Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Wintersemester 2017/18

Dozent: Robi Banerjee (banerjee@hs.uni-hamburg.de)

Blatt #6 — Abgabe: 27.11.2017 **vor** der Vorlesung

Abgaben werden nur mit Name/Matrikelnummer und Angabe der Gruppe akzeptiert.

1. **Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung**

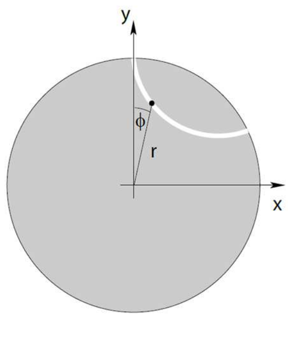
   Betrachte zwei feste Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in der x-y-Ebene, die durch eine Kurve $y = y(x)$ verbunden sind. Bestimme die Form der Kurve, die durch Rotation um die x-Achse zu einer stationären Oberfläche wird.

   (a) Berechne zunächst die entstehende Gesamtfläche und formuliere damit die Euler-Lagrange-Gleichung.

   (b) Zeige, dass die Kurve die Form $y = y_0 \cosh[(x - x_0)/y_0]$ hat, wobei x_0 und y_0 Konstanten sind.

   2+2 = 4 Punkte

2. **Variationsproblem: Tunnel durch die Erde**



   Betrachte einen Tunnel durch die Erde, der zwei Punkte auf der Erdoberfläche verbindet. Der Tunnelverlauf sei so gewählt, dass er die Zeit T minimiert, in der eine am Tunneleingang mit der Anfangsgeschwindigkeit Null startende Punktmasse m den Tunnel unter Einfluss der Gravitation durchrollt. Das Gravitationspotential im Inneren eines homogenen massiven Körpers ist durch $V(r) = \alpha r^2$ gegeben. Sekundäreffekte wie Reibung und Corioliskräfte sind zu vernachlässigen.

(a) Schreibe das zu minimierende Funktional in der Form $T = T[r(\phi)]$.

(b) Drücke die Geschwindigkeit $v(r)$ der Punktmasse mit Hilfe der Energieerhaltung aus.

(c) Berücksichtige, dass der Integrand nicht explizit von ϕ abhängt und nutze die resultierende Erhaltungsgröße, um die Differentialgleichung für den Tunnel zu formulieren.

(d) Führe eine Variablentrennung durch und integriere die Differentialgleichung, um die Bahnkurve $\phi(r)$ zu erhalten. Eine Lösung dieses Integrals ist nicht Teil der Aufgabe.

2+1+2+1 = 6 Punkte

3. **Zyklische Koordinaten, Erhaltungsgrößen**

Ein Teilchen sei durch Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) spezifiziert und bewege sich in einem Potential der Form $V(\mathbf{r}) = V(\rho, \varphi + kz)$. Zeige, dass die Koordinate $\eta = \varphi - kz$ eine zyklische Koordinate der Lagrange-Funktion ist und bestimme die zugehörige Erhaltungsgröße.

3 Punkte

4. **Noether-Theorem, Impulserhaltung in homogenen Systemen**

Systeme, die unter räumlichen Translationen in beliebige Richtungen invariant sind, bezeichnet man als homogen.

(a) Zeige, dass die Lagrange-Funktion eines Systems von N Teilchen, die nur über Zwei-Teilchen-Potentiale (d. h. $V(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) = \sum_{\nu<\mu} V(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)$) miteinander wechselwirken, translationsinvariant ist. Betrachte dazu eine Koordinatentransformation der Form $\mathbf{r}'_\nu = \mathbf{r}_\nu + \alpha\mathbf{n}$, die alle Teilchenkoordinaten $\mathbf{r}_\nu$ gleichmäßig verschiebt.

(b) Folgere daraus, dass der Gesamtimpuls des Systems eine Erhaltungsgröße ist.

(c) Zeige, dass das System rotationsinvariant ist, wenn die Zwei-Teilchen-Potentiale Zentralpotentiale sind. Betrachte dazu eine homogene Rotation des Systems um die z-Achse (d. h. alle Teilchenkoordinaten werden um den gleichen Winkel gedreht) und folgere, dass der Gesamtdrehimpuls eine Erhaltungsgröße ist.

2+2+3 = 7 Punkte