Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Wintersemester 2017/18

Dozent: Robi Banerjee (banerjee@hs.uni-hamburg.de)

Blatt #10 Abgabe: 08.01.2018 **vor** der Vorlesung

Abgaben werden nur mit Name/Matrikelnummer und Angabe der Gruppe akzeptiert.

1. **Hamilton-Jacobi-Theorie: Raumsonde im Erde-Sonne-System**

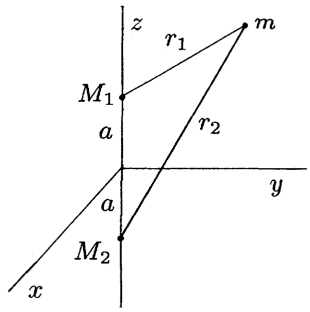


Abbildung 1: Eine Raumsonde mit der Masse m in einem Zweikörper-Potential.

Betrachte eine Raumsonde, die sich in einem System mit zwei starren Massenzentren bewegt (z. B. im mitbewegten Erde-Sonne-System unter Vernachlässigung von Scheinkräften, siehe Abb. 1). Verwende zunächst Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z), um diese auf *elliptische Koordinaten*

$$\xi = (r_1 + r_2)/2 \quad , \quad \eta = (r_1 - r_2)/2$$

in einer Ebene bei festem Winkel φ zu transformieren (die Punkte mit $\xi = \text{const.}$ formen Ellipsen und die Punkte mit $\eta = \text{const.}$ Hyperbeln). Mit dieser Transformation sind die generalisierten Koordinaten (ξ, η, φ).

(a) Stelle die Lagrange-Funktion und damit die Hamilton-Funktion auf.

(b) Formuliere auf dieser Basis die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die charakteristische Funktion W.

(c) Zeige, dass sich das Problem mit dem Separationsansatz $W = W_\xi(\xi) + W_\eta(\eta) + W_\varphi(\varphi)$ lösen lässt. Gib die entsprechenden Bestimmungsintegrale für W_ξ und W_η an.

4+2+2 = 8 Punkte

2. **Lagrangedichte/Feldtheorie, Erhaltungsgrößen**

Gegeben sei die Lagrangedichte des skalaren Feldes $\varphi(\mathbf{x}, t)$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_{,i}) \tag{1}$$

mit $\dot{\varphi} = \partial\varphi/\partial t$ und $\varphi_{,i} = \partial\varphi/\partial x_i$.

(a) Betrachte eine kontinuierliche Transformation des Feldes

$$\varphi \mapsto e^{\alpha}\,\varphi \tag{2}$$

($\alpha = \text{const}$) und die Invarianz der Lagrangedichte unter dieser Transformation. Zeige, dass daraus die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0 \tag{3}$$

folgt, wobei

$$\varrho \equiv \varphi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \quad , \quad j_i \equiv \varphi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,i}} \tag{4}$$

die Dichte und der zugehörige Strom sind.

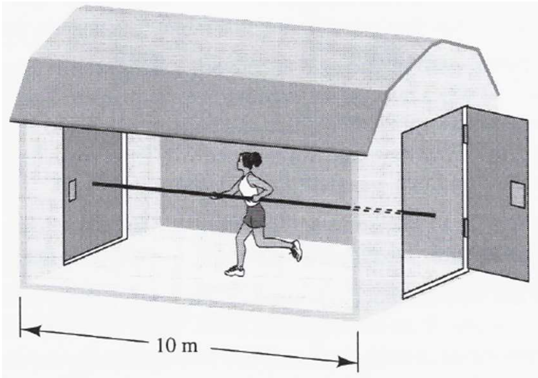
(b) Betrachte die Symmetrietransformation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$, d. h. die Lagrangedichte ist invariant gegenüber einer räumlichen Translation. Leite hieraus (mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen) den Erhaltungssatz für die Impulsdichte ab. Zur Kontrolle:

$$\frac{\partial\mathcal{P}_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial\mathcal{J}_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{5}$$

mit der Impulsdichte $\mathcal{P}_i = \varphi_{,i}\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}$
und der Impuls-Stromdichte $\mathcal{J}_{ij} = (\varphi_{,i}\partial\mathcal{L}/\partial\varphi_{,j} - \delta_{ij}\mathcal{L})$.

2+3 = 5 Punkte

3. **Scheinbares Paradoxon der Längenkontraktion**



Ein 20 m langer Stab wird in Längsrichtung mit derart hoher Geschwindigkeit transportiert, dass er im Laborsystem nur 10 m lang erscheint. Der sehr sportliche Läufer trägt den Stab nun durch die Vordertür einer Scheune, die eine Länge von 10 m haben soll. Sobald sich der Stab komplett innerhalb der Scheune befindet, schließt sich die Vordertür und die Hintertür öffnet sich instantan, so dass der Stab nicht anstößt und der Läufer die Scheune wieder verlassen kann.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Läufer?

(b) Vom Standpunkt des Läufers ist der Stab 20 m lang und die Scheune misst lediglich 5 m. Der Stab könnte also niemals in der Scheune Platz finden. Wie löst sich dieses scheinbare Paradoxon quantitativ?

(c) Zeichne ein Minkowski-Diagramm für das Ruhesystem der Scheune, um die Situation zu verdeutlichen.

1+2+1 = 4 Punkte

4. **Zwillingsparadoxon**

Betrachte das Zwillingspärchen Max und Moritz. Max begibt sich auf eine interstellare Reise und fliegt mit 96% der Lichtgeschwindigkeit für sieben Jahre (mit seiner Uhr gemessen) in eine Richtung. Danach wendet er und fliegt mit halber Geschwindigkeit zurück. Moritz wartet die ganze Zeit zu Hause.

(a) Berechne den Altersunterschied der Zwillinge nach Max' Rückkehr.

(b) Zeige die Bewegung beider Zwillinge mit Hilfe eines Minkowski-Diagramms in Moritz' Ruhesystem.

2+1 = 3 Punkte