Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Wintersemester 2017/18

Dozent: Robi Banerjee (banerjee@hs.uni-hamburg.de)

Blatt #5 Abgabe: 20.11.2017 **vor** der Vorlesung

Abgaben werden nur mit Name/Matrikelnummer und Angabe der Gruppe akzeptiert.

1. **Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung, Problem I**

   Betrachte die Wegstrecke $S = \int_O^P (y'^2 + yy' + y^2)\mathrm{d}x$, die den Ursprung O mit dem Punkt $P(1,1)$ in der x-y-Ebene verbindet.

   (a) Stelle die Euler-Lagrange-Gleichung auf.

   (b) Gib die Gleichung $y(x)$ für den Weg an, der das Integral S stationär macht.

   2+2 = 4 Punkte

2. **Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung, Problem II**

   Zeige unter Verwendung von Polarkoordinaten (r, φ), dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei gegebenen Punkten in der Ebene eine Gerade ist.

   (a) Schreibe zunächst die Weglänge mit Hilfe der Polarkoordinaten.

   (b) Formuliere die Euler-Lagrange-Gleichung.

   (c) Integriere die Differentialgleichung und zeige, dass die resultierende Lösung eine Gerade beschreibt.

   1+2+2 = 5 Punkte

3. **Trajektorien im gekrümmten Raum**

   In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird die Gravitation durch gekrümmte RAUMZEITen beschrieben. Bahnen von Teilchen und Licht werden hierin durch Geodäten, d. h. kürzeste Wege beschrieben.

   Betrachte das räumliche Linienelement ds in Polarkoordinaten mit

   $$\mathrm{d}s^2 = (1 - 2\Phi(r))^{-1}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2\,,$$

   wobei $\Phi = \Phi(r)$ das Gravitationspotential ist.

Bestimme das Differential $r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi$ in diesem Raum. Hinweis: Ermittle die passende Lagrange-Funktion $L = L(r, r')$ und verwende die Konstante

$$l = r' \frac{\partial L}{\partial r'} - L(r, r').$$

Siehe auch Aufgabe 2 für den Fall $\Phi = 0$.

4 Punkte

4. **Geodäte auf einem Kegel**

   Betrachte einen Kegel in Zylinderkoordinaten mit der Gleichung $z = \lambda\rho$ und bestimme die Geodäte $\varphi = \varphi(\rho)$.

   (a) Gib die Länge eines Wegelementes in Zylinderkoordinaten an.

   (b) Wie lautet der metrische Tensor für die Koordinaten ρ und φ?

   (c) Stelle die Euler-Lagrange-Gleichung auf.

   (d) Integriere die resultierende Differentialgleichung.

   (e) Welche geometrische Form hat die Geodäte für den Fall $\lambda \to 0$?

1+1+2+2+1 = 7 Punkte