Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Wintersemester 2017/18

Dozent: Robi Banerjee (banerjee@hs.uni-hamburg.de)

Blatt #12 Abgabe: 22.01.2018 **vor** der Vorlesung

Abgaben werden nur mit Name/Matrikelnummer und Angabe der Gruppe akzeptiert.

1. **Transformationsregeln**

   (a) Zeige explizit, dass die Transformationsregel
   $$a'^{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} a^{\alpha}$$
   zu einer Transformation der Vektorkomponenten unter einem Lorentz-Boost führt:
   $$a'^{t} = \gamma(a^{t} - v a^{x}), \quad a'^{x} = \gamma(a^{x} - v a^{t}), \quad a'^{y} = a^{y}, \quad a'^{z} = a^{z}.$$

   (b) Zeige, dass der Epsilon-Tensor ϵ^{ijk} unter Lorentztransformation invariant bleibt.

   Hinweis: Die Definition der Determinante einer 3×3-Matrix A_{ij} lautet
   $$\det(A) = \epsilon^{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}.$$

   2+2 = 4 Punkte

2. **Teilchen im Magnetfeld der Erde**

   Das Magnetfeld der Erde kann in guter Näherung durch $\mathbf{B} = B_r(r,z)\mathbf{e}_r + B_z(r,z)\mathbf{e}_z$ beschrieben werden, wobei die Zylinderkoordinaten (r, φ, z) so gewählt werden, dass die z-Achse mit der Erdachse zusammenfällt und r den Abstand von der Erdachse bezeichnet.

   (a) Zeige, dass ein solches Magnetfeld durch ein Vektorpotential der Form $\mathbf{A} = A_{\varphi}(r,z)\mathbf{e}_{\varphi}$ beschrieben werden kann.

   (b) Zeige außerdem, dass für ein geladenes Teilchen, das sich in diesem Magnetfeld bewegt, eine Erhaltungsgröße κ existiert, für die gilt:
   $$m r^2 \dot{\varphi} + q r A_{\varphi} = m\kappa$$

   (c) Wenn kein elektrisches Feld existiert, kann sich das Teilchen nur in einem begrenzten Raumbereich aufhalten. Zeige, dass dieser durch die Bedingung
   $$\left| \kappa - \frac{q}{m} r A_{\varphi}(r,z) \right| \leq r v$$
   beschrieben wird, wenn v die konstante Geschwindigkeit des Teilchens ist.

   Anmerkung: Dieses Ergebnis dient der Erklärung des irdischen Strahlungsgürtels sowie der Polarlichter. **2+1+1 = 4 Punkte**

3. **Lorentz-Invarianten des elektromagnetischen Feldes**

   (a) Beweise folgende Identitäten für den Feldstärkentensor $F_{\mu\nu}$ und den dualen Tensor $\tilde{F}_{\mu\nu}$:
   $$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$$
   $$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}.$$

   (b) Zeige, dass diese Größen invariant unter eigentlichen Lorentztransformationen ($\det(\Lambda) = 1$) sind.

   (c) Zeige, dass wenn ein elektromagnetisches Feld in einem Inertialsystem ein rein elektrisches Feld ist, es kein Inertialsystem gibt, in dem dieses elektromagnetische Feld ein rein magnetisches Feld ist.

   (d) Es gelte in einem Inertialsystem $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ und $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$. Zeige, dass es dann kein Inertialsystem gibt, in dem das elektromagnetische Feld ein rein magnetisches oder rein elektrisches Feld darstellt. Damit hat man insbesondere gezeigt, dass für eine ebene Welle in allen Inertialsystemen keines der beiden Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ verschwindet.

   Hinweis: Nutze für die Aufgabenteile (c) und (d) die Invarianz der entsprechenden Größen unter Lorentztransformationen.

2+2+1+1 = 6 Punkte

4. **Energie-Impuls-Tensor und Feldstärketensor**

   (a) Zeige explizit, dass der Energie-Impuls-Tensor
   $$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha}{}_{\gamma}F^{\gamma\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}\right)$$
   in der folgenden Form geschrieben werden kann:
   $$T = (T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} w_{\text{em}} & \mathbf{g}^t_{\text{em}} \\ \mathbf{g}_{\text{em}} & (-T_{ik}) \end{pmatrix},$$
   wobei $w_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)$, $\mathbf{g}_{\text{em}} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ und $T_{ik} = \frac{1}{4\pi}[E_iE_k + B_iB_k - \frac{\delta_{ik}}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)]$.

   (b) Beweise die folgende Identität:
   $$\partial^{\beta}F^{\gamma\delta} + \partial^{\delta}F^{\beta\gamma} + \partial^{\gamma}F^{\delta\beta} = 0.$$

4+2 = 6 Punkte