $\eta = \eta^T$  symmetrisch

nur in flacher Raumzeit; bzw in Minkowski-Kz

$$\eta = \eta^{-1}$$

immer :  $\eta^{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu})^{-1}$

d.h. für allgemeine Metrik  $g_{\mu\nu}$

$\Rightarrow g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$  in gekrümmter Kz

$a_\mu$  : kovariante Vektor / dualer Vektor zu  $a^\mu$

$$a'_\mu = \eta_{\mu\nu} a'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\alpha a^\alpha = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\alpha \eta^{\alpha\lambda} a_\lambda$$

mit  $\eta_{\mu\nu} \lambda^\nu \eta^{\rho\lambda} = (\Lambda^{-1})_\mu^\lambda$  inverse LT

$$\Rightarrow \boxed{a'_\mu = (\Lambda^{-1})_\mu^\lambda a_\lambda} \quad \text{Transformationsverhalten eines kovarianten Vektors}$$

Transformation mit inverser Lorentz-Transformation

$$\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta \quad ; \quad \Lambda \text{ pseudo-orthogonal}$$

$$a^\mu = \eta^{\mu\lambda} a_\lambda \quad : \quad \text{Index heben (raising)}$$

allgemein kovarianten Vektor / Tensor

betrachte der Gradient einer skalaren Funktion

$$f(x^\mu) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{mit } f(x'^\mu) = f(x^\mu) \text{ vgl. } a^2 = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = a_\mu a^\mu$$

$$\partial_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

bei Transformation

$$\partial'_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}} \partial_\nu f$$

inverse Jacobi-Matrix /  
inverse Lorentz-Transformation

$$\Rightarrow \boxed{a'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} a_\nu}$$

Def.: ein kovarianter Vektor transformiert sich wie der Gradient einer skalaren Funktion unter Koordinaten- / Lorentz-Transformation; d.h. mit inverser Jacobi-Matrix / inverser LT

# Eigenschaften von Vektoren / Darstellung im Minkowski-Diagramm

$$\text{mit } a^2 = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = a_\mu a^\mu \stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} 0 = (a^0)^2 - \vec{a}^2$$

Unterscheidung

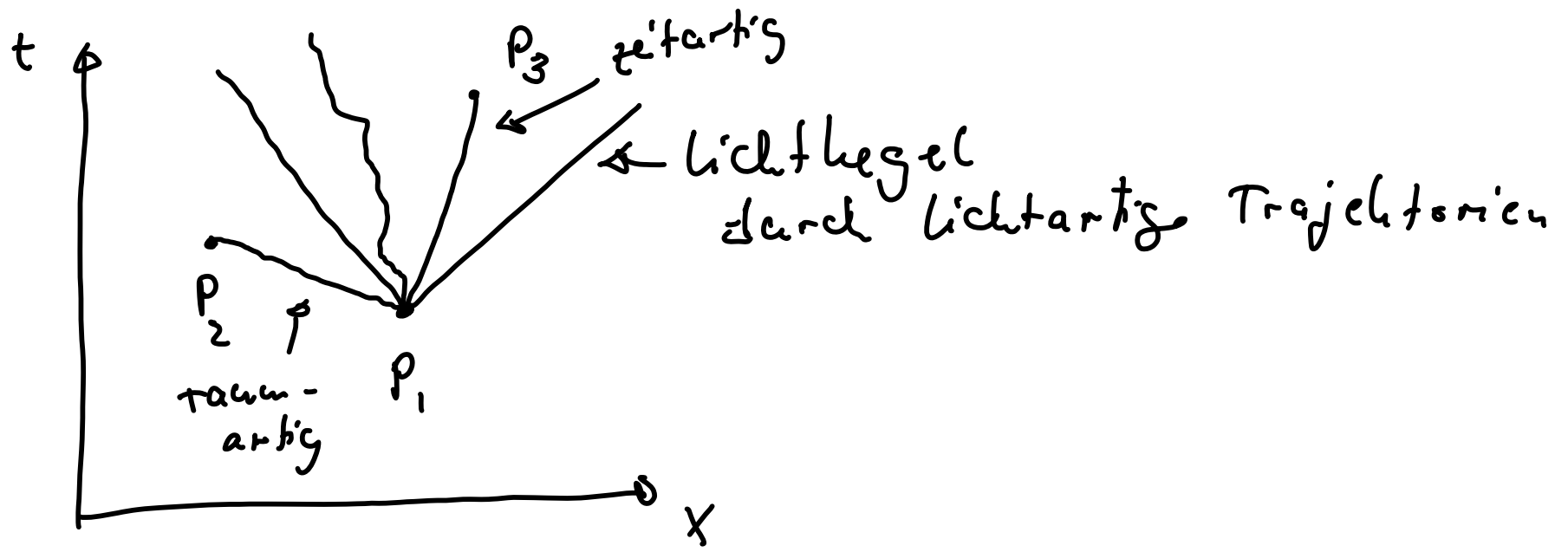
$$\text{raumartig: } \vec{a}^2 > (a^0)^2 \quad \text{hier } a^2 < 0$$

$$\text{zeitartig: } (a^0)^2 > \vec{a}^2 \quad a^2 > 0$$

beachte: Teilchenbahnen / Trajektorien  $x^\mu(\tau)$   
sind immer zeitartig, d.h.

$$dx_\mu dx^\mu > 0$$

lichtartig:  $a^2 = 0$  bzw.  $ds^2 = 0$   
Trajektorie von Photonen / Licht





# Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

aus Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad : \text{Gau\ss}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad : \text{Amp\ere-Maxwell}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad : \text{Faraday / Induktion}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad : \text{quellfreies B-Feld}$$

Einheiten: CGS - Gau\ss-System

$$\text{mit } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} ; [\vec{E}] = [\vec{B}] ; [\vec{B}^2] = \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}$$

im Vakuum:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{E} = 0 ; \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{B} = 0$$

$\vec{E}$  und  $\vec{B}$  erfullen Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit  
 $c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$

=> muss in allen Inertialsystemen gelten

(EM-Wellen = Licht)

