

Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Wintersemester 2017/18

Dozent: Robi Banerjee (banerjee@hs.uni-hamburg.de)

Blatt #7

Abgabe: 04.12.2017 **vor** der Vorlesung

Abgaben werden nur mit Name/Matrikelnummer und Angabe der Gruppe akzeptiert.

1. Lösung einer Differentialgleichung durch Legendre-Transformation

Die Lösungen von Differentialgleichungen sind invariant unter Legendre-Transformation. Diese Eigenschaft soll genutzt werden, um die Differentialgleichung

$$y'(x) - \ln [xy'(x) - y(x)] = 0$$

zu lösen.

- Formuliere zunächst die Ursprungsgleichung mit Hilfe der Legendre-Transformierten von $y(x)$.
- Bilde die Rücktransformation und zeige, dass damit die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung gefunden worden ist.

2+2 = 4 Punkte

2. Hamilton-Mechanik: Testladung im E- und B-Feld

Gegeben ist die Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + e\Phi$$

für ein Testteilchen mit der Ladung e im \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld.

- Leite daraus die Hamilton-Gleichungen ab und
- ermittle daraus das resultierende Kraftfeld \mathbf{F} , d.h. $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ mit den Beziehungen für das elektrische Feld $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ und das magnetische Feld $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

2+2 = 4 Punkte

3. Zentralpotential im Hamilton-Formalismus

Betrachte eine Punktmasse m im Zentralpotential $V(r)$.

- (a) Wie lautet die zugehörige Hamilton-Funktion in Kugelkoordinaten?
- (b) Wie lauten die Hamilton-Gleichungen? Gibt es zyklische Koordinaten?
- (c) Löse die Bewegungsgleichungen für ϑ und φ . Benutze die Anfangsbedingung $\vartheta = \pi/2$ (dies entspricht einer geeigneten Orientierung des Koordinatensystems gemäß Blatt 2 Aufgabe 4).
- (d) Wie sieht die vereinfachte Form der Bewegungsgleichung für r folglich aus?

1+2+2+1 = 6 Punkte

4. Hamilton-Gleichungen für eine Achterbahn

Ein Achterbahnwagen mit der Masse m bewege sich entlang einer reibungsfreien Strecke, die in der x - y -Ebene verläuft (x horizontal, y vertikal nach oben). Die Höhe des Gleises über dem Boden ist durch $y = h(x)$ gegeben.

- (a) Formuliere die Lagrange-Funktion, den generalisierten Impuls sowie die Hamilton-Funktion mit Hilfe der generalisierten Koordinate x . Hinweis: Betrachte hierzu zunächst das Wegelement ds entlang des Gleises.
- (b) Gib die Hamilton-Gleichungen an und zeige, dass sie zu dem selben Ergebnis führen wie das zweite Newtonsche Gesetz, das sich auf die Form $F_{\text{tang}} = -dV/ds = m\ddot{s}$ bringen lässt. Schreibe jeweils die Gleichung für \ddot{x} .

3+3 = 6 Punkte