Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Wintersemester 2017/18

Dozent: Robi Banerjee (banerjee@hs.uni-hamburg.de)

Blatt #11 — Abgabe: 15.01.2018 **vor** der Vorlesung

Abgaben werden nur mit Name/Matrikelnummer und Angabe der Gruppe akzeptiert.

1. **Zeitdilatation für Myonen**

   Myonen sind ein Hauptbestandteil der sekundären kosmischen Strahlung. Sie entstehen in der oberen Atmosphäre und zerfallen teilweise auf dem Weg zur Erdoberfläche (mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 1{,}5\,\mu$s in ihrem Ruhesystem). Ein Myonendetektor weist in 2000 m Höhe im Laufe einer Stunde 650 Myonen nach, die sich mit 99% der Lichtgeschwindigkeit in Richtung Erdboden bewegen. Wie viele Myonen würde ein identischer Detektor auf 0 m NHN innerhalb einer Stunde nachweisen?

   Hinweis: Gemäß Definition der Halbwertszeit gilt $N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$.

   (a) Berechne die Anzahl zunächst klassisch, d. h. ohne Berücksichtigung der relativistischen Zeitdilatation.

   (b) Welches Ergebnis erhält man bei korrekter relativistischer Betrachtung des Vorgangs?

   2+2 = 4 Punkte

2. **Elektron im Linearbeschleuniger**

   Der 3,2 km lange Linearbeschleuniger am SLAC in Kalifornien bringt Elektronen auf eine Energie von 40 GeV (im Bezugssystem des Beschleunigers). Es wird die idealisierende Annahme gemacht, dass die Beschleunigung durch ein konstantes elektrisches Feld $|\mathbf{E}|$ erzeugt wird. Die Bewegungsgleichung lautet daher $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = e|\mathbf{E}|$, wobei $\mathbf{p}$ der räumliche Anteil des relativistischen Viererimpulses p^μ ist.

   (a) Berechne die Entfernung des Elektrons vom Startpunkt des Beschleunigers unter der Annahme, dass es aus der Ruheposition startet. Beschreibe die zurückgelegte Strecke als Funktion der Ruhemasse m und $F = e|\mathbf{E}|$.

   (b) Welche Feldstärke ist erforderlich, um ein Elektron bis auf die Energie von 40 GeV zu beschleunigen?

   3+2 = 5 Punkte

3. **Transformation ko- und kontravarianter Vektoren**

Nutze die üblichen Gleichungen, um die kartesischen Koordinaten für einen flachen Raum in Kugelkoordinaten zu transformieren $(t, x, y, z) \to (t, r, \theta, \phi)$.

(a) Bestimme explizit die Transformationsgesetze, um die kontravarianten Vektorkomponenten (a^t, a^x, a^y, a^z) mit Hilfe von $(a^t, a^r, a^\theta, a^\phi)$ auszudrücken.

(b) Finde die entsprechenden Transformationsgesetze für die kovarianten Komponenten des Vierervektors.

2+2 = 4 Punkte

4. **Lorentztransformation/Lorentzgruppe**

Die Lorentztransformation

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu}\, a^\nu \tag{1}$$

lässt das Skalarprodukt invariant, d. h.

$$\eta_{\mu\nu}\, a'^\mu a'^\nu = \eta_{\mu\nu}\, a^\mu a^\nu, \tag{2}$$

wobei $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ die Minkowski-Metrik ist.

Alternativ in Matrixschreibweise:

$$(a')^T\, \eta\, a' = a^T\, \eta\, a \tag{3}$$

Hinweis: Verwende $c = 1$.

(a) Zeige dies explizit mit dem Vektor $a^\mu = (a^t, a^x, a^y, a^z)$ und einer Lorentztransformation mit einem Lorentz-Boost der Geschwindigkeit v in x-Richtung.

(b) Zeige mit Hilfe der Invarianz des Skalarproduktes, dass die Relation

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{4}$$

gilt (d. h. Λ ist pseudo-orthogonal).

(c) Zeige, dass die Lorentztransformation eine Gruppe bildet, d. h.:

i. Die Hintereinanderausführung zweier Lorentztransformationen erhält die obige Relation (Abgeschlossenheit).

ii. Es existiert ein Eins-Element **e**, so dass gilt

$$\mathbf{e}\Lambda = \Lambda\mathbf{e} \tag{5}$$

für alle **e**. Wie lautet dieses?

iii. Es existiert das inverse Element Λ^{-1}. Gib dieses als Funktion von Λ^T und η und explizit für einen Boost v in x-Richtung an.

2+2+3 = 7 Punkte