Hinweis:  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$

$= \partial_\mu \partial^\mu$

d'Alembert-Operator

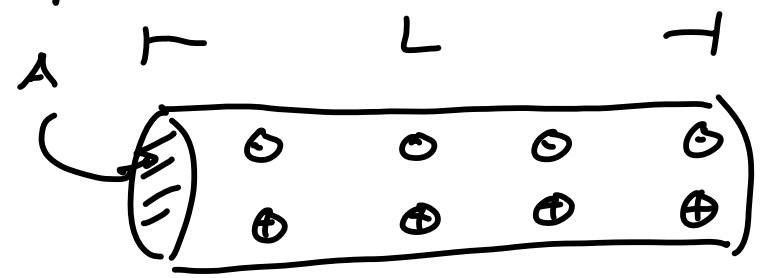
Lorentz-invariant

=>  $\square' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \vec{\nabla}'^2$

=> Maxwell-Gleichungen implizieren relativistische Formulierung  
aber  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind keine kovarianten Größen

$\vec{E}$  und  $\vec{B}$ -Felder sind abhängig vom Betrachter (Inertialsystem)

Bsp. Stromdurchflussener Leiter



im Laborsystem  
-q -> v

-> v Elektronen: Leiter mit Strom I  
Ladungsträger (e-) bewegen  
sich mit Geschwindigkeit  
v (Bem. v ~ 0.1 mm/s  
~ 10<sup>-12</sup> c)

im Laborsystem  $S$ :

stromdurchflossener Leiter erzeugt Magnetfeld:

Biot-Savart-Gesetz / Ampère-Gesetz

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

betrachte Ladung  $-q$  mit Geschwindigkeit  $v = v_{\text{Elektronen}}$

$\Rightarrow$  Ladung erfährt magnetische Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow -q \text{ wird zum Leiter beschleunigt}$$

aber im mitbewegten System  $S'$ :  $v = 0$

d.h. keine mag. Lorentz-Kraft; aber physikalisches

Ereignis (Ladung wird zum Leiter beschleunigt) bleibt

in  $S'$ :

• Ladungsdichte

$$\rho_- = \frac{N_- q_-}{V} \quad ; \quad \rho_+ = \frac{N_+ q_+}{V}$$

$N_{\pm}$ : Anzahl Ladungen

$V$ : Volumen

$$V = A \cdot L$$

Ladungen  $Q_{\pm} = V\rho_{\pm}$  identisch in allen Inertialsystemen (Ladungserhaltung)

$$\rho' \cdot L' = \rho L \quad ; \text{ da } A' = A \quad v \perp A$$

$$\rho' = \rho \frac{L}{L'} = \gamma \rho \quad \text{wg. Längenkontraktion}$$

im Laborsystem:  $\rho_+ + \rho_- = 0$  : Leiter neutral

Elektronen ( $\rho_-$ ) bewegen:  $\rho_- = \gamma \rho'_-$  ;  $\rho'_-$  im Ruhesystem der Elektronen

Im Ruhesystem von  $-q$ :  $S'$   
bewegen sich die positiven Ladungen:

$$\rho'_+ = \gamma \rho_+$$

$$\Rightarrow \rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \gamma \rho_+ + \frac{\rho_-}{\gamma} = \rho_+ \gamma \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \rho_+ \gamma \beta^2$$

$(\beta = \frac{v}{c})$

=> Im System S' der bewegten Ladung gibt es eine positive Ladungsdichte, diese erzeugt Coulomb-Feld und -q wird zum Leiter beschleunigt

mit Ladung pro Längeneinheit

$$\lambda' = \rho' A' \quad ; \quad A' = A \quad : \quad \text{Querschnittsfläche}$$

$$\Rightarrow E' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \quad ; \quad r : \text{Abstand zum Leiter}$$

$$= \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 r \quad : \quad \text{elektrische Feld im mitbewegten System S'}$$

=> Coulomb-Kraft

$$F'_c = -q E' = -q \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 r \quad \overset{v \ll c}{\approx} -q \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\text{in S} : I = v \rho_- A$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{mit} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

⇒ im Laborsystem: nur mag. Lorentz-Kraft

$$F_L = -qvB$$

in  $S'$ : nur Coulomb-Kraft, da  $v = 0$

⇒  $F_L$  und  $F_C$  sind physikalisch identisch

Unterscheidung ( $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$ ) nur durch Relativbewegung abhängig

bzw.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind durch Lorentz-Transformation

verknüpft

⇒ für kovariante Formulierung: vereinheitlichte Darstellung von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  notwendig

- $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  können gleichzeitig existieren (in einem System)

→ 4er Vektor nicht ausreichend

→ mindestens 6 Komponenten

aber Darstellung mit 4er-Vektorpotential möglich:

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad \text{4er Vektor / Tensor von Rang 1}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Bsp. Ladung  $q$  im Ruhesystem ( $S'$ )

$\Rightarrow$  nur  $\vec{E}'$ -Feld, kein  $\vec{B}'$ -Feld,  
bzw  $\vec{A}' = 0$

im Laborsystem  $S$ : Ladung bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung ( $\beta = v, c=1$ )

$$\Rightarrow A^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu A'^\nu ; \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'^{\mu} = \begin{pmatrix} \phi' \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla}'\phi'; \quad \vec{B}' = 0$$

$$A^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma\phi' \\ \gamma\beta\phi' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

