Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Wintersemester 2017/18

Dozent: Robi Banerjee (banerjee@hs.uni-hamburg.de)

Blatt #9 — Abgabe: 18.12.2017 **vor** der Vorlesung

Abgaben werden nur mit Name/Matrikelnummer und Angabe der Gruppe akzeptiert.

1. **Perle auf rotierendem Ring - reloaded**

   Eine Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einem Drahtring mit dem Radius R. Der Ring rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Durchmesser im Schwerefeld $\mathbf{g}$ (siehe Aufgabe 1, Blatt #4). Verwende die Hamilton-Funktion, um die Bewegungsgleichungen für θ und den konjugierten Impuls p_θ zu bestimmen. Finde alle Fixpunkte des Systems, d.h. Punkte $\tilde{\theta}, \tilde{p}_\theta$ im Phasenraum, für die $\dot{\theta}|_{\tilde{\theta},\tilde{p}_\theta} = \dot{p}|_{\tilde{\theta},\tilde{p}_\theta} = 0$. Wie viele Gleichgewichtspositionen gibt es für die Perle, in Abhängigkeit von den Parametern R, ω und g? Zeichne diese sowie eine kleine Schwingung um einen stabilen Gleichgewichtspunkt schematisch in ein Phasenraumdiagramm ein.

   4 Punkte

2. **Bahnen im Phasenraum**

   Es werde eine Masse im freien Fall in einem konstanten Gravitationsfeld betrachtet. Die Punkte A_0, B_0, C_0 und D_0 im Phasenraum repräsentieren vier verschiedene mögliche Anfangszustände ($t = 0$) gemäß folgender Tabelle:

	A_0	B_0	C_0	D_0
x_0	0	X	X	0
p_0	0	0	P	P

   Gib die Orte $x(t)$ und die Impulse $p(t)$ als Funktion von t an und beweise, dass die Zustände A, B, C und D zu einem späteren Zeitpunkt ein Parallelogramm bilden, das denselben Flächeninhalt hat wie das ursprüngliche Rechteck $A_0B_0C_0D_0$.

   3 Punkte

3. **Kriterium für eine kanonische Transformation**

   Betrachte ein nicht explizit zeitabhängiges System mit einem Freiheitsgrad, d. h. $(q, p, H(q, p))$. Zeige, dass eine Transformation $(q, p) \to (Q, P)$ kanonisch ist, falls $p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q$ ein totales Differential darstellt.

   3 Punkte

4. **Kanonischen Transformation, Problem I**

   Ein Teilchen der Masse $m = 1/2$ bewege sich auf der x-Achse im Potential $V(q) = \mathrm{e}^q$. Berechne die Erzeugende $F(q, P)$, die die Hamilton-Funktion

   $$H = p^2 + e^q \quad \text{auf die Gestalt} \quad \tilde{H} = \frac{P^2}{4}$$

   transformiert. Bestimme die Transformationsgleichungen und gib $q(t)$ und $p(t)$ an.

   4 Punkte

5. **Kanonische Transformation, Problem II**

   Betrachte das eindimensionale mechanische System, dessen Dynamik durch die Hamilton-Funktion

   $$H(q, p) = \frac{q^4}{2m} p^2 + \frac{k}{2q^2} \quad (m, k > 0)$$

   beschrieben wird.

   (a) Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?

   (b) Betrachte die kanonische Transformation $(q, P) \to (Q, P)$, die durch die erzeugende Funktion

   $$S(Q, q) = -\sqrt{mk}\frac{Q}{q}$$

   charakterisiert ist. Wie lautet die Transformation?

   (c) Wie lauteten die kanonisch transformierte Hamilton-Funktion $\tilde{H}(Q, P)$ und die dazugehörigen Hamilton-Gleichungen?

   (d) Bestimme die allgemeinste Lösung der Bewegungsgleichungen aus (c).

   (e) Bestimme aus der allgemeinen Lösung von (d) die allgemeine Lösung der Dynamik aus (a) in den kanonischen Koordinaten (q, p).

   1+2+1+1+1 = 6 Punkte