Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik & Elektrodynamik

Wintersemester 2017/18

Dozent: Robi Banerjee (banerjee@hs.uni-hamburg.de)

Blatt #13 Abgabe: 29.01.2018 **vor** der Vorlesung

Abgaben werden nur mit Name/Matrikelnummer und Angabe der Gruppe akzeptiert.

Für alle Aufgaben gilt $c = 1$

1. **Trajektorie einer Punktladung**

   Die Bewegungsgleichungen für die Trajektorie $x^\mu(\tau)$ eines Punktteilchens der Masse m und der Ladung q im externen elektromagnetischen Feld lauten

   $$m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu.$$

   Hierbei ist τ die Eigenzeit des Teilchens und $u^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$. Verwende $\mathbf{u} = \gamma\mathbf{v}$ und $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t$ für die räumlichen Komponenten der Geschwindigkeit.

   (a) Zeige, dass obige Gleichung die Konstanz von $u^\mu u_\mu$ entlang der Trajektorie impliziert. Verifiziere, dass der Wert der Konstanten $+1$ ist, indem $u_\mu u^\mu$ im lokalen Ruhesystem des Teilchens berechnet wird.

   (b) Betrachte die Bewegung in einem konstanten Magnetfeld mit dem Betrag B, das in z-Richtung zeigt. Im Laborsystem gilt also $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{E} = 0$. Zeige, dass $|\mathbf{u}|$ bei der Bewegung zeitlich konstant ist. Hinweis: zeige zunächst, dass sich Bewegungsgleichung in folgender Form darstellen lässt: $\mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}\tau = \gamma q/m\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$.

   (c) Zeige, dass

   $$u(\tau) = a\cos(\omega\tau + \varphi_0)\mathbf{e}_x - a\sin(\omega\tau + \varphi_0)\mathbf{e}_y + b\mathbf{e}_z$$

   eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist. Hierbei sind φ_0, a und b reelle Konstanten und $\omega = qB/m$.

   2+2+2 = 6 Punkte

2. **Noether-Theorem für relativistische Punktteilchen**

   (a) Leite das Noether-Theorem für relativistische Punktteilchen her: Ändert sich unter einer infinitesimalen Verschiebung der Raum-Zeit-Koordinaten δx^μ die Lagrange-Funktion

   $$\tilde{L} \equiv \gamma L = -m - qu_\mu A^\mu$$

nur um eine totale Ableitung nach dem Bahnparameter

$$\delta\tilde{L} = \frac{\mathrm{d}\tilde{Q}}{\mathrm{d}\lambda},$$

so ist

$$Q = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial u^\mu}\delta x^\mu - \tilde{Q} \tag{1}$$

eine Erhaltungsgröße, d. h., die Ableitung dieser Größe nach λ verschwindet.

(b) Begründe damit für die Lagrange-Funktion

$$\tilde{L}(x^\mu, \tilde{u}^\mu) = -m\sqrt{\tilde{u}_\mu\tilde{u}^\mu} - q\tilde{u}_\mu A^\mu$$

einer Punktladung im elektromagnetischen Feld: Sind die Potentiale A^μ invariant unter der Verschiebung $\delta x^\mu = b^\mu$ mit einem konstanten Vierervektor b^μ (sind sie also räumlich und zeitlich konstant), so bleibt der Viererimpuls der Punktladung erhalten. Hinweis: verwende das Ergebnis aus Gleichung (1).

2+2 = 4 Punkte

3. **Kovariante Formulierung der Elektrodynamik**

Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}\right).$$

Zeige, dass in Abwesenheit von Strömen und Ladungen gilt $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

5 Punkte

4. **ELG einer speziellen Lagrangedichte**

Gegeben sei die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - A_\mu j^\mu.$$

Leite die entsprechenden Bewegungsgleichungen aus den Euler-Lagrange-Gleichungen ab.

5 Punkte