+ Transformation der Ableitungen aus LT

$$x' = \gamma(x - \beta t); \quad t' = \gamma(t - \beta x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma(\partial_{x'} - \beta \partial_{t'})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma(\partial_{t'} - \beta \partial_{x'})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$



auch mit

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu = \begin{pmatrix} \gamma(\partial_{t'} - \beta \partial_{x'}) \\ \gamma(\partial_{x'} - \beta \partial_{t'}) \\ \partial_{y'} \\ \partial_{z'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E^x &= -\partial_x \phi - \partial_t A^x = -\gamma^2 (\partial_{x'} - \beta \partial_{t'}) \phi' - \beta \gamma^2 (\partial_{t'} - \beta \partial_{x'}) \phi' \\ &= -\gamma^2 (1 - \beta^2) \partial_{x'} \phi' = E'^x \end{aligned}$$

$$E^y = -\partial_y \phi - \partial_t A^y = -\gamma \partial_{y'} \phi' = \gamma E'^y$$

$$E^z = \gamma E'^z$$

$$B^x = \partial_y A^z - \partial_z A^y = 0$$

$$B^y = \partial_{z'} A_x = \gamma \beta \partial_{z'} \phi' = -\gamma \beta E'^z$$

$$B^z = \gamma \beta E'^y$$

(Bemerkung: für 3er Vektorkomponenten:  $\vec{E}^k = E_k$ ,  
d.h. keine Unterscheidung zwischen ko- und kontravarianten  
Anteil)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}^x = E'^x \\ \vec{E}^y = \gamma E'^y \\ \vec{E}^z = \gamma E'^z \end{array} \right\} \begin{array}{l} B^x = 0 \\ B^y = -\gamma \beta E'^z \\ B^z = \gamma \beta E'^y \end{array}$$

keine Änderung in Bewegungsrichtung!  $\rightarrow$

Matrix-Darstellung von E- und B-Feldern

bzw. Tensor-Darstellung

mit  $\partial_\mu = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$

$\Rightarrow \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = (\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)^T$

( $\eta^{\mu\nu}$  inverse der Minkowski-Metrik, d.h.

$\eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu}); \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ )

\* Vier Vektorpotential :

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

-  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ergeben sich durch Ableitungen von  $A^\mu$

- 6 unabh. Komponenten notwendig

=>  $F^{\mu\nu} (\partial_\lambda A^\nu)$  Ansatz

allgemein : 16 Komponenten

symmetrisch : 10

anti-symmetrisch : 6 unabhängige Komponenten

=>  $\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$  Feldstärke-Tensor

$$= \begin{pmatrix} 0 & \partial_t A^x - \partial_x A^0 & \partial_t A^y - \partial_y A^0 & \partial_t A^z - \partial_z A^0 \\ -(0,1) & 0 & -\partial_x A^y + \partial_y A^x & -\partial_x A^z + \partial_z A^x \\ - (0,2) & -(1,2) & 0 & -\partial_y A^z + \partial_z A^y \\ - (0,3) & -(1,3) & -(2,3) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

Elektromagnetische Feldstärke tensor  
Maxwellchen

Maxwell-Gleichungen aus dem Feldstärke tensor

mit  $j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$  ;  $\rho$  : Ladungsdichte  
 $\vec{j}$  : Stromdichte  
 per Stromdichte

⇒ inhomogene Maxwell-Gleichungen:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu}$$

(per Divergenz des  
Feldstärke tensor)

z.B.  $v = 0$

$$\partial_x E^x + \partial_y E^y + \partial_z E^z = 4\pi \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho}$$

$v = 1$

$$\partial_t (-E^x) + \partial_y B^z + \partial_z B^y = 4\pi j^x$$

analog für  $v = 2, 3$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \vec{j}}$$

Lorentz-Transformation des Feldstärke tensors

$$\boxed{F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}} \quad \text{Tensor vom Rang 2}$$

$\Rightarrow$  für x-Boost:

$$\left. \begin{array}{ll} E'^x = E^x & B'^x = B^x \\ E'^y = \gamma(\tilde{E}_y - \beta B_z) & B'^y = \gamma(B^y + \beta E^z) \\ E'^z = \gamma(E_z + \beta B_y) & B'^z = \gamma(B^z - \beta E^y) \end{array} \right\}$$



$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0} \quad \text{homogenen Maxwell-Gleichungen} \quad 183$$

zeigen z.B. durch einsetzen von (\*) in inhom. Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \partial_\mu F^{\alpha\beta} + \partial_\alpha F^{\beta\mu} + \partial_\beta F^{\mu\alpha} = 0$$

Jacobi-Identität

oder:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$$

$$= \frac{1}{2} (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta + \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta)$$

$$= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta = 0 \quad (\text{wg. } \partial_\mu \partial_\alpha = \partial_\alpha \partial_\mu)$$

# Invarianten des Feldstärke tensors

Skalar mit

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \text{Lorentz-Skalar}$$

auch

$$F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -\vec{E} \cdot \vec{B} \quad \text{pseudo-Lorentz-Skalar}$$

(Vorzeichenänderung bei  $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$  oder  $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$ )

auch

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rightarrow \text{kein neuer Skalar}$$

$$\Rightarrow \vec{E}^2(x^\mu) - \vec{B}^2(x^\mu) = \vec{E}'^2(x^\mu) - \vec{B}'^2(x^\mu)$$

$$\vec{E}(x^\mu) \cdot \vec{B}(x^\mu) = \vec{E}'(x^\mu) \cdot \vec{B}'(x^\mu)$$

$\Rightarrow$  •  $|\vec{E}| < |\vec{B}| \rightarrow |\vec{E}'| < |\vec{B}'|$  in allen Inertial-Systemen

•  $\vec{E} \cdot \vec{B} > 0 \rightarrow \vec{E}' \cdot \vec{B}'$  für  $\varphi < 90^\circ$

•  $\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E}' \perp \vec{B}'$  mit  $|\vec{E}'| < |\vec{B}'|$



- $\vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B}' \perp \vec{E}'$  mit  $|\vec{B}'| < |\vec{E}'|$
- $|\vec{E}'| = |\vec{B}'|$  und  $\vec{E}' \perp \vec{B}' \rightarrow$  gültig in allen Inertialsystemen

Exkurs: Index vs. Matrix Notation

z.B.  $F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}$

Zeile Spalte

$\Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}$  ;  $F^{\alpha\beta} =$  (zeilenvektor)

$=$   $\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}^{1 \times 4}$   
 $4 \times 4$

nicht definiert

aber  $\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$  ok

$F^{\alpha\beta}$   $\Lambda^{\nu}_{\beta}$

aber:  $C = A B$

$\hookrightarrow C_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$

$$" \Lambda^\nu_\beta \overline{F}^{\alpha\beta} " = \overline{F}^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta\nu} \quad \text{bzG} = \overline{F} \Lambda^T$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{F}'^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \overline{F}^{\alpha\beta} \\ &= \Lambda \overline{F}_{\text{kont}} \Lambda^T \quad \text{aber} \quad \Lambda = \Lambda^T \end{aligned}$$

