Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Wintersemester 2017/18

Dozent: Robi Banerjee (banerjee@hs.uni-hamburg.de)

Blatt #8 — Abgabe: 11.12.2017 **vor** der Vorlesung

Abgaben werden nur mit Name/Matrikelnummer und Angabe der Gruppe akzeptiert.

1. **Hamilton-Gleichungen in Zylinderkoordinaten**

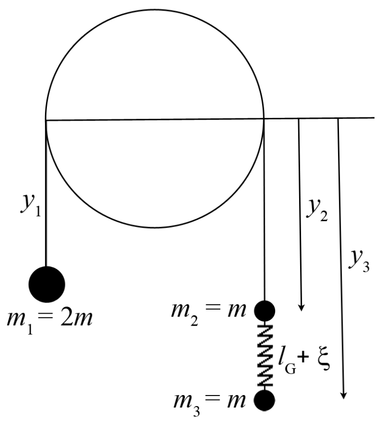
   Betrachte ein Teilchen der Masse m, dessen Bewegung auf die Oberfläche eines reibungsfreien Zylinders mit dem Radius R beschränkt ist; die Oberfläche ist in Zylinderkoordinaten durch die Gleichung $\rho = R$ gegeben. Die Masse erfährt nur eine einzige äußere Kraft $\mathbf{F} = -kr\mathbf{e}_r$ mit der Konstanten $k > 0$ (r ist der Abstand vom Ursprung).

   (a) Bestimme die Hamilton-Funktion mit z und φ als generalisierte Koordinaten.

   (b) Löse die entsprechenden Hamilton-Gleichungen.

   2+2 = 4 Punkte

2. **Atwoodsche Fallmaschine mit Feder**



   Betrachte eine modifizierte Atwoodsche Fallmaschine gemäß obiger Abbildung. Das linke Gewicht habe die Masse $m_1 = 2m$ und sei über eine (masse- und reibungslose) Schnur fest mit dem zweiten Gewicht verbunden. Die beiden Gewichte auf der rechten Seite haben jeweils die gleiche Masse m und sind durch eine masselose Feder mit der Federkonstanten k verbunden (die Gleichgewichtslänge ist l_G). Die Auslenkung des dritten Gewichtes sei mit ξ bezeichnet.

(a) Formuliere die Zwangsbedingungen und zeige, dass die Summe aus gravitativer potentieller Energie und der Federenergie $V = \frac{1}{2}k\xi^2$ beträgt (plus eine Konstante, die man als null annehmen kann).

(b) Bestimme die kinetische Energie und die Impulse sowie die Hamilton-Funktion für $y \equiv y_1$ und ξ.

(c) Formuliere die vier Hamilton-Gleichungen und stelle die Bewegungsgleichungen $\ddot{y}$ und $\ddot{\xi}$ auf. Gib die Lösung und die resultierende Kreisfrequenz an.

2+2+2 = 6 Punkte

3. **Berechnung von Poisson-Klammern**

(a) Berücksichtige, dass man für die Komponenten des Drehimpulses den Epsilon-Tensor nutzen kann, so dass gilt $L_i = \sum_{m,n=1}^{3} \varepsilon_{imn} x_m p_n$ und berechne folgende Poisson-Klammern:
$\{L_i, x_j\}$, $\{L_i, p_j\}$, $\{L_i, L_j\}$, $\{\mathbf{L}^2, L_i\}$ für $i, j = 1, 2, 3$.

(b) Betrachte ein Teilchen im Zentralpotential $V = V(r)$ in Kugelkoordinaten (r, θ, φ). Zeige explizit unter Anwendung der Poisson-Klammer, dass der Drehimpuls p_φ eine Erhaltungsgröße ist. Gib auch die Bewegungsgleichungen für p_r und p_θ an (siehe auch Aufgabenblatt #7).

(c) Zeige für ein freies Teilchen in 2D-Polarkoordinaten (ρ, ϕ), dass der Linearimpuls $p_x = p_x(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi)$ erhalten ist. Benutze hierzu die Poisson-Klammern.

2+2+2 = 6 Punkte

4. **Kanonische Transformationen**

(a) Eine kanonische Transformation kann durch eine erzeugende Funktion $F(\tilde{q}, p)$ angegeben werden, wobei p der alte Impuls und $\tilde{q}$ die neue Koordinate ist. Durch welche der folgenden Funktionen werden kanonische Transformationen $(q, p) \to (\tilde{q}, \tilde{p})$ erzeugt? Wenn möglich, gib die transformierten Koordinaten $\tilde{q}$ und $\tilde{p}$ explizit als Funktion von q und p an.:

$$\text{i. } F(\tilde{q}, p) = \tilde{q}^2 + p^2 \quad \text{ii. } F(\tilde{q}, p) = -(\mathrm{e}^{\tilde{q}} - 1)^2 \tan p$$

(b) Untersuche, ob eine der folgenden Transformationen $(q, p) \to (\tilde{q}, \tilde{p})$ kanonisch ist:

$$\text{i. } \tilde{q} = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right),\ \tilde{p} = q\cot p \quad \text{ii. } \tilde{q} = \arctan\frac{\alpha q}{p},\ \tilde{p} = \frac{1}{2}\alpha q^2\left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2}\right)$$

2+2 = 4 Punkte