• allgem. Transformationsmatrix

• kontravariant

$$a'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} a^{\nu} \quad \text{mit } (a^{\nu}) = \begin{pmatrix} \phantom{a^{\nu}} \\ \phantom{a^{\nu}} \\ \phantom{a^{\nu}} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Spalten-} \\ \text{vektor} \end{array}$$

$$J^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

$$\Rightarrow a' = J a \quad \text{kontravariant}$$

beachte:  $J \neq J^T$  i. A.

$$(J^{\mu}_{\nu})^T = J_{\nu}^{\mu}$$

• Invariant

$$\begin{aligned}
 \text{da} \quad a_\mu a^\mu &= \text{Skalar} \\
 &= \underbrace{\eta_{\mu\nu}}_{\text{Zeilenschnittor}} a^\nu a^\mu
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a_\mu) = a^T \eta \quad \Rightarrow a_\mu a^\mu = a^T \eta a$$

$$a'_{\mu 0} = a_{\mu 0}^T J^{-1} \quad \text{bzw} \quad a'_{\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\mu}} a_\nu$$

$$F^{\mu}_{\nu} = \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu}$$

# Lagrange- und Hamilton-Formalismus der Elektrodynamik

- kovariante Bewegungsgleichungen  
Hamilton-Funktion eines freien Teilchens (relativistisch)

$$\text{aus } E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} \quad ; \quad \vec{p} : \text{relativistischer 3er Impuls}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(\vec{x}, \vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}} \quad \text{Hamilton-Funktion eines relativistischen Teilchens}$$

aus Hamilton-Gleichung

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{c^2 p_i}{\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{m \dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} = \gamma m \dot{\vec{x}}$$

Lagrange-Funktion aus Legendre-Transformation

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - H$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma m \dot{x}^2 - \sqrt{\gamma^2 m^2 \dot{x}^2 c^2 + m^2 c^4} ; \text{ mit } \beta = \frac{|\dot{x}|}{c} \\
&= \gamma m \dot{x}^2 - \gamma m c^2 = \gamma m c^2 (\beta^2 - 1) \\
&= - \frac{m c^2}{\gamma}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{L \approx - \frac{m c^2}{\gamma}} \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m c^2 + \dots$$

Lagrange-Funktion für relativistisches, freies Teilchen  $\hat{=}$  relativistischer kinetischer Term T

Punktladung im E-M-Feld

vgl. Lagrange-Funktion mit verallgemeinerten Potential

wenn  $\vec{F} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \vec{\nabla} U$

$$\Rightarrow L = T - U$$

hier  $U = q(\phi - \frac{\dot{x}}{c} \vec{A})$

nicht relativistischer Fall:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - q \left( \phi - \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \cdot \vec{A} \right)$$

$$\hookrightarrow \text{ELG: } m \ddot{\vec{x}} = q \vec{E} + q \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \quad ; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

mit kanonisch konjugierten Impulsen

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \Rightarrow \vec{p} = m \dot{\vec{x}} + \frac{q}{c} \vec{A} = \vec{p}_{\text{kin}} + \frac{q}{c} \vec{A}$$

↳ Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{(\vec{p} - q/c \vec{A})^2}{2m} + q \phi = \frac{\vec{p}_{\text{kin}}^2}{2m} + q \phi$$

mit  $H_{\text{rel}} = \sqrt{\vec{p}_{\text{kin,rel}}^2 c^2 + m^2 c^4} + q \phi$

$$H_{\text{rel}} = \sqrt{(\vec{p} - q/c \vec{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + q \phi$$

Hamilton-Funktion  
für relativistisches  
Teilchen im  
G-M-Feld

aus  $\dot{x}^i = \frac{\partial H_{\text{rel}}}{\partial p_i} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \frac{(\vec{p} - q/c \vec{A}) c^2}{\sqrt{(\vec{p} - q/c \vec{A})^2 c^2 + m^2 c^4}}$

$$\Rightarrow L_{\text{rel}} = - \frac{m c^2}{\gamma} - q \left( \phi - \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \cdot \vec{A} \right)$$

Lorentz-invariante Formulierung

$$U = q \left( \phi - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A} \right) \quad \text{mit } u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} \text{ Ger Geschw.}$$

$$= \frac{1}{\gamma} q u_\mu A^\mu \quad A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \text{ Ger Potential}$$

$$\Rightarrow L(x^\mu, u^\mu) = - \frac{1}{\gamma} (m + q u_\mu A^\mu)$$

mit Wirkung  $S = \int dt L$

und Integration entlang Eigenzeit  $\tau$  :  $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$

$$S = \int dt \gamma L \quad \text{bzw.} \quad \boxed{S = \int d\tau \tilde{L}} \quad \text{LT-inv. Formulierung}$$

$$\text{mit } \boxed{\tilde{L} = \gamma L = -mc^2 - \frac{q}{c} u_\mu A^\mu}$$

Lorentz-invariante Lagrange-Funktion

Achtung :  $\tilde{L}$  liefert nicht die richtigen ELG<sup>(\*)</sup>, da kinetischer Term  $-mc^2$  unabh. von  $x^\mu$  und  $u^\mu$

$$(*) \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

Variation entlang Weltlinie  $\tau$  muß berücksichtigt werden

$$d\tau = dS = \sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2} = d\lambda \sqrt{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{x}}{d\lambda}\right)^2}$$

mit beliebigem Parameter  $\lambda$  und  $\tau(\lambda)$  monotonen Funktion

$$\tilde{u}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Rightarrow u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} = \tilde{u}^\mu \frac{d\lambda}{d\tau}$$

$$d\tau = d\lambda \sqrt{\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\mu} \rightarrow S = \int d\lambda (-m c \sqrt{\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\mu}) + \int d\tau (-q \tilde{u}_\mu A^\mu)$$

$$\Rightarrow S = \int d\lambda \left( -m c \sqrt{\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\mu} - \frac{q}{c} \tilde{u}_\mu A^\mu \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{L} = -m c \sqrt{\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\mu} - \frac{q}{c} \tilde{u}_\mu A^\mu}$$

Kovariante Lagrangefunktion für ein geladenes Teilchen im E-M-Feld



für freies Teilchen:  $\tilde{L} = -m c \sqrt{\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\mu}$

kovariante ELG:

$$\left| \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{u}^\mu} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu} = 0 \right.$$

wobei mit  $\tilde{u}^\mu \rightarrow u^\mu \rightarrow \tilde{L} = -m c \sqrt{u_\mu u^\mu} - \frac{q}{c} u_\mu A^\mu$   
und  $\tau \rightarrow \lambda$  ersetzt werden kann:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu} = 0$$

beachte:  $c^2 \rightarrow u_\mu u^\mu = c^2$  wenn  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$

$\Rightarrow$  aber  $L = -m u_\mu u^\mu$  liefert nicht die richtigen Bewegungsgleichungen!

• Kovariante Lagrangedichten für E-M-Felder

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_t \varphi_i, \partial_{x_j} \varphi_i)$$

Lagrangedichte für Felder  $\varphi_i$ :

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\varphi}_i)} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \varphi_i)}$$

ELG für  
kontinuierliche  
Felder

Hamiltondichte

$$\text{aus } \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$$

+ Legendre-Transformation:

$$\mathcal{H}(\pi_i, \varphi_i, \partial_{x_j} \varphi_i) = \sum_i \pi_i \cdot \dot{\varphi}_i - \mathcal{L}$$

Hamilton-Gleichungen:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_i} \quad ; \quad \dot{\pi}_i = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi_i} \quad ; \quad \frac{\delta}{\delta \varphi_i} : \text{ Funktional-ableitung}$$

## Motivation für kovariante Lagrange dichte

betrachte :  $L = T - V$

und Elektrodynamik

$\frac{\vec{E}^2}{8\pi}$  = Energiedichte des elektrostatischen Feldes

Potenhielle Energiedichte :  $q\phi \rightarrow \rho\phi$

$\phi$  : Potential

$\rho$  : Ladungsdichte

$$\rightarrow \mathcal{L}_{ES} = \frac{\vec{E}^2}{8\pi} - \rho\phi = \frac{1}{8\pi} (\vec{\nabla}\phi)^2 - \rho\phi ; \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$ELG : \mathcal{J}_{ES} = \mathcal{L}_{ES}(\phi, \partial_i\phi)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{ES}}{\partial \phi} = -\rho ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{ES}}{\partial (\partial_i \phi)} = \frac{1}{4\pi} \partial_i \phi = -\frac{1}{4\pi} \vec{E}_i$$

$$\text{hier } \partial \mathcal{L}_{ES} / \partial (\partial_t \phi) = 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow -\rho = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

Maxwell-Gauß für elektro-  
statisch

analog für  $\vec{B}$ -Feld

generierte Potentialdichte:  $\vec{j} \cdot \vec{A}$

mit  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  (analog zu  $q \vec{v}$ )

$$\mathcal{L}_{NS} = \frac{1}{8\pi} \vec{B}^2 - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A}$$

$$= \frac{1}{8\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A}$$

$$= \frac{1}{8\pi} (\epsilon^{ijk} \partial_j A_k \epsilon^{ilm} \partial_l A_m) - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A}$$

EKG:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{NS}}{\partial A_i} = -\frac{1}{c} j_i$$

$$\text{mit } \frac{\partial(\partial_i \phi_j)}{\partial(\partial_\mu \phi_\nu)} = \delta_\mu^i \delta_\nu^j$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_i)} \stackrel{i \rightarrow q}{=} \frac{1}{8\pi} \epsilon^{qjk} \epsilon^{qlm} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_i)} (\partial_j A_k \partial_l A_m)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \epsilon^{qjk} \epsilon^{qlm} (\delta_\mu^j \delta_\nu^i \partial_l A_m + \delta_\mu^l \delta_\nu^i \partial_j A_k)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \epsilon^{qki} \underbrace{\epsilon^{qlm} \partial_l A_m}_{(\vec{\nabla} \times \vec{A})_q} = B_q$$

$$= \frac{1}{4\pi} \epsilon^{qki} B_q$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{MS}}{\partial(\partial_\mu A_i)} = \frac{1}{4\pi} \epsilon^{qki} \partial_\mu B_q = -\frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B})_i$$

$$\Rightarrow \text{ELG: } \vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi \vec{j} \quad \checkmark \quad \text{Ampère}$$

# Gesamt-Lagrangedichte für Elektrodynamik?

$$\text{Ansatz: } \mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_E + \alpha \mathcal{L}_M$$

$$\text{mit } \mathcal{L}_E = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2 - \rho \phi \quad \text{und} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{und } \mathcal{L}_M = \frac{1}{8\pi} \vec{B}^2 - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \quad \text{und} \quad \partial_t \vec{A} \neq 0$$

mit  $\alpha = -1$  liefert  $\mathcal{L}_{EM}$  inhom. Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \rho \phi + \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A}}$$

Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes

$$\mathcal{L}_E = \mathcal{L}(\phi, \vec{A}, \partial_t \vec{A}, \partial_i \phi, \partial_i A_i)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left( \left( -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right) - \rho \phi + \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A}$$

ELG:

$$\phi : \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad \checkmark$$

$$\vec{A} : \frac{1}{c} \vec{j} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}_{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t A_i)}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \vec{j} \quad \checkmark$$

Kovariante Lagrange dichte und ELG

mit  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$

Kovariant,  
Lorentz-invariant

und  $j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}; A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu}$$

$$c = 1$$

Kovariante  
Lagrange dichte  
des elektromag.  
Feldes

## Kovariante Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi_j)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_j)} \rightarrow \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_j)}$$

$$\rightarrow \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = 0 \right) \quad \begin{array}{l} \phi_i : \text{beliebige} \\ \text{Felder} \\ \text{z.B. } \phi_i \hat{=} A^\mu \text{ für} \\ \text{EDynamik} \end{array}$$

Kovariante ELG

für E-M-Felder:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \rightarrow \quad F = F(\partial_\mu A_\nu)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_{EM}(A^\mu, \partial^\mu A^\nu)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial A^\mu} = -j_\mu$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= 2 \left( (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) \right) \end{aligned}$$



$$\frac{\partial F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = 4(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = 4 F_{\nu\mu}$$

ELG:

$$\partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = 4 \partial^\nu F_{\nu\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial^\nu F_{\nu\mu} = 4\pi j_\mu}$$

kovariante Maxwell-Gleichungen (inkl. j)

Kovariantes Noether Theorem

↳ Erhaltungsgrößen; vgl. Noether-Theorem für Felder

betrachte  $\phi_i \rightarrow \phi_i + \delta\phi_i$  mit  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$

mit Herleitung des ELG aus Wirkung

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad \text{mit} \quad \delta S = 0$$

$$\text{wenn } \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} = \mathcal{L} + \partial_\mu J^\mu \quad (*)$$

$\partial_\mu J^\mu$ : Viererdivergenz trägt nicht zur  
Variation der Wirkung bei  
→ "Oberflächenterm" = const.

Dann  $\phi_i \rightarrow \phi_i + \delta\phi_i$  Symmetrietransformation  
und es existiert eine Erhaltungsgröße

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta(\partial_\mu\phi_i)$$

mit  $\delta(\partial_\mu\phi_i) = \partial_\mu\delta\phi_i$

und  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} = 0 \quad \bar{e} \in G$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right) \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \partial_\mu \delta\phi_i$$

$$= \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i \right) \stackrel{!}{=} \partial_\mu J^\mu \quad \text{aus (*)}$$

$$A^2 = A_\mu A^\mu = A^\mu A_\mu$$

$$\partial_\mu A \equiv \frac{\partial A}{\partial x^\mu} ; \quad \partial^\mu = \frac{\partial A}{\partial x_\mu} ;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = B^\mu ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} = B_\mu ; \quad B_\mu = \eta_{\mu\nu} B^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \phi)} \equiv B_\nu$$

$$\text{mit } j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i - \mathcal{J}^\mu$$

$$\Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung für Stromdichte } j^\mu$$

$\Rightarrow$  "Ladungserhaltung" /  
Noether Ladung

betrachte Stromerhaltung in der Elektrodynamik

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \quad ; \quad j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{aus} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$$

$$\text{und} \quad \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi \partial_\nu j^\nu$$

$$= 0 \quad \text{wg.} \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

$$= -\partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu}$$

## Energie-Impuls-Tensor

- Hamiltondichte:

betrachte kanonisch-konjugierten Impulsdichten

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0$$

$$\vec{\pi}_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \vec{A})} = \frac{1}{4\pi c} \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{4\pi c} \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dot{\phi} \pi_{\phi} + \dot{\vec{A}} \vec{\pi}_A - \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \rho \phi - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \\ &= -\frac{1}{4\pi c} \dot{\vec{A}} \cdot \vec{E} - \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \rho \phi - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

bzw. für  $\rho = 0 = \vec{j}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi c} \dot{\vec{A}} \cdot \vec{E} - \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

≠ Energiedichte des E-M-Feldes

$$\text{mit } \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla} \phi - \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \vec{E}^2 - \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{E} + \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{E}) &= (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{E} + \phi \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}} \\ &= 0 \quad \text{wg } \rho = 0 \end{aligned}$$

betrachte Gesamtenergie

$$\bar{E} = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left( \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}(\phi \vec{E}) + \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right)$$

$$= \int d^3x \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \text{Oberflächenterm}$$

$\stackrel{!}{=} \text{Energie - Offset}$

$\Rightarrow$  Hamilton-Dichte:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)}$$

Energiedichte des  
E-M-Feldes

Energie-Impuls-Tensor

Energie + Impuls Erhaltung aus Invarianz der  
Wirkung gegenüber zeitlicher + räumlicher Verschiebung  
 $\stackrel{!}{=} \text{Symmetrie der Lagrangefunktion}$

hier mit 4er-Notation / kovariante Formulierung

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu \quad \rightarrow \delta \phi_i = \partial_\mu \phi_i \delta x^\mu$$

mit Noether-Theorem

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right)$$

und Verschiebung:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \quad \text{im Sinne der Kettenregel auf Felder } \phi_i$$

$$\mathcal{J}^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu$$

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i \delta x_\nu - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \delta x_\nu$$

$$= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta x_\nu$$

$\partial_\mu j^\mu = 0$  unabhängig von der Wahl von  $\delta x_\nu$

$$\Rightarrow \boxed{T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}}$$

kanonische  
Form des  
Energie-Impuls-  
Tensors

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0} \quad \text{Lagrange-Formulierung} \\ \text{der Energie-Impulserhaltung}$$

Bemerkung:

$$\text{mit } \pi_i^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \quad \text{kanonisch-konjugierte} \\ \text{Impulsdichte}$$

$$\text{und } \mathcal{H}^{\mu\nu} = \pi_i^\mu \partial^\nu \phi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad \text{Legendre-Transformation}$$

Bsp.: E-M-Felder

$$\text{im Vakuum: } \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0; \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}; \quad \phi_i \rightarrow A_\nu$$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} \partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

hat nicht die gesuchte Form

1)  $T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$  aber: Symmetrie gefordert  
wg. Drehimpulserhaltung,  
Actio = Reactio



$$2) T^{60} = -\frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \vec{A} - \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

→ symmetrischer Tensor durch Erweiterung:

betrachte:  $\partial_\lambda t^{\mu\lambda\nu}$  mit  $t^{\mu\lambda\nu} = -t^{\lambda\mu\nu}$

$$\partial_\mu \partial_\lambda t^{\mu\lambda\nu} = 0$$

antisymmetrisch  
in den ersten beiden  
Indizes

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda t^{\mu\lambda\nu}$$

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0 \text{ erfüllt}$$

mit  $t^{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} A^\nu$

$$\partial_\lambda t^{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{4\pi} \underbrace{(\partial_\lambda F^{\mu\lambda})}_{=0 \text{ wg } j^\mu = 0} A^\nu + F^{\mu\lambda} \partial_\lambda A^\nu$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{T}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} (\partial^\nu A_\lambda - \partial_\lambda A^\nu) + \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \gamma^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} + \end{aligned}$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\nu\lambda} F^{\lambda\mu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

Symmetrischer Energie-Impuls-Tensor

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad \text{Energiedichte}$$

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i = \vec{S}_i \quad \text{Poynting Vektor / Impulsdichte}$$

$$T^{ij} = -\frac{1}{4\pi} (\vec{E}^i \vec{E}^j + \vec{B}^i \vec{B}^j - \delta^{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)) \quad \text{Maxwell'scher Spannungstensor}$$

Kopplung von Teilchenbahnen mit  $\vec{E}$ - $\vec{M}$ -Feld

mit Lagrangefunktion + Lagrange-Dichte:

$$L = L_{\text{frei, Teilchen}} + \int d^3x \mathcal{L}_{EM}$$

z.B. Punktladung mit Ladung  $q$

$$\rho = q \delta(\vec{x}' - \vec{x}) \quad \text{Ladungsdichte}$$

$$j^\mu = \rho u^\mu = q u^\mu \delta(\vec{x}' - \vec{x})$$

$$\text{WW-Term in } \mathcal{L}_{EM} : j_\mu A^\mu = q u_\mu A^\mu \delta(\vec{x}' - \vec{x})$$

Bewegungsgleichung / Lagrangefunktion für Teilchen

$$L = -m \sqrt{u_\mu u^\mu} - q u_\mu A^\mu$$

$$\text{ELG: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\partial_\mu L = -q u_\alpha \partial_\mu A^\alpha$$

$$\partial_{u^\mu} L = -m u_\mu - q A_\mu$$

$$\frac{dA_\mu}{d\tau} = (\partial_\alpha A_\mu) u^\alpha$$

$$-m \frac{du_\mu}{d\tau} - q u^\alpha \partial_\alpha A_\mu + q u^\alpha \partial_\mu A_\alpha = 0$$

$$\Rightarrow m \frac{du_\mu}{d\tau} = -q u^\alpha (\partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha) = -q u^\alpha (\partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha)$$

$$= -q u^\alpha F^\alpha{}_\mu = -q u^\alpha F_{\alpha\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{m \frac{du^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\alpha} u_\alpha}$$

kovariante Bewegungsgleichung für Punktladung im E-M-Feld

Kopplung mit Feldgleichungen aus  $\mathcal{L}_{EM}$   
 $\hat{=}$  Maxwellgleichungen

Eichinvarianz / Eichfelder

betrachte:  $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi(x^\nu)$

$\chi(x^\nu)$ : Eichfeld

$A^\mu$  nur bis auf  $\partial^\mu \chi$  bestimmbar (Hilfsgröße)

E-M-Felder unabhängig von  $\chi(x^\nu)$

$$\text{vgl. } \vec{B} = \vec{0} \times \vec{A} = \vec{0} \times \vec{A}' ; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{0} \chi$$

Wirkung  $S$  / ELG unabhängig von  $\chi$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \overline{F}_{\mu\nu} \overline{F}^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$$

$$\overline{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \chi) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \chi)$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \chi = \overline{F}_{\mu\nu} ; \text{Abc. vertauschen}$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}' = \int d^4x (\mathcal{L} - j_\mu \partial^\mu \chi)$$

$$\stackrel{\text{p. \u00c4.}}{=} \int d^4x (\mathcal{L} + \underbrace{(\partial^\mu j_\mu) \chi}_{=0 \text{ wg. Strom-erhaltung}}) + \text{"Oberfl\u00e4chenterm"}$$

tr\u00e4gt nicht zur Variation bei

$$\hat{=} \mathcal{S} \Rightarrow \text{ELG}(\mathcal{L}') = \text{ELG}(\mathcal{L})$$

### Bemerkungen

- Invarianz von  $\mathcal{S}$  bez\u00fcglich  $\chi$  f\u00fchrt nicht auf Erhaltungsgro\u00dfe wie bei Noether-Symmetrie

$\chi(x^\nu)$ : lokale Gro\u00dfe  $\rightarrow$  lokale Invarianz

Symmetrietransformation: globale Invarianz

- Eich(feld)theorie: (Feld)Theorien, in denen Eichfelder auftreten; z.B. Elektrodynamik mit

Potenziale

wichtig in QM, QFT

z.B. Beschreibung durch komplexe Wellenfunktionen

$\psi$ : Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $\psi\psi^*$ ,

nur bis auf Phase  $e^{-i\varphi(\vec{x})}$  bestimmbar

Fixierung der Eichfelder

z.B. Lorenz-Eichung

betrachte inhom. Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu \overline{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$= \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 4\pi j^\nu ; \quad \square = \partial_\mu \partial^\mu$$

Lorenz-Eichung:  $\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}$

—  
 Ben. Ludvig Lorenz  
 dän. Physiker 1828-1851  
 ≠ Henrih Lorentz  
 Niederl. 1853-1928

d'Alembert  
operator

⇒ Wellengleichung für  $A^\mu$ :

$$\square A^\mu = 4\pi j^\mu$$

Wahl möglich?

wenn  $\partial_\mu A^\mu = f(x^\nu) \neq 0$

und  $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \square \chi = f + \square \chi$$

mit  $\square \chi = -f$  (\*) Lorenz-Eichung für  $A'^\mu$   
erfüllt, d.h. es kann immer  
ein  $\chi$  gefunden werden mit  
 $\partial_\mu A'^\mu = 0$

(\*) bestimmt  $\chi$  noch nicht vollständig,  $\square \chi = 0$   
homogene Lösung kann zu  $\chi$  addiert werden  
→ weiterer Freiheitsgrad zur Bestimmung von  $\chi$



Hinweis: Lösung der inhomogenen Wellenfunktion

$$\square A^\mu = 4\pi j^\mu \quad \text{mit}$$

$$\text{Greensfunktion} \quad \square_{x^\mu} D(x^\mu, x'^\mu) = 4\pi \delta^{(4)}(x'^\mu - x^\mu)$$

$$A^\mu = \int d^4 x'^\mu D(x^\mu, x'^\mu) j^\mu(x'^\mu)$$

Coulomb-Eichung

weist für Elektrostatik

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0} \quad \text{Coulomb Eichung}$$

betrachte 0-Komponente von  $\partial_\mu F^{\mu\nu}$

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_\mu (\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu) = \partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i), \quad \begin{array}{l} 0 = t \\ i = 1, 2, 3 \\ \quad \quad \quad x, y, z \end{array}$$

$$= -\Delta \phi + \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad ; \quad \phi = A^0$$

mit Coulomb-Eichung

$$\boxed{\Delta \phi = -4\pi \rho}$$

Poissonsgleichung

räumliche Komponenten:

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \square A^i - \partial_\mu \partial^i A^\mu = \square A^i - \partial^i \partial_\epsilon \phi + \partial^i \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

mit Coulomb-Eichung:

$$\boxed{\square \vec{A} = 4\pi \vec{j} - \vec{\nabla} \partial_\epsilon \phi \equiv 4\pi \vec{j}_T}$$

transversale  
Stromdichte

↳ Coulomb-Eichung = transversale Eichung  
= Stabilitätseichung

Weitere Eichungen möglich

z.B.  $\phi = 0$  temporale Eichung / Weyl-Eichung

# Lagrange - Funktion für gekrümmter Raumzeit

→ Gestirngleichung

→ Allgemeine Relativitätstheorie:

Bewegungsgleichungen nicht durch Kräfte,  
sondern Gestirnen in gekrümmter Kz

Krümmung durch Massen, bzw. allgemein  
durch Energie

vgl. Gestirngleichung: kürzeste Strecke in 2D/3D

$$\text{aus } S = \int ds \quad ; \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{x}^j) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jkl}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$$

z.B. Kugeloberfläche mit Radius  $R$ ;  $x^i = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$

$$g_{ij} = \text{diag}(1, R^2, R^2 \sin^2 \theta)$$

## Kovariante Form

4D Raumzeit

$$dS_{4D}^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu ; \text{ z.B. } g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

Minkowski-Metrik

oder in Kugelkoordinaten:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

mit Gravitationspotential  $\phi(\vec{x})$

z.B.  $\phi = -GM/r$  für Punktmasse

$$\rightarrow g_{\mu\nu} = (1 + 2\phi, -(1 + 2\phi)^{-1}, -(1 + 2\phi)^{-1}, -(1 + 2\phi)^{-1})$$

mit  $x, y, z$

$$= (1 + 2\phi, -(1 + 2\phi)^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$$

für  $(r, \theta, \varphi)$  : Schwarzschild -  
Metrik

221

Bewegungsgleichung aus  
Extremalwertberechnung des Weges

$$S = \int ds = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

$$= \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} ; u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

oder aus Wirkung für ein freies Teilchen

$$\text{mit } L = -m \sqrt{u_\mu u^\mu} = -m \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}$$

$$S = \int d\tau L$$

wg. Äquivalenzprinzip:

alle Massen fallen mit gleicher

Beschleunigung im Gravitationsfeld

• Fundamentaler Unterschied zu Teilchen

im E-M-Feld :  $a \propto 1/m$

mit  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\lambda)$  keine Abhängigkeit von  $u^\mu$

$$L_0 \quad L = L(x^\mu, u^\mu)$$

$$\in LG: \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\alpha} u^\alpha) - \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\beta}) u^\alpha u^\beta = 0$$

$$\text{Formulierung für } \dot{u}^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$$

$$(\partial_\beta g_{\mu\alpha}) u^\beta u^\alpha + g_{\mu\alpha} \dot{u}^\alpha - \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\beta}) u^\alpha u^\beta = 0$$

symmetrisch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_\beta g_{\mu\alpha}) u^\beta u^\alpha + \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\mu\beta} u^\alpha u^\beta + g_{\mu\alpha} \dot{u}^\alpha \\ - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\tau\rho} u^\tau u^\rho = 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \ddot{u}_\mu + \Gamma_{\mu\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0 \right\} \quad \ddot{u}_\mu = g_{\mu\alpha} \ddot{u}^\alpha$$

$$\left\{ \frac{d\dot{u}^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0 \right\} \quad \text{durch Multiplikation mit } g^{\mu\nu} \hat{=} (g_{\mu\nu})^{-1}$$

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \quad \text{1. Art}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}) \quad \text{2. Art}$$

Christoffel-Symbole 1. und 2. Art

auch: affiner Zusammenhang

für flache  $\mathbb{R}^n$  mit kartesischen Koordinaten:

$$\Gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\dot{u}^\mu}{d\tau} = 0$$

für  $|\phi| \ll 1$  und  $|\dot{\vec{x}}| \ll 1$

$$\frac{d\dot{u}^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}\phi$$

aber: - Erklärung für Perihelionabweichung für Merkur  
- Dynamik um Neutronensterne / Schwarze Löcher

Kovariante Ableitung

$$\nabla_\mu \vec{A}^\nu = \partial_\mu \vec{A}^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \vec{A}^\alpha$$

"richtige" Ableitung  
in gekrümmtem  
 $\mathbb{R}^4$

Lagrange-Dichte / Felder in gekrümmtem  $\mathbb{R}^4$   
mit invariantem Volumen (4.9)

$$\int d^4x \sqrt{-g}$$

wobei  $g = \det(g_{\mu\nu})$

mit Signatur von  $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$

$$\omega \quad g < 0$$



$\sqrt{-g}$  = Funktionaldeterminante Jacobi-Determ.

z. B. Kugelkoordinaten:

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$$

→ invariante Wirkung

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}$$

mit  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_\mu, \partial_\mu \phi_\nu)$  für beliebige  
Felder  $\phi_\mu$

$$\text{ELG: } \left[ \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \phi_\nu)} - \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial \phi_\nu} = 0 \right]$$

z. B.  $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$

mit  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$